На правах рукописи

Пауль Светлана Владимировна

МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО И ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Официальные оппоненты:

Дудин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, научно-исследовательская лаборатория прикладного вероятностного анализа, заведующий лабораторией

Самуйлов Константин Евгеньевич, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, заведующий кафедрой

Войтишек Антон Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория стохастических задач, ведущий научный сотрудник

Титовцев Антон Сергеевич, доктор технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет», кафедра интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами, профессор

Защита состоится 8 декабря 2022 г. в 11 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.1.2.01», созданного на базе Института прикладной математики и компьютерных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 104).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/80c4d2fd-faf7-4845-99c3-8f1943d49c6a

Автореферат разослан «___» октября 2022 г.

И. о. ученого секретаря
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Моисеева Светлана
Петровна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. При математическом моделировании процессов в технических, физических, экономических, медицинских, военных и других областях широко применяется аппарат теории массового обслуживания (ТМО). Особую роль эта теория играет в области телекоммуникаций. Если первоначально наибольший интерес у исследователей вызывали вопросы проектирования телефонных сетей, то сейчас активно ведутся исследования в области информационных технологий, стремительное развитие которых вызывает большой рост требований к телекоммуникационным системам. Для оптимального проектирования и оценки производительности современных сетей передачи данных требуется разработка новых математических моделей и методов их исследования. Главным образом существует проблема приближения условий, в которых функционируют описывающие реальные процессы математические модели, к истинной картине изучаемых явлений. Однако модель, перегруженную различными деталями и нюансами реальной системы, тяжело исследовать аналитически существующими методами.

Возникает необходимость в разработке новых аналитических методов исследования, позволяющих изучать модели, учитывающие различные условия функционирования реальных систем, и получать их достаточно точные вероятностные характеристики.

Степень разработанности темы. Активное развитие ТМО получила во второй половине 20-го века в работах C. Palm, D. G. Kendall, L. Kleinrock, T. L. Saaty, А. Я. Хинчина, Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Г. П. Башарина и др. В 80-х гг. 20-го века с появлением систем ЭВМ интерес к теории массового обслуживания возрос еще больше. Многочисленные исследования телекоммуникационных систем того времени показали неадекватность классических моделей потоков реальным данным. Эта проблема привела к возникновению математических моделей коррелированных потоков и рассмотрению моделей СМО, выходящих за рамки систем с ожиданием и систем с потерями. При этом нужно отметить, что исследователи по-прежнему используют классические потоки в качестве моделей трафика из-за простоты их математического и численного анализа.

Исследования реальных сетевых потоков последних лет показывают, что такие модели могут обладать уникальными свойствами, такими как фрактальность или самоподобие (рассмотрение интервала высокой интенсивности в более детальном масштабе времени приводит к получению потока с такой же структурой, как у всего потока), коррелированность длин интервалов между моментами наступления событий, пачечность (интервалы высокой интенсивности сменяются интервалами с низкой или даже нулевой интенсивностью потока) и т. д. Для описания современного сетевого трафика могут использоваться известные модели непуассоновских потоков (MAP, MMPP, полумарковский поток). Например, выбирая подходящие параметры потока определенным образом, можно добиться смены коротких интервалов с интенсивным трафиком более длительными периодами без наступления событий. Используя модели более высокого порядка (например, расширение пространства состояний MAP), можно достичь нескольких уровней самоподобия.

Появление новых моделей потоков оказало существенное влияние на развитие как самих систем массового обслуживания, так и методов их исследования.

Исследованию в области ТМО посвящены работы следующих российских авторов: Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака, П. П. Бочаров, А. В. Печинкин, А. А. Боровков, Г. И. Фалин, В. В. Рыков, В. М. Вишневский, Е. В. Морозов, Д. В. Ефросинин, В. А. Наумов, М. Фархадов, Г. Ш. Цициашвили, А. В. Войтишек, М. А. Федоткин, А. В. Зорин, В. Н. Задорожный, Г. А. Медведев, С. П. Сущенко, А. М. Горцев, Л. А. Нежельская, А. Ф. Терпугов, А. А. Назаров, С. П. Моисеева, А. Н. Моисеев; зарубежных авторов: J. R. Artalejo, А. Н. Дудин, E. A. Krishnamoorthy, A. Melikov, M. Pagano, T. Phung-Duc, J. Sztrik, O. Tikhonenko и др.

В некоторых современных реальных системах по техническим причинам отсутствует буфер для ожидания поступивших заявок, которые не могут мгновенно быть приняты к обслуживанию, но их потеря недопустима. Примером таких систем являются телекоммуникационные сети связи, управляемые протоколами случайного множественного доступа, в которых обязательным условием является наличие общего ресурса, совместно используемого пользователями на правах конкуренции за его захват. В связи с этим в середине прошлого века выделили новый класс систем массового обслуживания – системы с повторными вызовами (Retrial Queueing System или RQ-системы), которые являются математическими моделями сетей связи, управляемых протоколами случайного множественного доступа. Чтобы учесть повторные обращения, в системе массового обслуживания выделяется место, называемое орбитой. Поведение заблокированной заявки в системе следующее: она поступает на орбиту, где осуществляет задержку, длительность которой обычно моделируется как случайная величина.

Современные направления разработки моделей и методов исследования RQ-систем связаны со спецификой их приложений.

Модели смешанных call-центров, когда операторы могут совершать звонки сами, в виде марковской RQ-системы с вызываемыми заявками предложены J. R. Artalejo и T. Phung-Duc. Данный тип систем получил распространение в нулевых годах 21-го века, было предложено множество усложнений с учетом специфики различных областей приложения.

Модели RQ-систем с вызываемыми заявками также могут учитывать нестабильность работы оператора и возможные поломки оборудования. В таком случае речь идет о системах с ненадежным прибором, который может выходить из строя или делать перерывы в работе на случайное время и работать в прежнем режиме после возвращения трудоспособности.

Тандемные системы массового обслуживания используются для моделирования процесса обработки, в котором входящие запросы обслуживаются последовательно на нескольких этапах. Потребность в последовательных сервисах может возникать, например, при обработке запросов в call-центрах или при управлении потоком данных между элементами мультиагентной робототехнической системы. Тандемные RQ-системы впервые были предложены в работах A. Gómez-Corral для исследования телефонных систем с переключением и в работах А. Н. Дудина в качестве моделей коммуникационных систем в виде систем с многолинейными фазами, где первая фаза трактуется как базовая станция в соте, а вторая – как система удаленных серверов.

Многолинейные RQ-системы широко применяются для моделирования и проектирования систем обработки данных, которые предполагают наличие большого количества серверов. Применение результатов исследования многолинейных моделей при проектировании таких реальных систем позволяет учитывать распределение ресурсов серверов при пиковом и непиковом характере пользовательского трафика, полезно при выборе политики управления в условиях большой и низкой рабочей нагрузки. Многолинейные RQ-системы не получили большого распространения из-за высокой сложности их исследования. Задача нахождения двумерного распределения числа заявок на орбите и числа занятых приборов представляется трудной, так как уравнения, описывающие это распределение, не всегда представимы в матричном виде.

Так как большинство современных моделей имеют сложную природу или конфигурацию, их не всегда удается исследовать аналитически. В связи с этим зачастую применяются численные методы или методы имитационного моделирования. Аналитические методы применяются главным образом в тех случаях, когда модели потока являются пуассоновскими, а продолжительность обслуживания подчиняется экспоненциальному распределению.

На основе вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что задачи анализа моделей непуассоновских потоков и математических моделей систем случайного множественного доступа являются актуальными научными проблемами.

Цель исследования. Целью данной диссертационной работы являются теоретические положения, посвященные разработке и применению математических методов исследования потоков событий со случайным объемом поступающих требований и систем массового обслуживания с повторными вызовами различной конфигурации.

Задачи исследования:

1. разработать математические модели потоков событий со случайным объемом поступающих требований;

2. разработать модификации метода асимптотического анализа потоков в условии растущего времени наблюдения, которые позволят выполнить исследование потоков событий со случайным объемом информации;

3. разработать модификации метода асимптотического анализа RQ-систем с вызываемыми заявками, надежным и ненадежным прибором и тандемных RQ-систем с общей орбитой в условии большой задержки заявок на орбите;

4. разработать новые методы асимптотического анализа в других предельных условиях, которые позволят выполнять исследование систем с повторными требованиями и вызываемыми заявками;

5. для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами разработать новый асимптотический метод в условии большой задержки заявок на орбите повышенной точности, позволяющий расширить область применимости асимптотических результатов;

6. получить выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей состояний исследуемых однолинейных и многолинейных RQ-систем различной конфигурации;

7. разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа потоков событий со случайным объемом поступающих требований и систем с повторными вызовами различной конфигурации для вычисления значений основных вероятностных характеристик рассматриваемых потоков и систем, а также определения области применимости полученных асимптотических результатов.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, состоит в следующем.

1. Впервые построены математические модели потоков событий со случайным объемом требований, обобщающие теорию ординарных и неординарных потоков, позволяющие учитывать особенности реального трафика в телекоммуникационных системах. Получены допредельные интегральные формулы для нахождения распределения вероятностей объема информации, поступающей в предложенных потоках событий со случайным объемом требований за определенное время.

2. Разработаны модификации метода асимптотического анализа, позволяющие, в отличие от существующих подходов, выполнить анализ потоков событий со случайным объемом поступающих требований в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками. С использованием предложенных модификаций асимптотического метода в предельном условии растущего времени наблюдения за потоком получено асимптотическое гауссовское распределение вероятностей поступающего объема, для которого найдены явные выражения параметров предельного нормального распределения, аналогичные теоремам из класса Центральной предельной теоремы.

3. Метод асимптотического анализа систем с повторными вызовами модифицирован на случай исследования RQ-систем с разнотипными вызываемыми заявками, надежным и ненадежным прибором, тандемных RQ-систем с общей орбитой в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Применение данных модификаций обобщает методику исследования

систем с повторными вызовами на случай более сложных конфигураций моделей.

4. Предложены два новых предельных условия: условие согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и условие длительного обслуживания вызываемых заявок, для которых реализованы методы асимптотического анализа. При втором предельном условии получена характеристическая функция, отличная от гауссовской.

5. Впервые разработан и предложен метод асимптотически-диффузионного анализа, предназначенный для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами, который обладает повышенной точностью и расширяет область применимости асимптотических результатов.

6. Для однолинейных и многолинейных RQ-систем различной конфигурации, представленных в диссертационной работе, с использованием разработанных методов и модификаций впервые получены выражения для стационарных асимптотических распределений вероятностей состояний систем и их дискретных аппроксимаций.

7. С использованием разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для численного анализа потоков событий со случайным объемом требований и RQ-систем различной конфигурации на основе численных экспериментов найдены численные значения основных вероятностных характеристик рассматриваемых потоков и систем, а также установлена область применимости полученных асимптотических результатов.

Методы исследования. Для проведения диссертационного исследования использовался аппарат следующих дисциплин: математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, дифференциальные уравнения и численные методы, а также методы асимптотического анализа.

Для процессов, характеризующих состояния потоков событий с произвольным объемом поступающих требований и RQ-систем различной конфигурации, использовались методы многомерных цепей Маркова и многомерных марковских процессов с дискретными и непрерывными компонентами и метод частичных характеристических функций.

Для решения всех полученных уравнений в диссертации применялись и развивались методы асимптотического анализа в различных предельных условиях. При исследовании потоков событий с произвольным объемом поступающих требований системы уравнений решаются в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками. Это позволяет сделать вывод о том, что в данном предельном условии распределения объема информации, поступившего в исследуемых непуассоновских потоках, являются асимптотически гауссовскими. Здесь принципиальным различием являются выражения для вычисления математического ожидания и дисперсии, которые определяют гауссовское распределение. Данные основные характеристики будут зависеть только от вида модели потока.

При исследовании RQ-систем различной конфигурации применялся асимптотический метод в предельных условиях большой задержки заявок на орбите, а также новые, предложенные в диссертации предельные условия согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок.

Для исследования предложенных в диссертации RQ-систем различной конфигурации применялся новый метод асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите.

Для оценки области применимости полученных асимптотических результатов используются численные методы. Проведенный анализ позволяет определить область применимости асимптотических результатов на основе проведения многочисленных компьютерных экспериментов. Указанный анализ произведен с использованием представленного в диссертации комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов численных расчетов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Впервые в теории массового обслуживания предложены модификации метода асимптотического анализа в предельном условии растущего времени наблюдения за потоками событий с произвольным объемом поступающих требований, которые позволяют построить гауссовские аппроксимации распределения объема информации.

Предложены модификации методов асимптотического анализа, которые позволяют проводить исследование RQ-систем различной конфигурации, таких как RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками, RQ-системы с ненадежным прибором, тандемные RQ-системы с общей орбитой. Данные методы вносят существенный вклад в теорию массового обслуживания, так как, в отличие от существующих подходов, позволяют решать задачи анализа систем с повторными вызовами для случаев непуассоновских входящих потоков и неэкспоненциального времени обслуживания.

Впервые предложен метод асимптотически-диффузионного анализа, который обладает повышенной точностью и предназначен для исследования как однолинейных, так и многолинейных систем с повторными вызовами различной конфигурации.

Разработанные методы, их модификации и алгоритмы позволяют выполнять анализ широкого класса систем с повторными вызовами, который является важным разделом теории массового обслуживания.

Результаты диссертационного исследования, в том числе конкретные формулы расчета параметров предлагаемых аппроксимаций, могут быть использованы при анализе функционирования реальных потоков и телекоммуникационных систем, адекватными математическими моделями которых являются потоки с произвольным объемом поступающих требований и системы массового обслуживания с повторными вызовами.

Предложенные RQ-системы могут быть применены при проектировании сетей нового поколения для создания новых протоколов случайного множественного доступа и модификации уже существующих.

Найденные основные вероятностные характеристики исследуемых математических моделей реальных потоков и сетей связи позволяют оценить их основные характеристики и дают возможность научно обоснованно выбирать значения параметров сетей и управляющих протоколов доступа, что существенно расширяет возможности решения ряда проблем в области проектирования сетей связи нового поколения.

Разработанный комплекс программ позволяет выполнять расчет параметров вероятностных законов распределений объема информации в потоках с произвольным объемом поступающих требований и характеристик исследуемых систем.

Указанные результаты успешно применялись при решении ряда практических задач при выполнении научно-исследовательской работы по договору с зарубежной телекоммуникационной компанией (сведения о компании конфиденциальны).

Положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Модификации метода асимптотического анализа в предельном условии растущего времени наблюдения на случай непуассоновских потоков событий со случайным объемом требований.
2. Теоремы о виде допредельных и асимптотических характеристических функций распределения вероятностей объема информации в потоках с произвольным объемом поступающих требований.
3. Модификации метода асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите.
4. Методы асимптотического анализа в двух предельных условиях: согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок, применяемые для исследования систем с повторными вызовами и вызываемыми разнотипными заявками.
5. Теоремы о виде асимптотических характеристических функций распределения вероятностей числа заявок на орбите в системах с повторными вызовами, представленных в диссертации.
6. Метод асимптотически-диффузионного анализа, обладающий повышенной точностью, который предназначен для исследования однолинейных и многолинейных систем с повторными вызовами, представленных в диссертации.
7. Теоремы о виде асимптотических плотностей распределения вероятностей числа заявок на орбите в однолинейных и многолинейных системах с повторными вызовами различной конфигурации.
8. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов численного анализа потоков с произвольным объемом поступающих требований и систем массового обслуживания с повторными вызовами.

Достоверность полученных результатов подтверждается математически корректными формулировками, выводами и доказательствами теорем, представленными в диссертационной работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей, и большим количеством компьютерных экспериментов.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Автор лично участвовал в получении всех результатов, представленных в диссертационной работе, а именно в разработке и применении методов исследования потоков событий со случайным объемом требований и RQ-систем различной конфигурации, выводе всех формул, доказательстве всех представленных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и написании алгоритмов построения асимптотических распределений, выполнении численного анализа полученных результатов. Направления исследований диссертационной работы и постановки задач обсуждались с научным консультантом доктором технических наук, профессором Назаровым А. А., что отражено в совместных публикациях с автором диссертационной работы.

Связь работы с крупными научными проектами. Значительная часть результатов, изложенных в работе, получена в рамках выполнения проекта № 4761 «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи» (руководитель – А. А. Назаров) аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Федерального агентства по образованию (2009–2011 гг.); научно-исследовательской работы № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (руководитель – А. А. Назаров) в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности (2014–2015 гг.); гранта РФФИ № 18-01-00277 А «Разработка моделей и методов исследования телекоммуникационных систем, управляемых протоколами случайного множественного доступа» (руководитель – А. А. Назаров) (2018 г.); научно-исследовательской работы «Разработка, анализ, тестирование и настройка математических моделей телекоммуникационного трафика типа «свечи», многопотокового поступления требований и многоуровневого управления трафиком» (руководитель – А. Н. Моисеев) по договору с зарубежной телекоммуникационной компанией (сведения о компании конфиденциальны).

Публикации. По материалам диссертации опубликована 51 работа, из них 11 статей в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (в том числе 4 статьи в зарубежных научных журналах, входящих в Scopus; 1 статья в спецвыпуске зарубежного научного журнала, входящего в Scopus; 3 статьи в российских научных журналах, входящих в Scopus), 14 статей в сборниках материалов конференций, представленных в зарубежных изданиях, входящих в Scopus и / или Web of Science, 1 статья в прочем научном журнале, 23 публикации в сборниках материалов международных и всероссийской научных конференций; получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Апробация работы. Основные результаты работы и отдельные ее положения докладывались и обсуждались на 20 международных научных конференциях: XIV Международная конференция им. А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Анжеро-Судженск, 2015), XV Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (пос. Катунь, Алтайский край, 2016), 31st European Conference on Modelling and Simulation (Budapest, Hungary, 2017), Двадцатая международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 2017), XVI Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Казань, 2017), 12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics (Tomsk, 2018), XVII Международная конференция им. А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 2018), XXI Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 2018); XVIII Международная конференция им. А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Саратов, 2019), XXII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 2019), 25th International Conference on Analytical & Stochastic Modelling Techniques and Applications (Moscow, 2019), Международная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 2020), XXIII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 2020), международная конференция «Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики» (Карши, Узбекистан, 2020), Пятая международная научная конференция по стохастическим методам (Москва, 2020), XIX Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 2020), International Conference on Information Technoligy (Amman, Jordan, 2021), XXIV Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (Москва, 2021), XX Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Томск, 2021), 26th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications (Tsukuba, Japan, 2021).

Диссертация выполнена в рамках основных научных направлений исследований научной школы Томского государственного университета по теории массового обслуживания и теории телетрафика.

Структура работы. Диссертация изложена на 327 страницах, состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованной литературы, включающего 260 наименований, в том числе 170 на английском языке, содержит 32 таблицы, 58 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Используемая далее нумерация теорем, лемм, формул и таблиц – такая же, как в диссертационной работе.

Во **введении** описаны актуальность, цель, основные задачи, методы исследования, научная новизна результатов исследования, теоретическая и практическая значимость работы, приведено краткое изложение диссертации по главам.

В **первой главе** представлены модели потоков событий различных типов: поток восстановления, MMPP, полумарковский поток с произвольным объемом поступающих требований. В предложенных моделях в момент наступления события потока поступает случайный объем информации, распределение вероятностей которого задано произвольной функцией $B(x)$.

В параграфах 1.1, 1.2, 1.3 вводятся модели потоков, которые определяются следующим образом: поток восстановления задается функциями распределения вероятностей $A_1(x)$ и $A(x)$ длин первого интервала и интервалов между моментами наступления его событий; MMPP-поток задается матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик цепи Маркова $m(t)$ с непрерывным временем, управляющей потоком и диагональной матрицей $\mathbf{\Lambda}$ условных интенсивностей λ_m наступления событий в m-ом состоянии MMPP-потока, $m=\overline{0,M}$; полумарковский поток задается полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$, элементы $A_{kv}(x)$ которой имеют вид $A_{kv}(x)=P\{\xi(n+1)=v,\tau(n+1)<x\,|\,\xi(n)=k\}$, где $\xi(n)$ – дискретная компонента, $\tau(n)$ – непрерывная компонента, принимающая неотрицательные значения.

В параграфах 1.1.1 и 1.2 для потока восстановления и MMPP-потока определена допредельная характеристическая функция объема $S(t)$ информации, поступившего за время t. Данная функция с помощью обратного преобразования Фурье определяет плотность и функцию распределения вероятностей объема $S(t)$. В параграфе 1.3 для полумарковского потока получены допредельные плотность и функция распределения вероятностей объема информации $S(t)$, поступившего за время t в заявках потока, в виде интегральных формул.

В параграфах 1.1.1, 1.2 и 1.3.2 сформулированы и доказаны теоремы о предельном распределении вероятностей значений объема $S(t)$ в потоке восстановления, MMPP и полумарковском потоках в предельном условии растущего времени t. Данное асимптотическое условие определяется равенством $t = \tau T$, где $\tau \geq 0$, а T – бесконечно большой параметр. Данное равенство обеспечивает зависимость времени t от «медленного времени» τ, так как для любого фиксированного значения $\tau > 0$ значение t неограниченно возрастает.

Показано, что характеристическая функция распределения вероятностей объема информации, поступившего в заявках за время t каждого из рассмотренных типов потоков, могут быть аппроксимированы нормальным распределением вида

$$h(u,t)=\exp\left\{ju\kappa_1 t+\frac{(ju)^2}{2}\kappa_2 t\right\}$$

с математическим ожиданием $\kappa_1 t$ и дисперсией $\kappa_2 t$, где величины κ_1 и κ_2 вычисляются по формулам, которые приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Формулы для вычисления параметров κ_1 и κ_2 моделей потоков событий

Тип потока	Формула для параметра κ_1	Формула для параметра κ_2
Поток восстановления	$\kappa_1=\frac{b_1}{a_1}$	$\kappa_2=\frac{a_1^{\ 2}\left(b_2-b_1^2\right)+b_1^2\left(a_2-a_1^{\ 2}\right)}{a_1^{\ 3}}$
MMPP	$\kappa_1 = b_1\mathbf{r\Lambda e}$	$\kappa_2 = 2b_1\mathbf{g\Lambda e} + b_2\mathbf{r\Lambda e}$
Полумарковский	$\kappa_1=\frac{b_1}{\mathbf{rA}_1\mathbf{e}}$	$\kappa_2=\frac{b_2}{\mathbf{rA}_1\mathbf{e}}+2b_1\mathbf{g}'(0)\mathbf{e}$

Величины a_1, a_2, b_1, b_2 – первые и вторые моменты функций распределения вероятностей $A(x)$ и $B(x)$ соответственно. В формулах для MMPP вектор $\mathbf{r}$ является решением однородной системы уравнений $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{re} = 1$, вектор-строка $\mathbf{g}$ является решением неоднородной системы уравнений

$$\mathbf{gQ}=\mathbf{r}\left(\kappa_1\mathbf{I}-b_1\mathbf{\Lambda}\right),$$
$$\mathbf{ge} = 0, \tag{1.52}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

В формулах для полумарковского потока матрица $\mathbf{A}_1$ определяется равенством $\mathbf{A}_1=\int\limits_0^\infty\left(\mathbf{P}-\mathbf{A}(x)\right)dx$, вектор $\mathbf{g}'(0)$ является решением неоднородной системы уравнений

$$\mathbf{g}'(0)\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)=\kappa_1\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right),$$
$$\mathbf{g}'(0)\mathbf{A}_1\mathbf{e}=\frac{b_1}{2}\frac{\mathbf{rA}_2\mathbf{e}}{\left(\mathbf{rA}_1\mathbf{e}\right)^2}-b_1. \tag{1.97}$$

Здесь для полумарковского потока $\mathbf{r}$ – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, для которого выполняются равенства $\mathbf{r} = \mathbf{rP}$, $\mathbf{re} = 1$, где $\mathbf{P}=\lim\limits_{z\to\infty}\mathbf{A}(z)$ – стохастическая матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова по моментам изменения состояний полумарковского процесса. Матрица $\mathbf{A}_2$ определяется равенством $\mathbf{A}_2=\int\limits_0^\infty\frac{x^2}{2}d\mathbf{A}(x)$. Вектор $\mathbf{R}$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений полумарковского процесса $k(t)$, который определяется равенством $\mathbf{R}={\mathbf{rA}_1}/{\mathbf{rA}_1\mathbf{e}}$.

Представленные в первой главе результаты являются естественным продолжением и обобщением результатов кандидатской диссертации автора. Данные классы потоков могут быть использованы как самостоятельные модели описания реального трафика и как модели входящих потоков систем массового обслуживания.

Во **второй главе** представлены математические модели систем с повторными вызовами различной конфигурации, аналитическое исследование которых представлено в диссертации.

В параграфе 2.1 описана RQ-система с разнотипными вызываемыми заявками и одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает MMPP-поток заявок. Если прибор свободен, то заявки, поступающие в систему из потока, занимают прибор для обслуживания и обслуживаются в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_1. Если поступившая заявка застает прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки происходит в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром σ. После задержки заявка вновь обращается к прибору и ведет себя так же, как вновь прибывшая из входящего потока заявка. Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне (не с орбиты). Будем предполагать, что существует $(N-1)$ тип вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n, $n=\overline{2,N}$ с интенсивностью α_n. Вызванная заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n.

RQ-система с простейшим входящим поток заявок с интенсивностью λ, разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором описывается в параграфе 2.2.1. Прибор выходит из строя с интенсивностью γ_0, когда свободен, или с интенсивностью γ_1, когда обслуживает заявку входящего потока. После выхода из строя прибор находится в состоянии восстановления. Длительность периода восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром γ_2. В момент поломки (выхода из строя) прибора обслуживаемая заявка переходит на орбиту. Когда прибор обслуживает вызываемую заявку или прибор находится в состоянии восстановления, заявки входящего потока уходят на орбиту. Считается, что прибор не может выйти из строя при обслуживании вызываемых заявок, так как обслуживание инициировано самим прибором.

Описание тандемной RQ-системы с двумя последовательно обслуживающими приборами, на вход которой поступает MMPP поток представлено в параграфе 2.3. Если заявка входящего потока обнаруживает первый прибор свободным, то она встает на прибор и обслуживается в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ_1, после чего обращается ко второму прибору. Если второй прибор свободен, заявка встает на него и обслуживается в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ_2. Если заявка входящего потока застает первый прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор. Если заявка после обслуживания на первом приборе застает второй прибор занятым, она мгновенно отправляется на ту же орбиту, где после случайной экспоненциально распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на обслуживание на первый прибор.

Для однолинейных RQ-систем определены процессы $i(t)$ – число заявок на орбите и $k(t)$ – состояние прибора (приборов) в момент времени t. Решается задача нахождения предельных распределений вероятностей состояний прибора (приборов) и числа заявок на орбите в исследуемой системе.

В параграфе 2.4.1 предложена N-линейная система с повторными вызовами $M|H_2|N$, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, а время обслуживания случайное с гиперэкспоненциальной функцией распределения вероятностей $B(x) = q_1\left(1 - e^{-\mu_1 x}\right) + q_2\left(1 - e^{-\mu_2 x}\right)$, где $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $0 < q_1 < 1$, $q_1 + q_2 = 1$. Применение гиперэкспоненциального распределения оправдано тем, что таким распределением можно аппроксимировать распределения вероятностей неотрицательных случайных величин из достаточно широкого класса распределений. Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая хотя бы один из N приборов свободным, занимает его, а прибор начинает ее обслуживание в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает, что все приборы заняты, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально распределенного времени с параметром σ, после которой вновь обращается к обслуживающим приборам. Если хотя бы один из них свободен, то эта заявка реализует повторное (отложенное) обслуживание. Если в момент обращения заявки с орбиты вновь все приборы заняты, то обратившаяся к приборам заявка повторяет цикл экспоненциальной задержки на орбите.

В параграфе 2.4.2 описана RQ-система с N обслуживающими приборами, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка входящего потока, поступая в систему, занимает любой из свободных приборов. Обслуживание прибором разбито на две фазы. На первой фазе заявка обслуживается в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ_1. После обслуживания на первой фазе заявка мгновенно переходит на вторую фазу и обслуживается на ней в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ_2. Завершив обслуживание на второй фазе, заявка покидает систему. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает, что все приборы заняты на любой из двух фаз, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально распределенного времени с параметром σ. Двухфазное обслуживание в рассматриваемой RQ-системе названо специальным потому, что оно обладает следующей особенностью. Если в момент окончания обслуживания на второй фазе и освобождения прибора в системе имеется хотя бы одна заявка, обслуживаемая на первой фазе, то она мгновенно переходит на освободившийся прибор и сразу начинает обслуживание на второй фазе с интенсивностью μ_2, тем самым сокращает свое полное двухфазное время обслуживания.

Обозначены процессы $n(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t, $n=\overline{0,N}$; процессы $n_1(t)$ – число приборов, занятых на первой фазе; $n_2(t)$ – число приборов, занятых на второй фазе; $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t. Для компактности записей при исследовании многолинейных систем определены линейные однородные конечно разностные операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ двух дискретных переменных n_1 и n_2. Ставится задача нахождения предельных распределений вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазах обслуживания, и предельной плотности распределения вероятностей числа заявок на орбите.

В параграфах 2.1–2.4 для распределения вероятностей состояний процессов, описывающих функционирование систем, построены системы дифференциальных уравнений Колмогорова, аналитические предельные решения которых предложены в главах 3–5. В параграфах 2.2.1–2.2.3 для RQ-систем с ненадежным прибором и вызываемыми заявками получены условия существования стационарного режима при дообслуживании заявок после поломок прибора и обслуживании заново прерванных заявок. При условии обслуживания прерванных заявок заново получено распределение вероятностей состояний прибора и найдена характеристическая функция числа заявок в системе.

В **третьей главе** изложены результаты исследования математических моделей RQ-систем различной конфигурации методами асимптотического анализа.

RQ-система с MMPP входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками исследована в трех предельных условиях: большой задержки заявок на орбите, согласованно высокой интенсивности вызывания заявок и согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок.

В параграфе 3.1.2 представлен анализ RQ-системы с MMPP входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками в предельном условии большой задержки заявок на орбите при $\sigma \to 0$, сформулированы и доказаны теоремы относительно вида характеристической функции исследуемого случайного процесса $i(t)$ числа заявок на орбите. Установлено, что в данном предельном условии стационарное распределение числа заявок на орбите в рассматриваемой системе аппроксимируется гауссовским распределением с математическим ожиданием κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ, что позволяет для допредельного распределения построить аппроксимацию. Параметр κ_1 является решением уравнения

$$\mathbf{r}\left\{\mathbf{I}+\left(\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I}\right)\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{-\kappa_1\mathbf{I}+\left(\mathbf{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I}\right)\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}\right\}\mathbf{e}=0. \qquad (3.4)$$

Здесь вектор-строка $\mathbf{r}$ – стационарное распределение вероятностей процесса $m(t)$, которое можно найти из системы уравнений: $\mathbf{rQ} = 0$, $\mathbf{re} = 1$; $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец. Величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \kappa_1 \boldsymbol{\varphi}_0 \mathbf{e} + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}}{\mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \kappa_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{e} - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{g}_k \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}}. \tag{3.21}$$

Здесь векторы $\mathbf{g}_k$ и $\boldsymbol{\varphi}_k$ определяются системами уравнений

$$\mathbf{g}_1 = \left(\mathbf{g}_0 \left(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}\right) + \mathbf{r}_0\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1},$$

$$\mathbf{g}_n = \alpha_n \mathbf{g}_0 \left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1}, \quad n = \overline{2, N},$$

$$\mathbf{g}_0 \left(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 \left(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} + \sum_{n=2}^{N} \mu_n \alpha_n \left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} \right) =$$

$$= \mathbf{r}_0 - \mu_1 \mathbf{r}_0 \left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1},$$

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0. \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \left(\boldsymbol{\varphi}_0 \left(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}\right) + \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{r}_0\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \left(\alpha_n \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda}\right)\left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1}, \quad n = \overline{2, N},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0 \left(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \mathbf{I} - \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 \left(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} + \sum_{n=2}^{N} \mu_n \alpha_n \left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} \right) =$$

$$= \mu_1 \left(\kappa_1 \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 \boldsymbol{\Lambda}\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} - \sum_{n=2}^{N} \mu_n \mathbf{r}_n \boldsymbol{\Lambda} \left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1},$$

$$\sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{e} = 0, \tag{3.23}$$

векторы $\mathbf{r}_k$, $k = \overline{0, N}$ – векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора k и состояний m MMPP-потока определяются равенствами

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 \left(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1}, \tag{3.11}$$

$$\mathbf{r}_n = \alpha_n \mathbf{r}_0 \left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1}, n = \overline{2, N}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \left\{ \mathbf{I} + \left(\boldsymbol{\Lambda} + \kappa_1 \mathbf{I}\right)\left(\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \left(\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q}\right)^{-1} \right\}^{-1}. \tag{3.13}$$

В параграфе 3.1.3 RQ-система MMPP|M|1|N с разнотипными вызываемых заявок исследована в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызова заявок. В данном предельном условиях стационарное распределение числа заявок на орбите также аппроксимируется гауссовским распределением с математическим ожиданием $\alpha\kappa_1$ и дисперсией $\alpha\kappa_2$. параметры RQ-системы представлены в виде $\alpha_n = \alpha\eta_n$, где $n = \overline{2, N}$. В предложенных обозначениях предельное условие согласованно высокой интенсивности вызова заявок имеет вид $\alpha \to \infty$. Величины κ_1 и κ_2 получены в теоремах 3.3 и 3.4, доказательство которых приведено в работе.

Теорема 3.3 *Пусть* $i(t)$ *– число заявок на орбите в* RQ-*системе* MMPP|M|1 *с разнотипными вызываемыми заявками, тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\alpha\to\infty} Me^{jw\frac{i(t)}{\alpha}} = e^{jw\kappa_1}, \tag{3.40}$$

где κ_1 *является положительным решением следующего уравнения*

$$\sigma\kappa_1\mathbf{r}\left\{\sigma\kappa_1\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N}\eta_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right\}^{-1}\mathbf{e}=\mathbf{r\Lambda e}. \tag{3.41}$$

Здесь вектор-строка $\mathbf{r}$ *– стационарное распределение вероятностей процесса* $m(t)$*, которое можем найти из системы уравнений*: $\mathbf{rQ}=0$, $\mathbf{re}=1$; $\mathbf{I}$ *– единичная матрица,* $\mathbf{e}$ *– единичный вектор-столбец*.

Теорема 3.3 определяет асимптотическое среднее значение κ_1 числа заявок на орбите в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками в предельном условии согласованно высокой интенсивности вызова заявок.

Теорема 3.4 *Пусть* $i(t)$ *– число заявок на орбите в RQ-системе* MMPP|M|1 *с разнотипными вызываемыми заявками, тогда в контексте теоремы 3.3 выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\alpha\to\infty} Me^{jw\left(\frac{i(t)-\alpha\kappa_1}{\sqrt{\alpha}}\right)} = e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2}, \tag{3.57}$$

где κ_1 *является решением уравнения* (3.41), *величина* κ_2 *определяется равенством*

$$\kappa_2=\frac{\sigma\kappa_1\mathbf{r}_0\mathbf{e}-\sigma\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0\mathbf{e}+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\mathbf{\Lambda e}}{\sigma\left(\mathbf{r}_0\mathbf{e}+\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0\mathbf{e}-\sum_{k=1}^{N}\mathbf{g}_k\mathbf{\Lambda e}\right)}. \tag{3.58}$$

Здесь векторы $\mathbf{g}_k$ и $\boldsymbol{\varphi}_k$ *определяются системами уравнений*

$$\begin{gathered}
\mathbf{g}_1=\left(\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0+\mathbf{r}_0\right)\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\\
\mathbf{g}_n=\eta_n\mathbf{g}_0\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\quad n=\overline{2,N},\\
\mathbf{g}_0\left(-\sum_{n=2}^{N}\eta_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}+\sigma\mu_1\kappa_1\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N}\mu_n\eta_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right)=\\
=\mathbf{r}_0-\mu_1\mathbf{r}_0\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\\
\sum_{k=0}^{N}\mathbf{g}_k\mathbf{e}=0.
\end{gathered} \tag{3.59}$$

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\varphi}_1=\left(\sigma\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0+\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda}-\sigma\kappa_1\mathbf{r}_0\right)\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\\
\boldsymbol{\varphi}_n=\left(\eta_n\boldsymbol{\varphi}_0+\mathbf{r}_n\mathbf{\Lambda}\right)\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\quad n=\overline{2,N},\\
\boldsymbol{\varphi}_0\left(-\sum_{n=2}^{N}\eta_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}+\sigma\kappa_1\mu_1\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N}\mu_n\eta_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right)=\\
=\sigma\kappa_1\mu_1\mathbf{r}_0\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}-\sum_{n=2}^{N}\mu_n\mathbf{r}_n\mathbf{\Lambda}\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},
\end{gathered}$$

$$\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\mathbf{e}=0\,. \tag{3.60}$$

Векторы $\mathbf{r}_k$, $k=\overline{0,N}$ *– векторы стационарного двумерного распределения вероятностей состояний прибора* k *и состояний* m *MMPP-потока определяются равенствами*

$$\mathbf{r}_1=\sigma\kappa_1\mathbf{r}_0\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}, \tag{3.48}$$

$$\mathbf{r}_n=\eta_n\mathbf{r}_0\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\ n=\overline{2,N}, \tag{3.49}$$

$$\mathbf{r}_0=\mathbf{r}\left\{\sigma\kappa_1\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N}\eta_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right\}^{-1}. \tag{3.50}$$

Здесь $\mathbf{r}_0$ не имеет вероятностного смысла и является вектором вспомогательных констант.

Предложенная модель RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемых заявок также исследована в предельном условии согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок. Согласованность длительностей обслуживания заключается в том, что параметры μ_n представляются в виде бесконечно малых величин одинаковой степени малости. Параметры системы представлены в виде $\mu_n=\mu\eta_n$, $n=\overline{2,N}$. В предложенных обозначениях предельное условие согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок имеет вид $\mu \to 0$. Характеристическая функция числа заявок на орбите в исследуемой системе в предельном условии $\mu \to 0$ получена в теореме 3.5, доказательство которой предложено в диссертационной работе.

Теорема 3.5 *Пусть* $i(t)$ *– число заявок на орбите в* RQ-*системе* MMPP|M|1 *с разнотипными вызываемыми заявками, тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\mu\to 0}Me^{jw\mu i(t)}=\frac{1}{v_1}\sum_{n=2}^{N}\frac{\alpha_n}{\eta_n-jw\rho\mu_1}\prod_{k=2}^{N}\left(1-jw\frac{\rho\mu_1}{\eta_k}\right)^{-\frac{\alpha_k}{\sigma(1-\rho)}}, \tag{3.77}$$

где

$$v_1=\sum_{n=2}^{N}\frac{\alpha_n}{\eta_n},\ \rho=\frac{\mathbf{r}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}}{\mu_1}. \tag{3.78}$$

Здесь вектор-строка $\mathbf{r}$ *– стационарное распределение вероятностей процесса* $m(t)$, *которое определяется системой*: $\mathbf{rQ}=0$, $\mathbf{re}=1$; $\mathbf{I}$ *– единичная матрица,* $\mathbf{e}$ *– единичный вектор-столбец.*

В параграфе 3.2.1 исследована RQ-система M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите в предельном условии большой задержки заявок на орбите в рассматриваемой системе является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ. Величины κ_1 и κ_2 определяются равенствами

$$\kappa_1=\frac{\lambda\left(\gamma_2(\lambda+\gamma_1)+\lambda\gamma_1+\gamma_0(\mu_1+\gamma_1)+\gamma_2(\mu_1+\gamma_1)\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{\alpha_n}{\mu_n}\right)}{\gamma_2\mu_1-\lambda(\gamma_1+\gamma_2)}. \tag{3.94}$$

$$\kappa_2=\kappa_1+\frac{\lambda}{\gamma_2\mu_1-\lambda(\gamma_1+\gamma_2)}\times\Bigg[\big(\gamma_2(\lambda+\gamma_1)+\gamma_1(\lambda+\mu_1+\gamma_1)\big)\frac{\lambda+\kappa_1}{\mu_1+\gamma_1}+$$
$$+\lambda\gamma_2(\mu_1+\gamma_1)\sum_{n=2}^{N}\frac{\alpha_n}{\mu_n^2}+\frac{\lambda}{\gamma_2}\big(\gamma_0(\mu_1+\gamma_1)+\gamma_1(\lambda+\kappa_1)\big)\Bigg]. \qquad (3.101)$$

Тандемная RQ-система с общей орбитой исследована в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите в параграфе 3.3.1. Асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ заявок на орбите также является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ. Величина κ_1 является решением следующего уравнения

$$\mathbf{r}\{\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I}_1\}\mathbf{e}=0. \qquad (3.108)$$

Здесь вектор стационарного распределения вероятностей состояний прибора **r** является решением системы уравнений

$$\mathbf{r}\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}=0,$$
$$\mathbf{re}=1. \qquad (3.109)$$

Величина κ_2 определяется уравнением

$$\kappa_2=\frac{\mathbf{g}\left(\mathbf{B}-\kappa_1\mathbf{I}_1\right)\mathbf{e}+\kappa_1\mathbf{rI}_1\mathbf{e}}{\mathbf{rI}_1\mathbf{e}}. \qquad (3.120)$$

Вектор **g** является решение системы уравнений

$$\mathbf{g}\left\{\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa_1\left(\mathbf{I}_0-\mathbf{I}_1\right)\right\}=\mathbf{r}\left(\kappa_2\mathbf{I}_0-\kappa_2\mathbf{I}_1-\mathbf{B}+\kappa_1\mathbf{I}_1\right),$$
$$\mathbf{ge}=0. \qquad (3.121)$$

Четвертая глава посвящена разработке метода асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите RQ-систем, представленных в диссертации. При таком предельном условии для распределения вероятностей числа заявок на орбите можно построить аппроксимацию данного распределения. Метод асимптотически-диффузионного анализа проводится в три этапа. На первом этапе находятся асимптотическое стационарное распределение вероятностей состояний прибора системы и функция $a(x)$, которая имеет смысл коэффициента переноса диффузионного процесса, определяющего асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. При реализации второго этапа асимптотического анализа находится функция $b(x)$ – коэффициент диффузии процесса, определяющий асимптотическое распределение вероятностей числа заявок на орбите. На третьем этапе с применением функций $a(x)$ и $b(x)$ реализуется метод асимптотически-диффузионного анализа, и находится непрерывное предельное распределение, на основе которого строится достаточно точная аппроксимация для допредельного дискретного распределения вероятностей состояний рассматриваемой RQ-системы.

В параграфах 4.1.1 и 4.1.2 реализован метод асимптотически-диффузионного анализа RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками.

Первый этап асимптотически-диффузионного анализа. В системе дифференциальных уравнений Колмогорова для характеристических функций, полученной во второй главе

$$\frac{\partial \mathbf{H}_0(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}_0(u,t)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \mathbf{I}\right) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \mathbf{H}_k(u,t) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0(u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}_1(u,t)\left(\mathbf{Q} + \left(e^{ju} - 1\right)\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}\right) + \mathbf{H}_0(u,t)\mathbf{\Lambda} - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_n(u,t)}{\partial t} = \left(\mathbf{Q} + \left(e^{ju} - 1\right)\mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I}\right) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u,t),\ n = \overline{2,N}. \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e} = \left(e^{ju} - 1\right)\left\{ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u,t)}{\partial u}\mathbf{e} + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{H}_k(u,t)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} \right\}, \tag{2.6}$$

введено обозначение $\sigma = \varepsilon$ и сделаны замены $\tau = \varepsilon t$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_k(u, t) = \mathbf{F}_k(w, \tau, \varepsilon)$, $k = \overline{0,N}$, записана система

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}_0(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \mathbf{I}\right) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \mathbf{F}_k(w,\tau,\varepsilon) + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}_1(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{Q} + \left(e^{jw\varepsilon} - 1\right)\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}\right) + \mathbf{F}_0(w,\tau,\varepsilon)\mathbf{\Lambda} - je^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_n(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}_n(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{Q} + \left(e^{jw\varepsilon} - 1\right)\mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I}\right) + \alpha_n \mathbf{F}_0(w,\tau,\varepsilon),\ n = \overline{2,N}, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_n(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\mathbf{e} = \left(e^{jw\varepsilon} - 1\right)\left(je^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{e} + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} \right). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1 *В рассматриваемой RQ-системе компоненты предельного при* $\varepsilon \to 0$ *вектора* $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x)$ *вероятностей состояний прибора и состояний цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-потоком, определяется системой*

$$\mathbf{r}_0\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N} \alpha_n \mathbf{I} - x\mathbf{I}\right) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \mathbf{r}_k = 0,$$

$$\mathbf{r}_1\left(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}\right) + \mathbf{r}_0\left(\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I}\right) = 0,$$

$$\mathbf{r}_n\left(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}\right) + \alpha_n \mathbf{r}_0 = 0,\ n = \overline{2,N}.$$

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbf{r}_k \mathbf{e} = 1. \tag{4.3}$$

Здесь $x = x(\tau)$ *является решением уравнения*

$$x'(\tau) = -x(\tau)\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}. \tag{4.4}$$

Решение системы уравнений (4.1)–(4.2) при $\varepsilon \to 0$ найдено в виде

$$\mathbf{F}_k(w, \tau) = e^{jwx(\tau)}\mathbf{r}_k,\ k = \overline{0,N}. \tag{4.7}$$

$x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ, которая определяет при $\varepsilon \to 0$ нормированное величиной $\varepsilon = \sigma$ среднее значение $\varepsilon i(\tau)$ – числа заявок на орбите. Равенство (4.4) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $x(\tau)$. Найдя решение $\mathbf{r}(x)$ системы (4.3), зависящее от x, подставив его в скалярное уравнение (4.4), обозначим

$$a(x) = -x\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\mathbf{\Lambda e}\,. \qquad (4.10)$$

Второй этап асимптотически-диффузионного анализа. Учитывая вид предельной характеристической функции $e^{jwx(\tau)}$ нормированного числа $\frac{1}{\sigma}i(\sigma t)$ из (4.7), в системе уравнений Колмогорова (2.5)–(2.6) сделаны замены

$$\mathbf{H}_k(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}\mathbf{H}_k^{(2)}(u,t),\ k = \overline{0,N}\,.$$

Учитывая обозначение (4.10), получена система уравнений для матричных функций $\mathbf{H}_k^{(2)}(u,t)$. Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ и выполнив замены $\tau = t\varepsilon^2$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_k^{(2)}(u,t) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)$, $k = \overline{0,N}$, $\mathbf{H}^{(2)}(u,t) = \sum_{k=0}^{N}\mathbf{H}_k^{(2)}(u,t) = \mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)$ в системе для функций $\mathbf{H}_k^{(2)}(u,t)$, запишем систему

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon wa(x)\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \left(x + \sum_{n=2}^{N}\alpha_n\right)\mathbf{I}\right) +$$
$$+ j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^{N}\mu_k\mathbf{F}_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon wa(x)\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{Q} + \left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}\right) +$$
$$+\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{\Lambda} + e^{-j\varepsilon w}x\mathbf{I}\right) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon wa(x)\mathbf{F}_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}_n^{(2)}(u,t)\left(\mathbf{Q} + \left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\mathbf{\Lambda} - \mu_n\mathbf{I}\right) +$$
$$+\alpha_n\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),\ n = \overline{2,N}\,, \qquad (4.13)$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{e} + j\varepsilon wa(x)\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\mathbf{e} = \left(e^{j\varepsilon w} - 1\right)\left\{-e^{-j\varepsilon w}x\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +\right.$$
$$\left.+e^{-j\varepsilon w}j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \left(\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) - \mathbf{F}_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\right)\mathbf{\Lambda}\right\}\mathbf{e}. \qquad (4.14)$$

Теорема 4.2 *Векторные функции* $\mathbf{F}_k^{(2)}(w,\tau)$ *имеют вид*

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w,\tau) = \Phi\left(w,\tau\right)\mathbf{r}_k(x),\ k = \overline{0,N}\,, \qquad (4.15)$$

где векторы $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(x)$ *определены системой (4.3) в теореме 4.1, а скалярная функция* $\Phi(w,\tau)$ *является решением уравнения*

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{\left(jw\right)^2}{2}\Phi(w,\tau)\,. \qquad (4.16)$$

Здесь функция $a(x)$ *определяется равенством* (4.10)*, а скалярная функция* $b(x)$ *имеет вид*

$$b(x) = a(x) + 2\left\{x\mathbf{r}_0\mathbf{e} + \left(\mathbf{g} - \mathbf{g}_0\right)\mathbf{\Lambda e} - x\mathbf{g}_0\mathbf{e}\right\}, \qquad (4.17)$$

где векторы $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3$ *и* $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k(x)$ *определяются системой уравнений*

$$\mathbf{g}_0\left(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-\left(x+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n\right)\mathbf{I}\right)+\sum_{k=1}^{N}\mu_k\mathbf{g}_k=a(x)\mathbf{r}_0,$$
$$\mathbf{g}_0\left(\mathbf{\Lambda}+x\mathbf{I}\right)+\mathbf{g}_1\left(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I}\right)=a(x)\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1\mathbf{\Lambda}+x\mathbf{r}_0,$$
$$\alpha_n\mathbf{g}_0+\mathbf{g}_n\left(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I}\right)=a(x)\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_n\mathbf{\Lambda},\ n=\overline{2,N},$$
$$\sum_{k=0}^{N}\mathbf{g}_k\mathbf{e}=0. \qquad (4.18)$$

Третий этап метода асимптотически-диффузионного анализа. В результате обозначения $\sigma = \varepsilon^2$ и замен $\tau = t\varepsilon^2$, $u = \varepsilon w$, $\mathbf{H}_k^{(1)}(u,t)=\mathbf{F}_k^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)$, $k=\overline{0,N}$ в системе уравнений для векторных функций $\mathbf{H}_k^{(1)}(u,t)$, имеем предельный при $\sigma \to 0$ случайный процесс $y(\tau)=\lim\limits_{\sigma\to 0}\sqrt{\sigma}\left\{i(\tau)-\dfrac{1}{\sigma}x(\tau)\right\}$, где $i(\tau)$ – число заявок на орбите.

Решение $\Phi(w, \tau)$ уравнения (4.16) определяет предельную при $\sigma \to 0$ характеристическую функцию центрированного и нормированного процесса $y(\tau)$ предельного числа $i(t)$ заявок на орбите. Выполнив в уравнении (4.16) обратное преобразование Фурье по переменной w, в диссертации получено уравнение, которое является уравнением Фоккера–Планка для плотности распределения вероятностей $P(y, \tau)$ значений центрированного и нормированного предельного числа заявок на орбите, а предельный случайный процесс $y(\tau)$ является диффузионным с коэффициентом переноса $a'(x)y$ и коэффициентом диффузии $b(x)$. Тогда диффузионный процесс $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения. Доказано следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Предельный при* $\sigma \to 0$ *случайный процесс*

$$y(\tau)=\lim_{\sigma\to 0}\sqrt{\sigma}\left\{i(\tau)-\frac{1}{\sigma}x(\tau)\right\}$$

является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau)=a'(x)yd\tau+\sqrt{b(x)}dw(\tau), \qquad (4.28)$$

зависящего от значений непрерывного параметра x.

Как указано выше, $\varepsilon=\sqrt{\sigma}$. Рассмотрен случайный процесс

$$z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y(\tau) \qquad (4.29)$$

и доказано следующее утверждение.

Лемма 4.2 *Случайный процесс* $z(\tau)$ *с точностью до бесконечно малых* $O(\varepsilon^2)$ *является решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dz(\tau)=a(z)d\tau+\sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \qquad (4.30)$$

Введена стационарная плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$, т. е. система функционирует в стационарном режиме, тогда

$$s(z,\tau)=s(z)=\frac{\partial P\left\{z(\tau)<z\right\}}{\partial z}.$$

Так как $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения (4.30), процесс является диффузионным с коэффициентом переноса $a(z)$ и коэффициентом диффузии $b(z)$, поэтому его стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ является решением уравнения Фоккера–Планка, которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Решая это дифференциальное уравнение, учитывая краевое условие $s(\infty) = 0$, получена плотность распределения вероятностей $s(z)$ нормированного числа заявок на орбите. Доказано следующее утверждение.

Теорема 4.3 *Стационарная плотность распределения вероятностей* $s(z)$ *случайного процесса* $z(\tau)$ *имеет вид*

$$s(z) = \frac{C}{b(z)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \tag{4.32}$$

где C – нормирующая константа.

В параграфах 4.2–4.3 проведено исследование RQ-системы с ненадежным прибором и тандемной RQ-системы с общей орбитой методом асимптотически-диффузионного анализа. Сформулированы теоремы и леммы, соответствующие аналогичным теоремам и леммам из параграфа 4.1.1. В результате установлено, что в каждом случае выражение для стационарной плотности распределения вероятностей $s(z)$ числа заявок на орбите имеет вид (4.32). Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ в этих выражениях вычисляются по формулам, соответствующим типу RQ-системы.

В **пятой главе** предложенным методом асимптотически-диффузионного анализа проведено исследование многолинейных систем с повторными вызовами двух типов: с гиперэкспоненциальным временем обслуживания и специальным обслуживанием заявок, – в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Для системы со специальным обслуживанием получено условие существования стационарного режима.

В результате применения метода асимптотически-диффузионного анализа для каждой модели получен диффузионный процесс, плотность распределения вероятности которого используется в качестве аппроксимации для распределения вероятностей числа заявок на орбите и числа занятых приборов в системе.

Для многолинейной RQ-системы $M|H_2|N$ с гиперэкспоненциальным временем обслуживания в теореме 5.1 получено распределение вероятностей состояний числа приборов n_1 и n_2, занятых на первой и второй фазах.

Теорема 5.1 *В рассматриваемой многолинейной RQ-системе* $M|H_2|N$ *компоненты* $R(n_1, n_2, x)$ *предельной при* $\varepsilon \to 0$ *матрицы* $\mathbf{R}(x)$ *вероятностей состояний* n_1 и n_2 *приборов определяются равенствами*

$$R(n_1,n_2,x) = \frac{\rho_1(x)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\rho_2(x)^{n_2}}{n_2!} R(0,0,x), \quad R(0,0,x) = 1 \Bigg/ \sum_{n_1+n_2 \le N}^{N} \frac{\rho_1(x)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{\rho_2(x)^{n_2}}{n_2!}. \tag{5.3}$$

Здесь

$$\rho_1(x) = q_1 \frac{(\lambda + x)}{\mu_1}, \qquad \rho_2(x) = q_2 \frac{(\lambda + x)}{\mu_2}, \tag{5.4}$$

$x = x(\tau)$ *является решением обыкновенного дифференциального уравнения*

$$x'(\tau) = \mathbf{R}(x)\left(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0\right)\mathbf{E}. \qquad (5.5)$$

Стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ числа заявок на орбите имеет вид (4.32), где коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ определяются равенствами

$$a(x) = \mathbf{R}(x)\left(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0\right)\mathbf{E}, \qquad (5.10)$$

$$b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}(x)\left[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0\right]\mathbf{e} + 2x\mathbf{R}(x)\mathbf{I}_0\mathbf{e}, \qquad (5.19)$$

где матрица $\mathbf{g}(x)$ определяется системой уравнений

$$\mathbf{g}(x)\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0\right)\right) = a(x)\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x)\left(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}\right),$$

$$\mathbf{g}(x)\mathbf{E} = 0. \qquad (5.20)$$

Для многолинейной RQ-системы M|M, M|N с двухфазным специальным обслуживанием найдено предельное при $\varepsilon \to 0$ распределение вероятностей того, что в рассматриваемой RQ-системе n_1 приборов заняты на первой, а n_2 приборов на второй фазах обслуживания. Данное распределение определяется компонентами $R(n_1, n_2, x)$ матрицы $\mathbf{R}(x)$, которая при выполнении условия нормировки $\mathbf{R}(x)\mathbf{E} = 1$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{R}(x)\left\{\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} - x(\tau)\left(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1\right)\right\} = 0. \qquad (5.48)$$

Для данной системы со специальным обслуживанием получено условие существования стационарного режима

$$\lambda < N\mu_2 \frac{(N-1)\mu_2 + \mu_1}{N\mu_2 + \mu_1}. \qquad (5.54)$$

Стационарная плотность распределения вероятностей $s(z)$ числа заявок на орбите имеет вид (4.32), где коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ определяются равенствами

$$a(x) = \mathbf{R}(x)\left(\lambda\mathbf{E}_1 - x(\tau)\mathbf{E}_2\right), \qquad (5.53)$$

$$b(x) = a(x) + 2\left[\lambda + x\right]\mathbf{g}(x)\mathbf{E}_1 + 2x\mathbf{R}(x)\mathbf{E}_2, \qquad (5.67)$$

где матрица $\mathbf{g}(x)$ с компонентами $g(n_1, n_2, x)$ при $n_1 + n_2 \le N$ определяется системой уравнений

$$\mathbf{g}(x)\left(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + x\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0\right)\right) = a(x)\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x)\left(x\mathbf{I}_1 - \lambda\mathbf{B}\right),$$

$$\mathbf{g}(x)\mathbf{E} = 0. \qquad (5.68)$$

В **шестой главе** представлен численный анализ области применимости асимптотических результатов, полученных в главах 1–5. Анализ произведен на основе вычисления расстояний Колмогорова между распределениями вероятностей, построенными на основе асимптотических аппроксимаций, и распределениями, полученными на основе реализации численных алгоритмов или имитационного моделирования. Если расстояние Колмогорова принимает значение не более 0.05, то аппроксимация считается приемлемой.

Представлено описание разработанных алгоритмов, реализующих численный анализ вероятностных характеристик потоков со случайным объемом поступающей информации и систем массового обслуживания с повторными вызовами, позволяющие находить характеристики исследуемых потоков и систем, а именно математическое ожидание и дисперсию; реализующие допредельное распределение, гауссовскую аппроксимацию объема информации, поступившего в исследуемых потоках при достаточно больших t, гауссовскую и диффузионную аппроксимации числа заявок на орбите в исследуемых системах с повторными вызовами различной конфигурации. Программное обеспечение для моделирования всех указанных моделей реализовано в системе MathCAD.

Точность аппроксимаций гауссовским распределением $F_{app}(s, t)$ допредельного распределения $F(s, t)$ для непуассоновских потоков оценивается как расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ между этими распределениями. В таблице 6.1 приведены значения расстояний $\Delta(t)$ при указанных значениях времени t. Полужирным в таблицах автореферата выделены те значения, при которых точность аппроксимации $\Delta(t) < 0.05$.

Таблица 6.1 – Расстояния Колмогорова $\Delta(t)$ между допредельным и асимптотическим распределениями

Тип потока	$t = 7$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 200$
Поток восстановления	0.077	0.053	**0.030**	**0.018**	**0.013**	**0.009**
MMPP	0.053	**0.041**	**0.026**	**0.016**	**0.012**	**0.008**
Полумарковский поток	0.065	0.052	**0.033**	**0.020**	**0.014**	**0.010**

Показано, что для достаточно больших значений времени t ($t > 200$) реализация численных алгоритмов нахождения допредельных распределений вероятностей объема информации, поступившего в заявках исследуемых потоков, становится практически невозможной, и в этом случае целесообразно применение асимптотических результатов.

Параграфы 6.2.1–6.2.5 посвящены описанию алгоритмов расчета характеристик функционирования RQ-систем на основе результатов глав 2–5, а также определению границ применимости аппроксимаций. Сравнивая асимптотическое распределение с результатами имитационного моделирования при различных значениях параметра, который фигурирует в предельном условии, определено, при каких значениях этого параметра асимптотическое распределение вероятностей достаточно близко к эмпирическому распределению вероятностей, полученному имитационным моделированием.

Точность диффузионной аппроксимации $P_{dif}(i)$, определяемой коэффициентами $a(x)$ и $b(x)$, которые соответствуют типу исследуемой RQ-системы, задается с помощью расстояния Колмогорова Δ_1. Оно показывает разницу между распределениями вероятностей $P_{im}(i)$, полученным с помощью имитационного моделирования и $P_{dif}(i)$. Для сравнения с гауссовскими аппроксимациями, полученными с помощью метода асимптотического анализа в различных предельных условиях, задано расстояние Колмогорова Δ_2.

Сравнивая точность диффузионной аппроксимации с точностью гауссовской аппроксимации в предельном условии $\sigma \to 0$, можно сделать вывод, что точность диффузионной аппроксимации превышает точность гауссовской аппроксимации кратно и даже на порядок для всех типов RQ-систем. При этом диффузионная аппроксимация имеет высокую точность для всех указанных в таблицах значений интенсивности обращения с орбиты σ и параметра загрузки ρ (таблица 6.4, 6.8, 6.12).

Таблица 6.4 – Расстояния Колмогорова при предельном условии $\sigma \to 0$ в RQ-системе MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

Δ_1 / Δ_2	σ = 10	σ = 5	σ = 3	σ = 1	σ = 0.5
ρ = 0.5	0.060	**0.029**	**0.022**	**0.019**	**0.016**
	0.189	0.135	0.116	0.075	**0.049**
ρ = 0.7	**0.025**	**0.022**	**0.021**	**0.018**	**0.013**
	0.259	0.201	0.167	0.099	0.079
ρ = 0.9	**0.016**	**0.016**	**0.013**	**0.011**	**0.006**
	0.344	0.256	0.222	0.163	0.101

Из данных, представленных в таблице 6.4 для RQ-систем MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками, можно сделать вывод, что точность обеих аппроксимаций растет с уменьшением параметра σ. Расстояние Колмогорова для диффузионной аппроксимации уменьшается с ростом загрузки системы ρ, тогда как для гауссовской аппроксимации оно увеличивается.

Таблица 6.8 – Расстояния Колмогорова для аппроксимаций $P_{dif}(i)$ и $P_{app}(t)$ числа заявок на орбите в тандемной RQ-системе с общей орбитой

Δ_1 / Δ_2	σ = 2	σ = 1.3	σ = 0.5	σ = 0.1	σ = 0.05	σ = 0.02
ρ = 0.5	0.061	**0.049**	**0.011**	**0.033**	**0.019**	**0.013**
	0.094	0.101	0.142	0.071	**0.034**	**0.022**
ρ = 0.6	**0.041**	**0.025**	**0.027**	**0.023**	**0.012**	**0.009**
	0.158	0.134	0.125	**0.049**	**0.039**	**0.024**
ρ = 0.8	**0.006**	**0.017**	**0.030**	**0.012**	**0.035**	**0.011**
	0.258	0.224	0.146	0.071	**0.036**	**0.031**
ρ = 0.9	**0.009**	**0.018**	**0.021**	**0.008**	**0.003**	**0.004**
	0.363	0.305	0.198	0.097	0.074	**0.049**

Аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на орбите в тандемной RQ-системе с общей орбитой, построенная с помощью асимптотически-диффузионного анализа, в 7,5 раз точнее, чем гауссовская аппроксимация, и может быть использована для $\sigma < 1.3$, при этом точность обеих аппроксимаций растет с уменьшением параметра σ, и диффузионная аппроксимация имеет высокую точность для всех значениях параметров σ и ρ, указанных в таблице.

Таблица 6.12 – Расстояния Колмогорова Δ_1 для диффузионной аппроксимации $P_{dif}(i)$ числа заявок на орбите в многолинейной RQ-системе M|M, M|N с двухфазным специальным обслуживанием

	σ = 2	σ = 1	σ = 0.5	σ = 0.2	σ = 0.1
ρ = 0.6	0.058	0.096	0.091	**0.040**	**0.014**
ρ = 0.7	0.084	0.081	**0.047**	**0.012**	**0.007**
ρ = 0.8	0.065	**0.040**	**0.015**	**0.004**	**0.003**
ρ = 0.9	**0.025**	**0.010**	**0.002**	**0.001**	**0.001**

Из значений, представленных в таблице 6.12 следует, что точность предлагаемых аппроксимации возрастает с уменьшением величины σ. Здесь же расстояние Колмогорова $\Delta \le 0.05$ для всех значений сетевых параметров σ и ρ правого нижнего угла таблицы. При $\rho = 0.9$ это неравенство выполняется при всех значениях $\sigma \le 1$, что говорит о широкой области применимости предлагаемой в аппроксимации $P_{dif}(i)$ числа i заявок на орбите для рассматриваемой RQ-системы.

В **заключении** сформулированы основные теоретические и практические результаты работы, а также делаются выводы о возможном применении полученных результатов.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, в том числе статьи в изданиях, входящих в Scopus:

1. Сонькин Д. М. Исследование циклической системы с обслуживанием до полного исчерпания методом «прогулок» // Д. М. Сонькин, А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2016. – № 4 (65). – С. 68–79. – DOI: 10.17212/1814-1196-2016-4-68-79. – 0.95 / 0.35 а.л.

2. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for retrial queue with two-way communication and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizyura // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2019. – Vol. 27, № 1. – P. 5–20. – DOI: 10.22363/2658-4670-2019-27-1-5-20. – 0.85 / 0.3 а.л.

3. Nazarov A. Slow Retrial Asymptotics for a Single Server Queue with Two-Way Communication and Markov Modulated Poisson Input / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul** // Journal of Systems Science and Systems Engineering. – 2019. – Vol. 28, № 2. – P. 181–193. – DOI: 10.1007/s11518-018-5404-6. (*Scopus*). – 1.3 / 0.45 а.л.

4. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите / А. А. Назаров, **С. В. Пауль,** О. Д. Лизюра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 48. – С. 13–20. – DOI: 10.17223/19988605/48/2. – 0.75 / 0.25 а.л.

Scopus: Nazarov A. A. Asymptotic analysis of retrial queue with n types of outgoing calls under low rate of retrials condition / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**, O. D. Lizura // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika. – 2019. – № 48. – P. 13–20. – DOI: 10.17223/19988605/48/2.

5. Moiseev A. Asymptotic Diffusion Analysis of Multi-Server Retrial Queue with Hyper-Exponential Service [Electronic resource] / A. Moiseev, A. Nazarov, **S. Paul** // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, № 4. – Article number 531. – 16 p. – URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/8/4/531 (access date: 30.06.2022). – DOI: 10.3390/math8040531. (*Scopus*). – 1.8 / 0.6 а.л.

6. Nazarov A. Diffusion Limit of Multi-Server Retrial Queue with Setup Time / A. Nazarov, A. Moiseev, T. Phung-Duc, **S. Paul //** Mathematics. – 2020. – Vol. 8, № 12. – Article number 2232. – 20 p. – URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/8/12/2232/htm (access date: 30.06.2022). – DOI: 10.3390/math8122232. (*Scopus*). – 2.25 / 0.75 а.л.

7. Nazarov A. A. Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**, O. D. Lizyura // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 49–61. – DOI: 10.22363/2658-4670-2020-28-1-49-61. – 0.65 / 0.2 а.л.

8. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, **С. В. Пауль,** О. Д. Лизюра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т 21, вып. 1. – С. 111–124. – 1.2 / 0.4 а.л.

Scopus: Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP|M|1 retrial queue with two-way communication and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura // Izvestiya of Saratov University. New Series. Series : Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2021. – Vol. 21, is. 1. – P. 111–124. – DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124.

9. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura // Global and Stochastic Analysis. – 2021. – Vol. 8, № 3 (Special Issue: Modern Stochastic Models and Problems of Actuarial Mathematics). – P. 143–149. (*Scopus*). – 0.6 / 0.2 а.л.

10. Назаров А. А. Исследование RQ-системы M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором методом асимптотически-диффузионного анализа / А. А. Назаров, **С. В. Пауль,** О. Д. Лизюра, К. С. Шульгина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – № 57. – С. 74–83. – DOI: 10.17223/19988605/57/8. – 0.75 / 0.2 а.л.

Scopus: Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Unreliable Server [Исследование RQ-системы M|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором методом асимптотически диффузионного анализа] / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**, O. D. Lizura, K. S. Shulgina // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika. – 2021. – № 57. – P. 74–83. – DOI: 10.17223/19988605/57/8.

11. Nazarov A. Diffusion Limit for Single-Server Retrial Queues with Renewal Input and Outgoing Calls [Electronic resource] / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, № 6. – Article number 948. – 14 p. – URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/10/6/948 (access date: 30.06.2022). – DOI: 10.3390/math10060948. (*Scopus*). – 1.5 / 0.35 а.л.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

12. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666411. Программа для имитации работы системы с повторными обращениями, разнотипными вызываемыми заявками и марковски модулированным входящим потоком / Назаров А. А., **Пауль С. В.**, Лизюра О. Д. ; правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный

исследовательский Томский государственный университет». Заявка № 2020665517; заявл. 02.12.2020; дата регистрации 09.12.2020. – 1 с.

13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020666439. Численная реализация алгоритма получения распределения вероятностей числа заявок на каждой орбите в циклической системе массового обслуживания с повторными вызовами / Назаров А. А., **Пауль С. В.**, Лизюра О. Д. ; правообладатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет». Заявка № 2020665512; заявл. 02.12.2020; дата регистрации 09.12.2020. – 1 с.

Статьи в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях, входящих в Scopus и / или Web of Science:

14. Nazarov A. Acymptotic analysis of markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrial condition / A. Nazarov, **S. Paul**, I. Gudkova // 31st European Conference on Modelling and Simulation (ECMS-2017) : proceedings. Budapest, Hungary, May 23–26, 2017. – Sbr.-Dudweiler, 2017. – P. 687–693. – DOI: 10.7148/2017-0687. (*Web of Science*). – 1 / 0.35 а.л.

15. Nazarov A. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul** // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 800 : 16th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2017). Kazan, Russia, September 29 – October 03, 2017. – P. 28–41. – DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_3. (*Scopus*). – 1.4 / 0.45 а.л.

16. **Paul S.** Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks / S. Paul, T. Phung-Duc // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912 : 17th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2018) and 12th Workshop on Retrial Queues and Related Topics (WRQ-2018). Tomsk, Russia, September 10–15, 2018. – P. 213–224. – DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_17. (*Scopus*). – 1.2 / 0.6 а.л.

17. Nazarov A. Unreliable single-server queue with two-way communication and retrials of blocked and interrupted calls for cognitive radio networks / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul** // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 919 : 21st International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2018). Moscow, Russia, September 17–21, 2018. – P. 276–287. – DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5_24. (*Scopus*). – 1.2 / 0.4 а.л.

18. Nazarov A. Single Server Queues with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109 : 18th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2019). Saratov, Russia, June 26–30, 2019. – P. 177–187. – DOI: 10.1007/978-3-030-33388-1_15. (*Scopus*). – 1.1 / 0.3 а.л.

19. Nazarov A. Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2019. – Vol. 11965 : 22nd International Conference on Distributed and Computer and Communication Networks (DCCN-2019). Moscow, Russia, September 23–27,

2019. – P. 207–222. – DOI: 10.1007/978-3-030-36614-8_16. (*Scopus*). – 1.6 / 0.4 а.л.

20. Nazarov A. Method of asymptotic diffusion analysis of queueing system M|M|N with feedback / A. Nazarov, **S. Paul**, E. Pavlova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2020. – Vol. 12023 : 25th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications (ASMTA-2019). Moscow, Russia, October 21–25, 2019. – P. 131-143. – DOI: 10.1007/978-3-030-62885-7_10. (*Scopus*). – 1.3 / 0.45 а.л.

21. Nazarov A. Diffusion Approximation for Multiserver Retrial Queue with Two-Way Communication / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizura // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2020. – Vol. 12563 : 23rd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2020). Moscow, Russia, September 14–18, 2020. – P. 567–578. – DOI: 10.1007/978-3-030-66471-8_43. (*Scopus*). – 1.2 / 0.3 а.л.

22. Nazarov A. Multi-level MMPP as a Model of Fractal Traffic / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // Communications in Computer and Information Science. – 2021. – Vol. 1391 : 19th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2020). Virtual, Online. December 02–05, 2020. – P. 61–77. – DOI: 10.1007/978-3-030-72247-0_5. (*Scopus*). – 1.2 / 0.2 а.л.

23. Nazarov A. Central Limit Theorem for an M/M/1/1 Retrial Queue with Unreliable Server and Two-Way Communication / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizura, K. Shulgina // Communications in Computer and Information Science. – 2021. – Vol. 1391 : 19th International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2020). Virtual, Online. December 02–05, 2020. – P. 120–130. – DOI: 10.1007/978-3-030-72247-0_9. (*Scopus*). – 1.1 / 0.25 а.л.

24. Nazarov A. Mathematical Model of Scheduler with Semi-Markov Input and Bandwidth Sharing Discipline / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // International Conference on Information Technology (ICIT-2021) : proceedings. Amman, Jordan, July 14–15, 2021. – Amman, 2021. – P. 494–498. – DOI: 10.1109/ICIT52682.2021.9491748. (*Scopus*). – 0.55 / 0.05 а.л.

25. Nazarov A. Scaling Limits of a Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, **S. Paul**, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – Vol. 13144 : 24th International Conference on Distributed and Computer and Communication Networks (DCCN-2021). Moscow, Russia, September 20–24, 2021. – P. 240–250. – DOI: 10.1007/978-3-030-92507-9_20. (*Scopus*). – 1.1 / 0.3 а.л.

26. Nazarov A. Analysis of Tandem Retrial Queue with Common Orbit and Poisson Arrival Process / A. Nazarov, **S Paul**, T. Phung-Duc, M. Morozova // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – Vol. 13104 : 17th European Performance Engineering Workshop (EPEW-2021) and the 26th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications (ASMTA-2021). Virtual, Online. December 13–14, 2021. – P. 441–456. – DOI: 10.1007/978-3-030-91825-5_27. (*Scopus*). – 1.2 / 0.3 а.л.

27. Nazarov A. Semi-markov Resource Flow as a Bit-Level Model of Traffic / A. Nazarov, A. Moiseev, I. Lapatin, **S. Paul**, O. Lizyura, P. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // Communications in Computer and Information Science. – 2022. – Vol. 1552 : 24th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN-2021). Virtual, Online. September 20–24, 2021. – P. 220–232. – DOI: 10.1007/978-3-030-97110-6_17. (*Scopus*). – 1.3 / 0.15 а.л.

Публикации в прочих научных изданиях:

28. **Лопухова (Пауль) С. В.** Исследование MMP-потока асимптотическим методом *m*-го порядка / С. В. Лопухова (Пауль) // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 71–76. – 0.4 а.л.

29. Назаров А. А. Исследование BSMP-потока / А. А. Назаров, **С. В. Лопухова (Пауль)** // Теория вероятностей и ее приложения : тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко. Москва, 26–30 июня 2012 г. – М., 2012. – С. 202. – 0.1 / 0.05 а.л.

30. **Пауль С. В.** Выходящий поток заявок в системе с прогулками / С. В. Пауль // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г. – Томск, 2015. – Ч. 1. – С. 157–162. – 0.4 а.л.

31. **Пауль С. В.** Исследование числа заявок в системе M|M|1|∞ с «прогулками» прибора / С. В. Пауль // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XX Всероссийской научно-практической конференции. Анжеро-Судженск, 28–29 апреля 2016 г. – Томск, 2016. – С. 101–103. – 0.2 а.л.

32. Назаров А. А. Исследование выходящего потока заявок в системе с прогулками прибора / А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. пос. Катунь, Алтайский край, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 102–107. – 0.4 / 0.2 а.л.

33. Nazarov A. Asymptotic Analysis of M/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication / A. Nazarov, **S. Paul** // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017) : материалы Двадцатой международной научной конференции. Москва, 25–29 сентября 2017 г. – М., 2017. – С. 575–582. – 0.6 / 0.3 а.л.

34. Назаров А. А. Исследование выходящего потока в RQ-системе M/M/1/1 с вызываемыми заявками / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин, **С. В. Пауль** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 03 октября 2017 г. – Томск, 2017. – Ч. 1. – С. 150–154. – 0.3 / 0.1 а.л.

35. Назаров А. А. Исследование RQ-системы MMPP/M/1/1 с вызываемыми заявками асимптотическим методом / А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Казань, 29 сентября – 03 октября 2017 г. – Томск, 2017. – Ч. 2. – С. 314–321. – 0.4 / 0.2 а.л.

36. **Paul S.** Retrial queueing model with two-way communication, unreliable server and resume of interrupted call for cognitive radio networks / S. Paul, T. Phung-Duc // 12th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics (WRQ-2018). Tomsk, Russia, September 10–15, 2018. – Tomsk, 2018. – P. 28–29. – 0.1 / 0.05 а.л.

37. **Пауль С. В.** Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок / С. В. Пауль, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 10–15 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 139–145. – 0.4 / 0.2 а.л.

38. Назаров А. А. Исследование RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и обслуживанием заново прерванных заявок / А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018) : материалы XXI Международной научной конференции. Москва, 17–21 сентября, 2018 г. – Москва, 2018. – С. 253–260. – 0.6 / 0.3 а.л.

39. Лизюра О. Д. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в условии предельно редких изменений состояний входящего потока / О. Д. Лизюра, А. А. Назаров, **С. В. Пауль** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. Т. 304 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Международной молодежной научной конференции. Томск, 23–25 мая 2019 г. – Томск, 2019. – С. 241–246. – 0.65 / 0.2 а.л.

40. Назаров А. А. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – Ч. 2. – С. 239–244. – 0.4 / 0.15 а.л.

41. Назаров А. А. RQ-система с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – Ч. 2. – С. 245–249. – 0.3 / 0.1 а.л.

42. Назаров А. А. Исследование RQ-системы M|M|1|1 с вызываемыми заявками методом асимптотически-диффузионного анализа / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, О. Д. Лизюра // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019) : материалы XXII Международной научной конференции. Москва, 23–27 сентября 2019 г. – Москва, 2019. – С. 148–155. – 0.6 / 0.2 а.л.

43. Морозова М. А. Модели телекоммуникационных систем связи в виде систем с повторными вызовами и вызываемыми заявками / М. А. Морозова, **С. В. Пауль**, А. А. Назаров // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. – Томск, 2020. – С. 277–284. – 0.9 / 0.3 а.л.

44. Шульгина К. С. Асимптотический анализ RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором / К. С. Шульгина, **С. В. Пауль** // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. – Томск, 2020. – С. 309–314. – 0.65 / 0.2 а.л.

45. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian Retrial Queue with Unreliable Server and Multiple Types of Outgoing Calls / A. Nazarov, **S. Paul**, O. Lizyura // Современные стохастические модели и проблемы актуарной математики : тезисы докладов конференции, Карши, Узбекистан, 25 сентября 2020 г. – Карши, 2020. – С. 40–41. – 0.2 / 0.05 а.л.

46. Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Multiserver Retrial Queue with Two-Way Communication / A. A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. V. Paul**, O. D. Lizyura // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2020) : материалы XXIII Международной научной конференции. Москва, 14–18 сентября 2020 г. – М., 2020. – С. 531–539. – 0.65 / 0.15 а.л.

47. Назаров А. А. Исследование циклической системы с повторными вызовами / А. А. Назаров, **С. В. Пауль**, П. Н. Ключникова // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2020) : материалы XXIII Международной научной конференции. Москва, 14–18 сентября 2020 г. – М., 2020. – С. 540–547. – 0.6 / 0.2 а.л.

48. Nazarov A. A. Asymptotic-Diffusion Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Renewal Input / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizyura // Пятая Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-5) : материалы конференции. Москва, 23–27 ноября 2020 г. – М., 2020. – С. 339–345. – 1.2 / 0.3 а.л.

49. Nazarov A. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and two-way communication under low rate of retrials condition / A. Nazarov, T. Phung-Duc, **S. Paul**, O. Lizyura, K. Shulgina // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020) : материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск, 02−05 декабря 2020 г. – Томск, 2021. – С. 99–104. – 0.4 / 0.1 а.л.

50. Nazarov A. A. Analysis of the Amount of Information in Semi-Markov Flow / A. A. Nazarov, A. N. Moiseev, I. L. Lapatin, **S. V. Paul**, O. D. Lizyura, P. V. Pristupa, X. Peng, L. Chen, B. Bai // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2021) : материалы XXIV Международной научной конференции. Москва, 20–24 сентября 2021 г. – М., 2021. – С. 143–147. – 0.35 / 0.05 а.л.

51. Nazarov A. A. Scaling limits of a tandem retrial queue with common orbit and Poisson arrival process / A. A. Nazarov, **S. V. Paul**, T. Phung-Duc, M. A. Morozova // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2021) : материалы XXIV Международной научной конференции. Москва, 20–24 сентября 2021 г. – М., 2021. – С. 315–321. – 0.5 / 0.1 а.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательства Томского государственного университета
Заказ № 7429 от «03» октября 2022 г. Тираж 100 экз.
г. Томск, Московский тр.8, тел. (3822) 53-15-28
publish.tsu.ru