Научная статья
УДК 532.5.013.2
doi: 10.17223/19988621/77/12

Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва

Ильдус Лутфурахманович Хабибуллин[1], Артур Альфирович Хисамов[2]

[1, 2] Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
[1] habibi.bsu@mail.ru
[2] khisamovartur@list.ru

Аннотация. Представлены результаты моделирования процесса нестационарной фильтрации жидкости в пласте, вскрытом скважиной, которая пересекается по всей толщине пласта вертикальной трещиной гидроразрыва. Используя метод интегральных преобразований Лапласа, построено аналитическое решение системы уравнений, описывающей фильтрацию жидкости в пласте и в трещине. На основе анализа полученных решений установлены основные характерные особенности исследуемого процесса фильтрации в системе пласт–трещина.
Ключевые слова: пласт, трещина гидроразрыва, нестационарная фильтрация, аналитическое решение, метод преобразований Лапласа, распределение давления, дебит скважины

Для цитирования: Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12

Original article

Modeling of unsteady filtration in a formation – hydraulic fracture system

Il’dus L. Khabibullin[1], Artur A. Khisamov[2]

[1, 2] Bashkir State University, Ufa, Russian Federation
[1] habibi.bsu@mail.ru
[2] khisamovartur@list.ru

Abstract. This paper presents the results of modeling of unsteady fluid filtration in the formation penetrated by a well, which intersects a vertical hydraulic fracture throughout the entire thickness of the formation. The model of a bilinear fluid flow in a formation –

vertical hydraulic fracture system is considered in the case when the horizontal extent of the formation is considered to be infinite, and the fracture is of a finite length. The bilinearity of the flow means that in the formation – fracture system there are two mutually perpendicular fluid flows: from the formation to the fracture and along the fracture to the well. The analytical solution to a system of equations describing fluid filtration in the formation and fracture is obtained using the Laplace transform method. Analyzing the derived solution, main characteristic features of the filtration in the formation – fracture system are determined.
Keywords: formation, hydraulic fracture, unsteady filtration, analytical solution, Laplace transform method, pressure distribution, well flow rate

For citation: Khabibullin, I.L., Khisamov, A.A. (2022) Modeling of unsteady filtration in a formation – hydraulic fracture system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12

Рассматривается модель билинейного потока флюида в системе пласт – вертикальная трещина гидравлического разрыва пласта, для случая, когда протяженность пласта по горизонтали считается бесконечной, а трещина имеет конечную длину. Билинейность потока означает, что в системе пласт–трещина реализуется два взаимно перпендикулярных потока флюида – из пласта в трещину и по трещине к скважине. Флюид из пласта в трещину поступает только через ее боковые поверхности, поток флюида через торцы трещины не учитывается вследствие его незначительности. Давление в трещине принимается равным его осредненному значению по ширине трещины. Эти приближения являются приемлемыми, поскольку длина и высота трещины намного больше, чем ее ширина. Аналогичные модели в случае трещины бесконечной длины рассмотрены в [1–6].

Область фильтрации является симметричной относительно осей x и y, поэтому при описании исследуемого процесса фильтрации можно рассматривать только одну четвертую часть этой области (рис. 1).

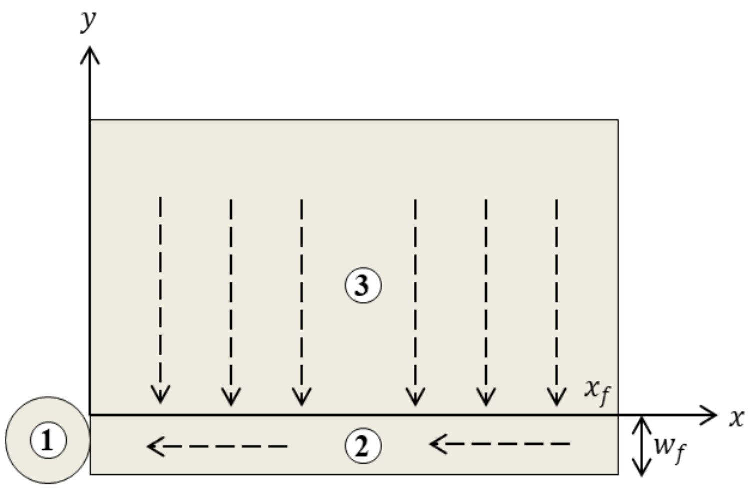

Рис. 1. Схема области течения (вид сверху): *1* – скважина, *2* – трещина, *3* – пласт
Fig. 1. Flow area diagram (top view): (*1*) well, (*2*) fracture, and (*3*) formation

Распределения давления в пласте P_r и трещине P_f описываются уравнениями [1–5]:

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = \varkappa_r \frac{\partial^2 P_r}{\partial y^2}, \quad 0 \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le \infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\varkappa_f}{w_f}\frac{k_r}{k_f}\frac{\partial P_r}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \quad 0 \le x \le x_f, \quad -w_f \le y \le 0. \tag{2}$$

Здесь t – время, индексы r и f относятся к пласту и трещине, $\varkappa$ – коэффициент пьезопроводности, k – проницаемость, w_f – полуширина трещины, x_f – полудлина трещины.

Второе слагаемое в правой части (2) описывает поток жидкости через боковую поверхность трещины.

Начальное распределение давления принимается в виде:

$$P_r(x, y, t = 0) = P_f(x, t = 0) = P_{0.}$$

На боковой поверхности трещины (плоскость раздела пласт–трещина) имеет место условие равенства давлений

$$P_r(x, y = 0, t) = P_f(x, t). \tag{3}$$

Также выполняются условия:

$$P_r(x, y = \infty, t) = P_0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial P_f\left(x = x_f, t\right)}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Принимается, что скважина эксплуатируется в режиме заданного дебита Q:

$$\frac{k_f h_r w_f}{\mu}\frac{\partial P_f(x = 0, t)}{\partial x} = Q. \tag{6}$$

Здесь μ – вязкость жидкости, h_r – толщина пласта, которая равна высоте трещины, т.е. трещина вскрывает пласт на всю толщу.

Введя безразмерные переменные

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P^*}, P^* = \frac{Q\mu}{k_r h_r}, \bar{y} = \frac{y}{x_f}, \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \bar{t} = t\frac{\varkappa_r}{x_f^2},$$

задачу (1)–(6) представим в виде:

$$\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = a\frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}}\bigg|_{\bar{y}=0}, \tag{8}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t} = 0) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 0, \tag{9}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 1)}{\partial \bar{x}} = 0, \tag{11}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = \infty, \bar{t}) = 0. \tag{12}$$

Здесь введены обозначения $a = \varkappa_f/\varkappa_r$, $b = a\left(k_r/k_f\right)\left(x_f/w_f\right)$, причем величина $\frac{a}{b} = \frac{k_f w_f}{k_r x_f}$ совпадает с безразмерной проводимостью трещины, широко используемой в литературе. Также отметим, что рассматриваемая модель позволяет исследовать процессы как закачки жидкости в пласт, так и отбора жидкости из пласта. Эти случаи отличаются знаком дебита Q в условии (6).

Для решения задачи (7)–(12) используем метод преобразований Лапласа по переменной $\bar{t}$:

$$\overline{P}(\bar{x},s)=L\left[\overline{P}(\bar{x},\bar{t})\right]=\int_0^\infty \overline{P}(\bar{x},\bar{t})\,e^{-s\bar{t}}d\bar{t}.$$

Здесь s – переменная преобразования Лапласа.

С учетом начальных условий (9) задача (7)–(12) в пространстве изображений Лапласа преобразуется к виду:

$$\frac{d^2\bar{P}_f}{d\bar{x}^2}+\frac{b}{a}\frac{d\bar{P}_r}{d\bar{y}}\bigg|_{\bar{y}=0}=\frac{s}{a}\bar{P}_f, \tag{13}$$

$$\frac{d\bar{P}_f(\bar{x}=0)}{d\bar{x}}=\frac{b}{a}\frac{1}{s}, \tag{14}$$

$$\frac{d\bar{P}_f(\bar{x}=1)}{d\bar{x}}=0, \tag{15}$$

$$\frac{d^2\bar{P}_r}{d\bar{y}^2}=s\bar{P}_r, \tag{16}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y}=0,s)=\bar{P}_f(\bar{x},s);\quad \bar{P}_r(\bar{y}\to\infty,s)=0. \tag{17}$$

Задача (13)–(17) решается стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение имеет вид:

$$\bar{P}_f(\bar{x},s)=-\frac{b}{a}\frac{1}{sf(s)}\frac{\mathrm{ch}[f(s)(1-\bar{x})]}{\mathrm{sh}[f(s)]},\qquad f(s)=\sqrt{\frac{s}{a}+\frac{b}{a}\sqrt{s}}. \tag{18}$$

Здесь ch и sh – символы гиперболических функций косинуса и синуса.

При известном $\bar{P}_f(\bar{x},s)$ по (18) распределение давления в пласте определяется из выражения

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y},s)=\bar{P}_f(\bar{x},s)e^{-\bar{y}\sqrt{s}}. \tag{19}$$

Рассмотрим нахождение оригинала в (18). Для этого данное выражение представим в виде двух сомножителей, зависящих от параметра s:

$$\bar{P}_f(x,s)=-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{s}L[V(x,t)], \tag{20}$$

здесь

$$L[V(\bar{x},\bar{t})]=\frac{1}{\sqrt{\frac{s}{b^2}+\sqrt{\frac{s}{b^2}}}}\frac{\mathrm{ch}\left[(1-\bar{x})\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{s}{b^2}+\sqrt{\frac{s}{b^2}}}\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{s}{b^2}+\sqrt{\frac{s}{b^2}}}\right]}. \tag{21}$$

На основе теоремы о подобии $f(at)\risingdotseq\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ [8] (здесь и далее функции $f(t)$ и $F(s)$ соответственно обозначают оригинал и изображение) выражение (21) можно записать в виде:

$$L[V(\bar{x},\bar{t}b^2)]\frac{1}{b^2}=\frac{1}{\sqrt{s+\sqrt{s}}}\frac{\mathrm{ch}\left[(1-\bar{x})\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s+\sqrt{s}}\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s+\sqrt{s}}\right]}. \tag{22}$$

Далее, используя правило преобразования Лапласа [8]

$$\frac{1}{s}F(s) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

выражение (20) представим в виде:

$$\bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\bar{t}} V(\bar{x},\tau)d\tau. \tag{23}$$

Данное выражение определяет распределение давления в трещине, при этом $V(\bar{x},\tau)$ находится из (22). Для нахождения этого оригинала используем следующее правило преобразования Лапласа [9]:

$$L^{-1}\left[F\left(s+\sqrt{s}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u}{(t-u)^{3/2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4(t-u)}\right)f(u)du,$$

здесь $f(t) = L^{-1}F(s)$, $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\frac{\operatorname{ch}\left[(1-\bar{x})\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}$.

Тогда

$$V(\bar{x},\bar{t}b^2)\frac{1}{b^2} = \\ = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}b}\int_0^{\bar{t}b^2}\frac{u}{(\bar{t}b^2-u)^{3/2}}\exp\left(-\frac{u^2}{4(\bar{t}b^2-u)}\right)\theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2}\middle|\frac{i\pi ua}{b^2}\right)du. \tag{24}$$

Здесь использовано следующее соотношение, связывающее изображение и оригинал [9]:

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{ch}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}(1-\bar{x})\sqrt{s}\right]}{\sqrt{s}\operatorname{sh}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}\right] = \frac{\sqrt{a}}{b}\theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2}\middle|\frac{i\pi\bar{t}a}{b^2}\right). \tag{25}$$

Тета-функция $\theta_0(v|\tau)$ выражается в виде ряда [9]

$$\theta_0(v|\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\exp\left(-\frac{i\pi}{\tau}\left(v-\frac{1}{2}+n\right)^2\right).$$

Таким образом, имеем

$$\theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2}\middle|\frac{i\pi\bar{t}a}{b^2}\right) = \frac{b}{\sqrt{\pi a\bar{t}}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\exp\left(-\frac{b^2(2n-\bar{x})^2}{4a\bar{t}}\right). \tag{26}$$

Подставляя (24) в (23) с учетом (26) находим

$$\boxed{\bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) = -\frac{b^2}{2\pi\sqrt{a}}\int_0^{\bar{t}}d\tau \times \\ \times\int_0^{\tau b^2}\exp\left(-\frac{u^2}{4(\tau b^2-u)}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{b^2(2n-\bar{x})^2}{4au}\right)\cdot\frac{\sqrt{u}du}{(\tau b^2-u)^{3/2}}.} \tag{27}$$

Изменяя в этом двойном интеграле порядок интегрирования и вычисляя интеграл по τ:

$$\int_{\frac{u}{b^2}}^{\bar{t}}\exp\left(-\frac{u^2}{(\tau b^2-u)}\right)\frac{d\tau}{(\tau b^2-u)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{ub^2}erfc\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right),$$

имеем

$$\bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{b^2\bar{t}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\exp\left(-\frac{b^2(2n-\bar{x})^2}{4au}\right)erfc\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\bar{t}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{u}}. \qquad (28)$$

Используя замену переменной $u = \rho^2 b^2 \bar{t}$, это выражение можно представить в виде:

$$\bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{1}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right)erfc\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right)d\rho. \qquad (29)$$

Переход к оригиналу в (19) реализуется по аналогичной методике. В результате получено

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{1}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right)erfc\left(\frac{\rho^2 b\bar{t}+\bar{y}}{2\sqrt{\bar{t}(1-\rho^2)}}\right)d\rho. \qquad (30)$$

Таким образом, решение задачи о нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва определяется выражениями (29) – (30).

Рассмотрим частные случаи, имеющие самостоятельный интерес.

При $n = 0$ из (29) следует выражение для давления в трещине бесконечной протяженности [5].

При $k_r = 0$ из (29) следует выражение, которое в размерном виде представляется формулой

$$P_f(x,t) = P_0 + \frac{Q\mu\sqrt{\varkappa_f t}}{k_f w_f h_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{\left(2nx_f-x\right)^2}{4\varkappa_f t}\right) - \sqrt{\pi}\frac{2nx_f-x}{2\sqrt{\varkappa_f t}}erfc\frac{2nx_f-x}{2\sqrt{\varkappa_f t}}\right].$$

Если в этом выражении все индексы f заменить на r, т.е. рассматривать только пласт, можно прийти к следующим частным случаям:

– плоскопараллельная фильтрация жидкости в пласте ограниченной галереей с заданным дебитом и непроницаемой поверхностью разлома;

– фильтрация жидкости из пласта в трещину бесконечной проводимости при отборе жидкости из скважины с заданным дебитом [1].

– при $n = 0$ приходим к формуле распределения давления в плоскопараллельном потоке в области $0 < x < \infty$ при заданном дебите на линии $x = 0$ [10].

При $\bar{x} = 0$ из (29) следует формула для давления на забое скважины от времени. Переходя к размерным величинам, эту формулу можно представить в виде:

$$P_f(0,t) = P_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{Q\sqrt{\mu}}{h_r}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{\sqrt{t}}{w_f\sqrt{k_f}}\int_0^1\left[\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2x_f^2\mu\beta}{k_f t\rho^2}\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\, erfc\left(\frac{\sqrt{tk_r}\rho^2}{\sqrt{\mu\beta}w_f 2\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right]d\rho. \qquad (31)$$

Данное выражение можно рассматривать как так называемую типовую кривую, которая определяет зависимость давления на забое скважины от времени и параметров фильтрующейся жидкости, пласта и трещины. Сопоставительный анализ типовой кривой с экспериментально определяемой в скважине кривой падения (восстановления) давления является методической основой определения параметров пласта и трещины при гидродинамических исследованиях скважин и пластов.

Используя закон Дарси, из (29) можно найти скорость фильтрации жидкости в трещине:

$$\bar{v} = -\frac{b}{\sqrt{\pi a}a\sqrt{t}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty}(2n-\bar{x})\exp\left(-\frac{(2n-\bar{x})^2}{4a\rho^2\bar{t}}\right)\cdot erfc\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Скорость фильтрации имеет значимость при теоретическом обосновании термометрических и трассерных методов исследований нефтяных пластов с трещинами гидроразрыва. Дело в том, что аналитические модели этих методов должны учитывать конвективный перенос соответствующих субстанций (тепла или трассера) в трещине. Интенсивность конвективного переноса, в свою очередь, определяется скоростью фильтрации в трещине.

Проанализируем некоторые результаты численных расчетов. Рассматривается отбор жидкости из пласта при следующих базовых значениях параметров: начальное давление пласта $P_0 = 200 \cdot 10^5$ Па, мощность пласта $h_r = 10$ м, дебит $Q = 10$ м^3/сут, ширина трещины $w_f = 5 \cdot 10^{-3}$ м, проницаемости пласта и трещины соответственно $k_r = 10^{-15}$ м^2, $k_f = 10^{-9}$ м^2, вязкость жидкости $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ Па · с, коэффициент упругоемкости $\beta = 10^{-9}$ Па$^{-1}$, полудлина трещины $x_f = 100$ м. При расчетах параметр n изменялся в пределах от –3 до 3, и этого оказалось вполне достаточно вследствие быстрой сходимости рядов, входящих в решение.

На рис. 2 показано изменение забойного давления со временем для трещин различной длины. Кривая *1* построена для трещины неограниченной протяженности (формула (29) при $n = 0$). Кривые *2* и *3* относятся к трещинам полудлиной 50 и 100 м соответственно. На забое скважины происходит падение давления, причем в фиксированный момент времени уменьшение давления больше в случае более коротких трещин.

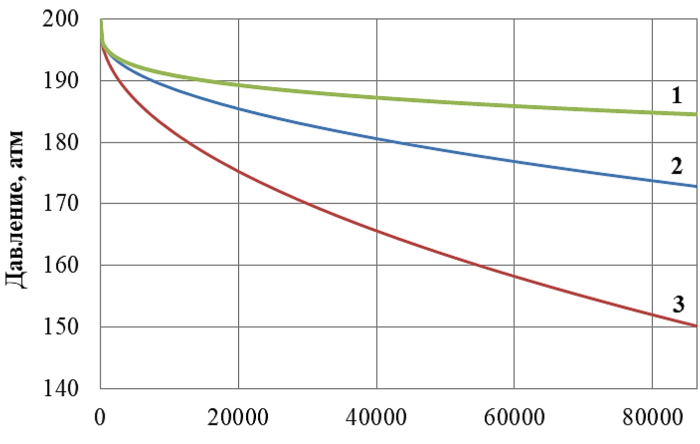

Рис. 2. Изменение давления на забое скважины со временем при различных длинах трещины: *1* – трещина бесконечной длины, *2*, *3* – трещина конечной длины, x_f составляет 100 и 50 м соответственно

Fig. 2. Pressure distribution at a downhole over time at different fracture lengths: (*1*) infinite length and (*2*), (*3*) finite length; x_f is equal to100 and 50 m, respectively

На рис. 3 и 4 показано изменение забойного давления в зависимости от проницаемостей трещины и пласта. Видно, что при увеличении проницаемости как трещины, так и пласта падение забойного давления уменьшается. Этот эффект наиболее заметно проявляется для пластов и трещин меньшей проницаемости.

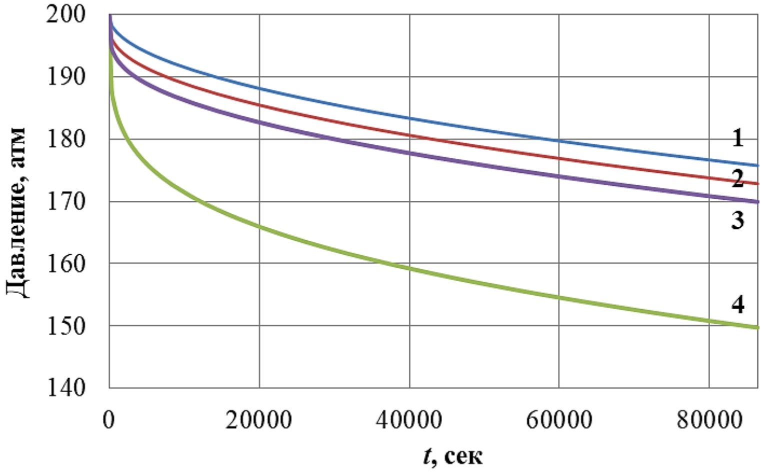

Рис. 3. Изменение давления на забое скважины со временем при различных проницаемостях трещины: *1* – $k_f = 10^{-8}$ м^2, *2* – $k_f = 10^{-9}$ м^2, *3* – $k_f = 5 \cdot 10^{-10}$ м^2, *4* – $k_f = 10^{-10}$ м^2

Fig. 3. Pressure distribution at a downhole over time at different fracture permeabilities: k_f = (*1*) 10^{-8} , (*2*) 10^{-9} , (*3*) $5 \cdot 10^{-10}$, and (*4*) 10^{-10} m^2

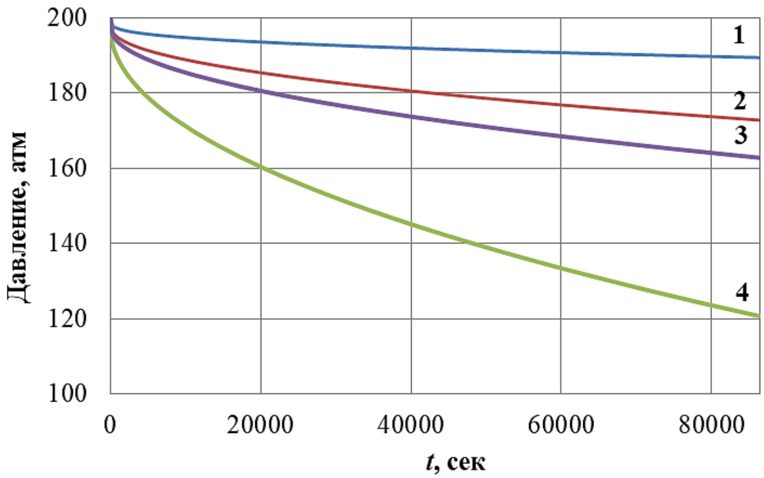

Рис. 4. Изменение давления на забое скважины со временем при различных проницаемостях пласта: *1* – $k_r = 10^{-14}$ м^2, *2* – $k_r = 10^{-15}$ м^2, *3* – $k_r = 5 \cdot 10^{-16}$ м^2, *4* – $k_r = 10^{-16}$ м^2, $x_f = 100$ м

Fig. 4. Pressure distribution at a downhole over time at different layer permeabilities: k_r = (*1*) 10^{-14} , (*2*) 10^{-15} , (*3*) $5 \cdot 10^{-16}$, and (*4*) 10^{-16} m^2; $x_f = 100$ m

Из рис. 5 видно, что с ростом дебита падение давления на забое скважины увеличивается. Зависимость дебита от разности забойного и пластового давлений является важнейшей технической характеристикой скважины, определяющей эффективность ее эксплуатации (так называемый коэффициент продуктивности скважины). Формула (31) позволяет провести анализ зависимости чувствительности этой характеристики от всего набора параметров пласта, трещины и флюида.

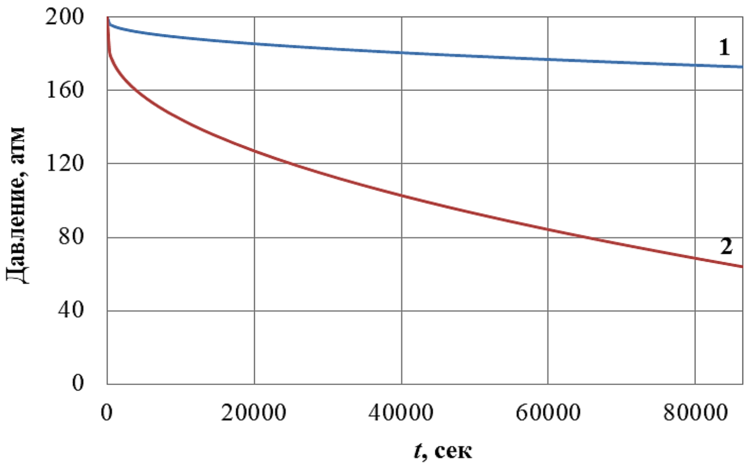

Рис. 5. Изменение забойного давления от времени при разных значениях дебита: *1* – $q = 10$ м^3/сут, *2* – $q = 50$ м^3/сут

Fig. 5. Pressure distribution at a downhole over time at different flow rates: $q =$ (*1*) 10 and (*2*) 50 m^3/day

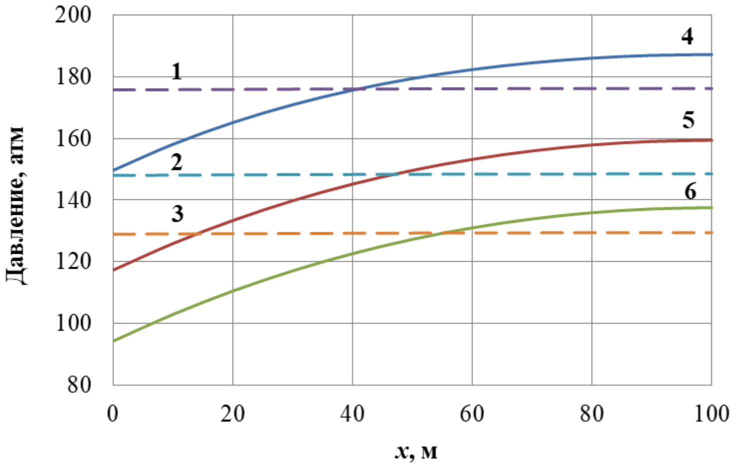

Рис. 6. Зависимость давления вдоль трещины при различных проницаемостях трещины (сплошные линии – $k_f = 10^{-10}$ м^2, штриховые линии – $k_f = 10^{-8}$ м^2): t = 1 сут (*1*, *4*), 5 сут (*2*, *5*), 10 сут (*3*, *6*)

Fig. 6. Pressure distribution along the fracture at various fracture permeabilities (the solid lines indicate $k_f = 10^{-10}$ m^2, the dashed lines indicate $k_f = 10^{-8}$ m^2): t = (*1*),(*4*) 1; (*2*),(*5*) 5, and (*3*),(*6*) 10 day(s)

Из рис. 6 (формула (29)) видно, что падение давления наблюдается по всей длине трещины, и это наиболее заметно в ближайшей окрестности скважины. Градиент давления вдоль трещины уменьшается, при $x = x_f$ (торец трещины) градиент равен нулю, что является следствием выполнения условия непроницаемости (условие (6)). При этом с уменьшением проницаемости падение давления в трещине растет. Как следует из рис. 6, при $k_f = 10^{-8}$ м^2 перепад давления в трещине составляет менее 1 атм. Это означает, что при принятых параметрах трещина имеет большую проводимость ($\frac{k_f w_f}{k_r x_f} = 500$), поэтому распределение давления вдоль трещины становится практически однородным и равным давлению на забое скважины (приближение так называемой трещины бесконечной проводимости).

В работе получены новые аналитические формулы теории фильтрации, описывающие распределение давления в системе пласт – вертикальная трещина гидроразрыва, когда скважина, пересекаемая трещиной, эксплуатируется в режиме заданного дебита. Эти формулы позволяют найти скорость фильтрации флюида в пласте и в трещине в зависимости от времени и от гидродинамических параметров, характеризующих рассматриваемый процесс. Выражение, определяющее зависимость давления в скважине от времени, может рассматриваться как типовая кривая и использоваться при реализации гидродинамических методов исследования пластов с трещинами гидроразрыва. Выражение для скорости фильтрации в трещине можно использовать при моделировании трассерных и термометрических методов исследований пластов, вскрытых трещинами гидроразрыва.

Список источников

1. *Каневская Р.Д.* Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М. : Недра-Бизнесцентр, 1999. 212 с.
2. *Cinco-Ley H., Samaniego-V. F.* Transient Pressure Analysis for Fractured Wells // J. Pet. Tech. 1981. V. 9. P. 1749–1766.
3. *Cinco-Ley H., Samaniego-V. F., Dominguez A.N.* Transient Pressure Behavior for a Well with a Finite-Conductivity Vertical Fracture // Soc. Pet. Eng. J. 1978. V. 18 (04). P. 253–264.
4. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 3. С. 319–329.
5. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 6–14.
6. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22, № 2. С. 309–313.
7. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. С. 958–963.
8. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. : Наука, 1971. 288 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи П.* Таблицы интегральных преобразований. М. : Наука, 1969. Т. 1.
10. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтегазовая гидромеханика. М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2005. 544 с.

References

1. Kanevskaya R.D. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdeniy nefti i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta* [Mathematical simulation of the oil and gas field development using a reservoir hydraulic fracture]. Moscow: Nedra.
2. Cinco-Ley H., Samaniego-V. F. (1981) Transient pressure analysis for fractured wells. *Journal of Petroleum Technology*. 33(9). pp. 1749–1766. DOI: 10.2118/7490-PA.
3. Cinco-Ley H., Samaniego-V. F., Dominguez A.N. (1978) Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture. *Society of Petroleum Engineers Journal*. 18(04). pp. 253–264. DOI: 10.2118/6014-PA.
4. Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh. (2017) Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(3). pp. 214–222.
5. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2019) Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture. *Fluid Dynamics*. 54. pp. 594–602. DOI: 10.1134/S0015462819050057.
6. Khabibullin I.L. Khisamov A.A. (2017) Modelirovanie nestatsionarnoy fil'tratsii vokrug skvazhiny s vertikal'noy treshchinoy gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration around the well with vertical hydraulic fracture]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta – Bulletin of Bashkir University*. 22(2). pp. 309–313.
7. Khabibullin I.L. Khisamov A.A. (2018) K teorii bilineynogo rezhima fil'tratsii v plastakh s treshchinami gidrorazryva [On the theory of bilinear flow regime in the layers with hydraulic fracturing cracks]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta – Bulletin of Bashkir University*. 23(4). pp. 958–963.
8. Dioch G. (1971) *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa* [Guide to a practical application of the Laplace transform]. Moscow: Nauka.
9. Beytmen G., Erdelyi P. (1969) *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy. T. 1* [Tables of integral transformations. Vol. 1]. Moscow: Nauka.
10. Basniev K.S., Dmitriev N.M., Kanevskaya R.D., Maksimov V.M. (2006) *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydrodynamics]. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.

***Сведения об авторах*:**

Хабибуллин Ильдус Лутфурахманович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной физики Башкирского государственного университета, Уфа, Россия. E-mail: habibi.bsu@mail.ru

Хисамов Артур Альфирович – аспирант кафедры прикладной физики Башкирского государственного университета, Уфа, Россия. E-mail: khisamovartur@list.ru

***Information about the authors*:**

Khabibullin Il'dus L. (Doctor of Physics and Mathematics, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: habibi.bsu@mail.ru

Khisamov Artur A. (Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: khisamovartur@list.ru

Статья поступила в редакцию 02.08.2021; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 02.08.2021; accepted for publication 19.05.2022