

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.65

doi: 10.17223/19988621/76/1

MSC 53Z30

Псевдоминимальные поверхности вращения**Михаил Степанович Бухтяк¹, Дмитрий Евгеньевич Есипов²**^{1,2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *bukhtyak@mail.ru*² *desipov@gmail.com*

Аннотация. Данная публикация продолжает серию работ М.С. Бухтяка о моделировании формы ортотропного упругого материала, принимающего равновесную форму внутри области, граница которой указана. М.С. Бухтяк в ряде публикаций 2016–2020 гг. предложил подход к построению модели, основанный на использовании поверхностей с постоянным отношением главных кривизн. Эти поверхности названы псевдоминимальными поверхностями. В указанный период доказана теорема существования, построена конечно-элементная модель. Условие, выделяющее класс псевдоминимальных поверхностей, примененное к линейчатым поверхностям, либо выполняется тождественно (тривиальные подклассы), либо выполняется вдоль семейства линий. Соответствующим классам линейчатых поверхностей дана исчерпывающая геометрическая характеристика. Дифференциальное уравнение в частных производных, задающее (в локальном смысле) класс псевдоминимальных поверхностей, весьма сложно для анализа, что делает актуальным вопрос о приближенных решениях. В предложенной работе рассматриваются псевдоминимальные поверхности вращения. Построение приближенных решений осложняется тем, что формальный полином Тейлора проявляет склонность расходиться. Тем не менее приближенные решения (разумеется, не идеальные) строятся.

Ключевые слова: поверхность вращения, меридиан, дифференциальное уравнение, расходящийся ряд, аппроксимация решения

Для цитирования: Бухтяк М.С., Есипов Д.Е. Псевдоминимальные поверхности вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 5–19. doi: 10.17223/19988621/76/1

Pseudo-minimal surfaces of revolution

Mikhail S. Bukhtyak¹, Dmitrii E. Yesipov²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bukhtyakm@mail.ru

² desipov@gmail.com

Abstract. This paper is a follow-up to the first author's series of works about shape modeling of orthotropic elastic material that takes the equilibrium form inside the area with the specified boundaries. M.S. Bukhtyak, in a number of his publications of 2016–2020, proposed an approach to the model building based on the application of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. These surfaces are named pseudo-minimal surfaces. The theorem of existence has been demonstrated and the finitely-element model has been built. The condition distinguishing the class of pseudo-minimal surfaces, as applied to ruled surfaces, is either satisfied identically (trivial subclasses) or is satisfied along a family of lines. The corresponding classes of ruled surfaces have been comprehensively characterized geometrically. A partial differential equation that defines (in the local sense) the class of pseudo-minimal surfaces is very complex for analysis, which makes it relevant to consider approximate solutions. The current paper considers the pseudo-minimal surfaces of revolution. Generation of the approximate solutions is complicated by the tendency of the formal Taylor polynomial to diverge. However, the approximate solutions (of course, not ideal) have been generated.

Keywords: surface of revolution, meridian, differential equation, diverging sequence, approximation of the solution

For citation: Bukhtyak, M.S., Yesipov, D.E. (2022) Pseudo-minimal surfaces of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 5–19. doi: 10.17223/19988621/76/1

Вступительные замечания

Отражающая поверхность орбитального рефлектора – трикотажное полотно из вольфрамовых либо молибденовых нитей, которому с помощью поддерживающих конструкций придают форму, по возможности близкую к вырезке из параболоида вращения. Описание реальной поверхности сетеполотна предполагает наличие модели поверхности тонкого упругого материала внутри некоторого ограничивающего контура. В случае изотропного материала подходящей моделью является минимальная поверхность (сумма главных кривизн равна нулю). Сетеполотно, однако, ортотропно (коэффициенты растяжения в двух ортогональных направлениях постоянны и неодинаковы). Для моделирования в случае ортотропности М.С. Бухтыком предложен класс поверхностей с постоянным отношением главных кривизн (они названы псевдоминимальными).

Ототропность сетеполотна как существенное его качество указано еще в 2011 г. А.П. Жуковым [1], хотя для зонтичного рефлектора он счел возможным ортотропностью пренебречь. Класс поверхностей с постоянным отношением главных кривизн отмечен С.Г. Гаспаряном [2] (со ссылкой на Пауля Штекера) как подкласс

изотермических поверхностей. Поверхность с постоянным отношением главных кривизн упомянута в монографии [3, с. 143] при описании формы деформированной пластины из (в основном) механических соображений. Следует отметить, что главные кривизны, входящие в классическое уравнение теплопроводности Лапласа (в трактовке А.И. Русанова [4]) подразумевают анизотропию поверхности по кривизне, и ее следует дополнить анизотропией по поверхностному натяжению.

Моделирование формы сетеполотна должно учитывать подверженность его так называемому «матрасному эффекту», который сопровождается раскрытие зонтика: прогиб ткани внутрь купола. Решение этой задачи для изотропного сетеполотна, прикрепленного к соседним ребрам осесимметричного рефлектора, предложено в [5]. В основу положены уравнения равновесия тонкой упругой оболочки. Работы М.С. Бухтяка 2016–2017 гг. призваны распространить моделирование на ортотропные материалы, а также на области, границы которых могут быть заранее не указаны. Это привело к понятию «псевдоминимальная поверхность» – попросту поверхность с постоянным отношением главных кривизн. Такое отношение выражается через экстремальные значения коэффициентов растяжения упругого материала в двух ортогональных направлениях (для ортотропного материала).

Первое применение указанной конструкции (в ограниченном смысле) – в работе [6], где, по примеру [5], давалась оценка формы сетеполотна лепестка осесимметричного рефлектора, но для ортотропного материала и путем построения поверхности, для которой условие псевдоминимальности выполнено вдоль линии симметрии (осевой линии) точно, а на лепестке в целом – приближенно.

Отметим, что алгоритм конечно-элементного моделирования псевдоминимальной поверхности разработан в [7]. Наконец, в [8] исследован вопрос о постоянстве отношения главных кривизн вдоль семейства линий линейчатой поверхности.

Пусть сетеполотно ортотропно, и коэффициент его растяжения в радиальном направлении равен $\text{коэфф}_{\text{рад}}$, а вдоль окружностей, ортогональных радиусам, – $\text{коэфф}_{\text{окр}}$. В статье [9] введен коэффициент ортотропности сетеполотна

$$a = \left(\frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2.$$

Таким образом, этот коэффициент вводился как существенно положительный.

В работе [10] определена псевдоминимальная поверхность веса a как гладкая поверхность, главные кривизны которой k_1 и k_2 связаны (в случае упорядоченности) соотношением

$$k_1 + ak_2 = 0 \text{ при } a = \text{const}.$$

Если отвлечься от первоначального смысла коэффициента a , то нет оснований связывать его условием положительности, приводящим к поверхности неположительной гауссовой кривизны. В данной работе мы считаем его произвольным вещественным числом.

Интерес к поверхностям вращения обусловлен (кроме прочего) тем вниманием, которое уделяется им в строительстве и архитектуре. Вполне адекватное суждение по этому вопросу можно получить благодаря монографии трех авторитетных специалистов [11]. Стоит отметить, что детальное описание частных классов поверхностей сопровождается основательными ссылками на источники сведений о применениях в строительстве и механике. В диссертации З.В. Беляевой [12]

детально прослеживаются особенности применения поверхностей вращения. О глубине проникновения геометрии поверхностей в архитектуру (хотя и косвенным образом) свидетельствуют [13–15]. Свойства линейчатых поверхностей, делающие эти поверхности привлекательными для строителя, обоснованы, например, в статье [16]. Локальную близость к поверхностям вращения можно обнаружить у поверхностей, рассмотренных в [17–19].

Авторы полагают, что характеристика ортотропных свойств упругого материала может иметь значение для конструкций, использующих поверхности вращения.

Все функции, рассматриваемые в данной работе, предполагаются имеющими класс гладкости, достаточный для корректности тех конструкций, где они применены.

1. Меридиан псевдоминимальной поверхности вращения. Аналитические решения

Рассмотрим поверхность вращения. Индивидуализация главных кривизн совершается естественным путем: k_1 – кривизна меридиана, k_2 – кривизна (с обратным знаком) параллели.

Пусть координатная ось Ox – ось вращения, и уравнения начального меридиана имеют вид:

$$z = 0, \quad y = y(x), \quad y(x) \in C^2.$$

Тогда

$$k_1 = \frac{\frac{d^2}{dx^2} y(x)}{\left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{-1}{y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}}.$$

Псевдосредняя кривизна, согласно [9], равна

$$H(y(x), a) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) y(x) - a \left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right). \quad (1)$$

Для отыскания псевдоминимальных поверхностей следует решить дифференциальное уравнение

$$H(y(x), a) = 0. \quad (2)$$

Исключая очевидно тривиальное решение, полагаем $a \neq 0$.

Уравнение искомого начального меридиана, таким образом, имеет вид:

$$U(y(x), a) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - \frac{a \left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)}{y(x)} = 0. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) определяется неявным образом уравнением

$$x - c_2 + y(x) \operatorname{hypergeom} \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2a} \right], \left[\frac{2a+1}{2a} \right], -iy(x)^{2a} c_1 (-1)^\Phi \right) i = 0,$$

$$\Phi = -\frac{1}{2} c \operatorname{sgn}(c_1 i) + \frac{1}{2} c \operatorname{sgn}(y(x)^{2a} i) + \frac{1}{2} c \operatorname{sgn}(y(x)^{2a} i) c \operatorname{sgn}(c_1 i).$$

Ясно, что такое задание бесполезно для инженерных целей.

Вернувшись к (3), видим, что при $a=1$ (изотропное сетеполотно) линии $y = y(x)$ суть цепные линии (что видно и без (3), поскольку, как отмечено выше, в этом случае имеем минимальную поверхность вращения – катеноид). Тем самым исчерпан вопрос о форме меридиана для изотропного упругого материала. Еще один класс решений мы получим, полагая $a = \frac{1}{2}$. Общее решение дает семейство парабол

$$y(x) = \frac{(1 + p_1^2)x^2}{4p_2} + p_1x + p_2, \quad p_2 \neq 0.$$

Очевидная подстановка $\frac{dy}{dx} = g(y)$ позволяет свести решение уравнения (3) к интегралу

$$x(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y^{2a} - 1}}. \quad (4)$$

Имеются два семейства значений параметра a , позволяющих решить уравнение (4) в элементарных функциях.

Первое семейство

Первое семейство получаем, полагая

$$a = \frac{1}{2s}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad s \neq 0.$$

Замена переменной

$$y = Y_s(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{c_1} \right)^{\frac{1}{2a}} = \left(\frac{t^2 + 1}{c_1} \right)^s$$

сводит задачу к вычислению интеграла

$$X_s(t) = 2c_1^{-s} s \int (t^2 + 1)^{s-1} dt + c_2.$$

Получаем для различных значений s параметрические задания линий

$$x = X_s(t), \quad y = Y_s(t).$$

В частности,

$$X_{-3} = -\frac{c_1^3 t}{(t^2 + 1)^3} - \frac{5c_1^3 t}{4(t^2 + 1)^2} - \frac{15}{8} \frac{c_1^3 t}{t^2 + 1} - \frac{15}{8} c_1^3 \arctan(t) + c_2, \quad Y_{-3} = \frac{c_1^3}{(t^2 + 1)^3},$$

$$X_{-2} = -\frac{c_1^2 t}{(t^2 + 1)^2} - \frac{3c_1^2 t}{2(t^2 + 1)} - \frac{3c_1^2}{2} \arctan(t) + c_2, \quad Y_{-2} = \frac{c_1^2}{(t^2 + 1)^2},$$

$$X_{-1} = -\frac{c_1 t}{t^2 + 1} - c_1 \arctan(t) + c_2, \quad Y_{-1} = \frac{c_1}{t^2 + 1}.$$

Полагая $c_1 = 1, c_2 = 0$, изобразим соответствующие линии (рис. 1).

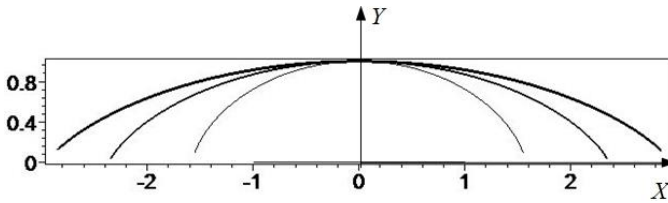


Рис. 1. Линии для значений s , равных $-1, -2, -3$ (снизу вверх)
Fig. 1. Lines for the values of s equal to $-1, -2,$ and -3 (from bottom to top)

Аналогично, для положительных значений параметра a

$$X_1 = \frac{2t}{c_1} + c_2, \quad Y_1 = \frac{t^2 + 1}{c_1},$$

$$X_2 = \frac{4t(t^2 + 3)}{3c_1^2} + c_2, \quad Y_2 = \frac{(t^2 + 1)^2}{c_1^2},$$

$$X_3 = \frac{2t(15 + 3t^4 + 10t^2)}{5c_1^3} + c_2, \quad Y_3 = \frac{(t^2 + 1)^3}{c_1^3}.$$

При тех же значениях констант $c_1 = 1, c_2 = 0$ получаем линии, изображенные на рис. 2.

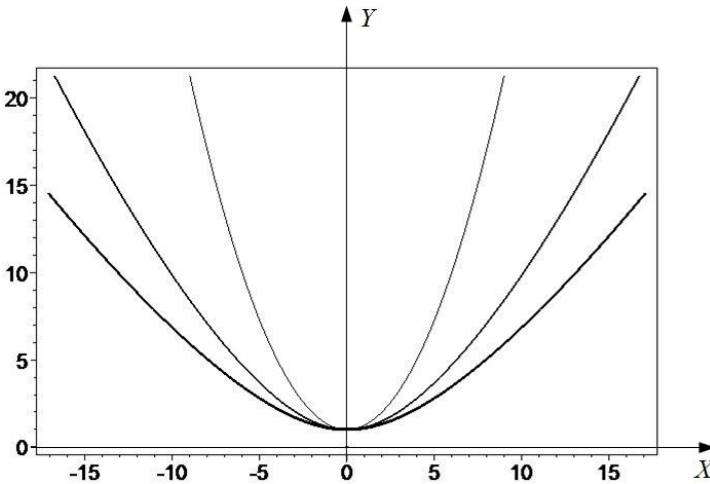


Рис. 2. Линии для значений s , равных $1, 2, 3$ (сверху вниз)
Fig. 2. Lines for the values of s equal to $1, 2,$ and 3 (from top to bottom)

Второе семейство

Еще одно счетное семейство получаем при

$$a = \frac{1}{2k + 1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Замена переменной в (4)

$$y = Y_k(z) = \left(\frac{1}{c_1 - z^2} \right)^{k + \frac{1}{2}}$$

позволяет находить, согласно (4),

$$X_k(z) = (2k + 1) \int (c_1 - z^2)^{-k-1} dz + c_2.$$

В частности,

$$X_{-3}(z) = -z^5 + \frac{10}{3}c_1z^3 - 5c_1^2z + c_2,$$

$$X_{-2}(z) = z^3 - 3c_1z + c_2, \quad X_{-1}(z) = -z + c_2,$$

$$X_0(z) = \left(\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{\sqrt{c_1}} \right) + c_2\sqrt{c_1} \right) \frac{1}{\sqrt{c_1}},$$

$$X_1(z) = -\frac{1}{2} \left(3z\sqrt{c_1} - 3\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{\sqrt{c_1}} \right) z^2 + 3\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{\sqrt{c_1}} \right) c_1 - 2c_2c_1^{\frac{3}{2}}z^2 + 2c_2c_1^{\frac{5}{2}} \right) \times \\ \times c_1^{-\frac{3}{2}} (z^2 - c_1)^{-1},$$

$$Y_{-3}(z) = (c_1 - z^2)^{\frac{5}{2}}, \quad Y_{-2}(z) = (c_1 - z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad Y_{-1}(z) = \sqrt{c_1 - z^2},$$

$$Y_0(z) = \frac{1}{\sqrt{-z^2 + c_1}}, \quad Y_1(z) = (c_1 - z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Полагая $c_1 = 1, c_2 = 0$, изобразим соответствующие линии (рис. 3).

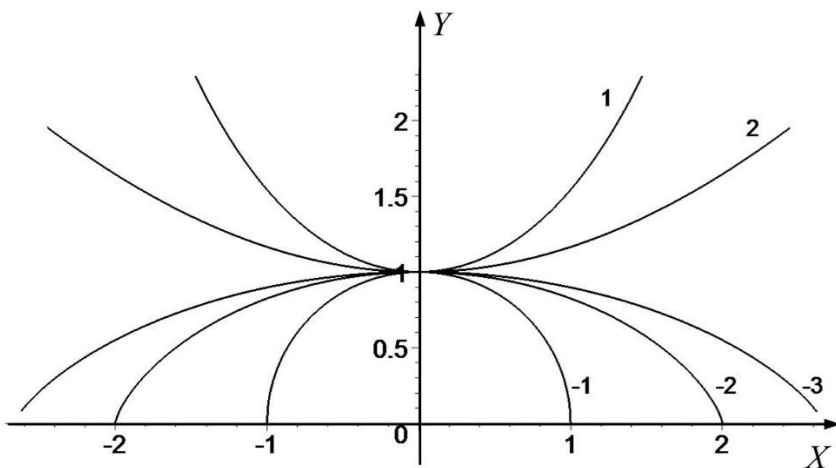


Рис. 3. Линии для значений с указанием значения параметра k

Fig. 3. Lines of the values indicating the parameter k

2. Полиномиальная аппроксимация

Уравнение (3) позволяет производную от искомой функции выразить через саму функцию и ее первую производную и, следовательно, построить для $y(x)$ формальный полином Тейлора. В частности, для начальных условий

$$y(0) = c, \quad y'(0) = 0$$

соответствующий полином восьмой степени имеет вид:

$$p_8(x) = c + \frac{ax^2}{2c} + \frac{a^2(2a-1)x^4}{24c^3} + \frac{a^3(2a-1)(8a-7)x^6}{720c^5} + \frac{a^4(2a-1)(-262a+127+136a^2)x^8}{40320c^7}. \quad (5)$$

Использовать полиномы (5) (и с иными степенями) можно лишь в очень ограниченных пределах. Если функция удовлетворяет уравнению (1), то она не имеет вещественных нулей. С полиномами вида (5) дело обстоит совсем не так. Указанные полиномы могут иметь пару вещественных нулей, симметричных относительно начала координат. Для положительных значений a и различных степеней n полинома укажем промежутки $[x_1, x_2]$, заключающий в себе положительный корень уравнения $p_n(x) = 0$

Для $p_4(x)$:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} a & \frac{1}{100} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{49}{100} \\ [x_1, x_2] & [37,38] & [17,18] & [12,13] & [11,12] & [10,11] & [12,13] & [37,38] & [16,17] & [35,36] \end{array} \right\|.$$

Для $p_8(x)$:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} a & \frac{1}{100} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{49}{100} \\ [x_1, x_2] & [25,26] & [11,12] & [8,9] & [7,8] & [6,7] & [5,6] & [6,7] & [16,17] & [8,9] \end{array} \right\|.$$

Для $p_{20}(x)$:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} a & \frac{51}{100} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{17}{20} & \frac{43}{50} & \frac{9}{100} & \frac{99}{100} \\ [x_1, x_2] & [4,5] & [3,4] & [3,4] & [3,4] & [3,4] & [3,4] & [3,4] \end{array} \right\|.$$

Полиномы, очевидно, если и пригодны для аппроксимации решения дифференциального уравнения (1), то «не слишком далеко» от начала координат, и чем выше степень полинома, тем пригодность меньше. Имеется и ограничение на параметр a . Определим невязку приближенного решения $f(x)$ уравнения (1) на интервале $(-\beta, \beta)$:

$$\varepsilon(f(x), a, \beta) = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\int_{-\beta}^{\beta} H(f(x), a)^2 dx}. \quad (6)$$

Для полинома четвертой степени при $\beta = 1.05$ графики зависимости невязки $\varepsilon(p_4(x), a, 1.05)$ от a представлены на рис. 4, 5.

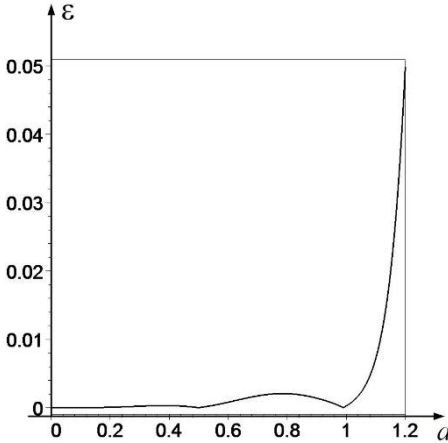


Рис. 4. График зависимости невязки $\varepsilon(p_4(x), a, 1.05)$ от a

Fig. 4. Dependency graph for residual $\varepsilon(p_4(x), a, 1.05)$ of a

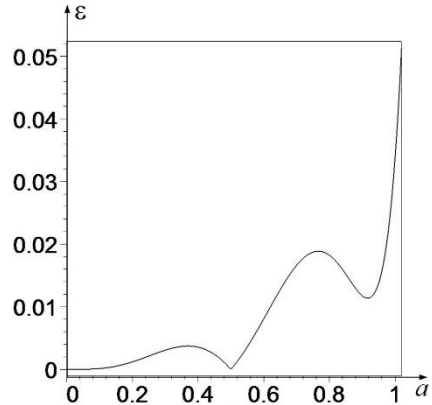


Рис. 5. График зависимости невязки $\varepsilon(p_6(x), a, 1.02)$ от a

Fig. 5. Dependency graph for residual $\varepsilon(p_8(x), a, 1.05)$ of a

Ясно, что аппроксимации вида (5) непригодны для значений x , больших единицы, и значений a – тоже заметно превосходящих единицу.

Рассмотрим полиномы вида (5). Список коэффициентов при четных степенях 0, 2, 4, 6, 8, 10 переменной x

$$P := [p_0(a, c), p_2(a, c), \dots, p_{10}(a, c)].$$

Здесь

$$p_0(a, c) = 1, \quad p_2(a, c) = \frac{a}{2c}, \quad p_4(a, c) = \frac{a^2(2a-1)}{24c^3}, \quad p_6(a, c) = \frac{a^3(2a-1)(8a-7)}{720c^5},$$

$$p_8(a, c) = \frac{a^4(2a-1)(136a^2 + 127 - 262a)}{40320c^7},$$

$$p_{10}(a, c) = \frac{a^5(2a-1)(12570a - 12168a^2 - 4369 + 3968a^3)}{3628800c^9},$$

$$p_{12}(a, c) = \frac{a^6(2a-1)(176896a^4 + 243649 - 884108a + 1216668a^2 - 753104a^3)}{479001600c^{11}} \dots$$

Представление о величинах вида (6) дают графики (рис. 6–9), где представлены линии, соединяющие точки

$$M(k, p_{2k}(A_j, C_i)).$$

Здесь

$$C = (0.75, 0.8, 0.8333, 1., 1.2, 1.4, 1.6, 2), \quad A = (0.8, 1, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.3).$$

Диаграммы коэффициентов для $c = C[i]$: по горизонтальной оси – номер k коэффициента полинома; по вертикальной оси – числовое значение коэффициента полинома при степени x , равной номеру параметра $A[i]$. Ломаные линии нумерованы индексом i . Номера снизу вверх.

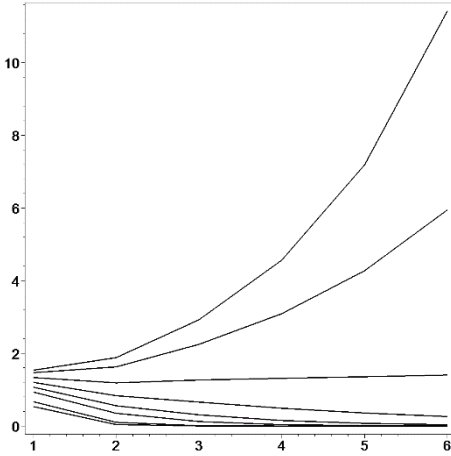


Рис. 6. Номер $i = 1$, $c = C_1$
Fig. 6. Number $i = 1$, $c = C_1$

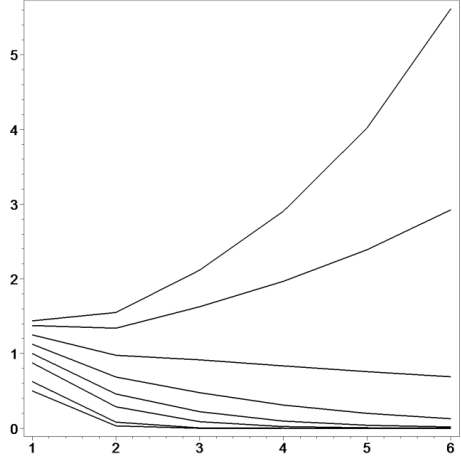


Рис. 7. Номер $i = 2$, $c = C_2$
Fig. 7. Number $i = 2$, $c = C_2$

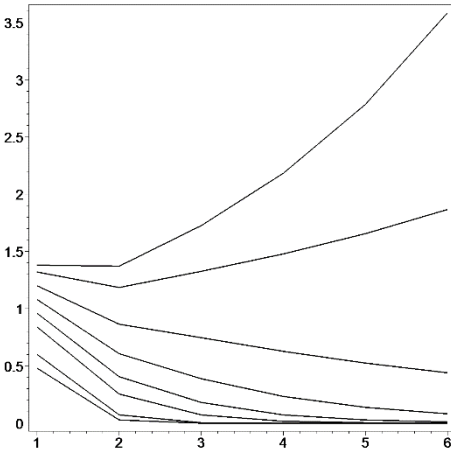


Рис. 8. Номер $i = 3$, $c = C_3$
Fig. 8. Number $i = 3$, $c = C_3$

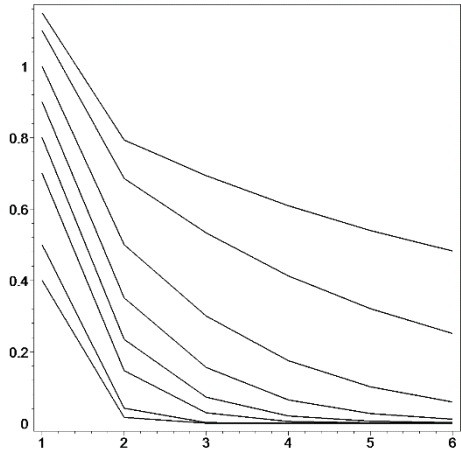


Рис. 9. Номер $i = 4$, $c = C_4$
Fig. 9. Number $i = 4$, $c = C_4$

Ясно, что при определенных сочетаниях параметров a и c коэффициенты полинома даже не убывают. Авторы не возьмется утверждать, что формальный ряд Тейлора для искомой функции расходится, поскольку не располагают формулой коэффициента общего члена $p_{2n}(a, c)$. Однако поведение этих величин для не слишком далеких номеров (авторы проверили до $n = 40$) вполне соответствует тенденции, проявленной на рис. 6–9.

3. Экспоненциальная аппроксимация

Видно, что при малых c (меньше единицы) и больших a (более единицы) полиномиальная аппроксимация непригодна. Авторы предприняли попытку построения приближения к решению уравнения (1) в виде функций вида:

$$f(x, a, b, p) = 1 + a \frac{x^2}{2} \exp(ax^b). \quad (7)$$

Параметры b и p подбирались из соображений согласованности с численным решением уравнения (7) при различных значениях параметра a (решение осложнено жесткостью уравнения [20]). На этом пути получены модели, описываемые табл. 1 и 2 и показанные на рис. 10, 11. Интегральная невязка вычислялась на промежутке $x \in [0, 2.3]$

Таблица 1

Параметры b и p , отвечающие значениям $a \leq 1$. Интегральная невязка

Номер i	a	b	p	Интегральная невязка
1	0.1	0	0	0.0044
2	0.2	0	0	0.0116
3	0.3	0	0	0.0152
4	0.4	0	0	0.0119
5	0.5	0	0	$0.39 \cdot 10^{-9}$
6	0.6	0.4	0.05	0.0128
7	0.7	0.8	0.0625	0.0259
8	0.8	1.0	0.0833	0.0384
9	0.9	1.45	0.0833	0.0318
10	1.0	1.64	0.10417	0.0234

Таблица 2

Параметры b и p , отвечающие значениям $a \leq 1$. Интегральная невязка вычислялась на промежутке $x \in [0, x_1]$.

Номер i	a	b	p	Правая граница x_1	Интегральная невязка
1	1.0	1.64	0.10417	2.0	0.037
2	1.1	1.81	0.11696	2.0	0.048
3	1.2	2.0	0.13158	2.0	0.069
4	1.3	2.3	0.13755	1.9	0.087
5	1.4	2.69	0.13812	1.7	0.081
6	1.5	2.70	0.17241	1.4	0.083
7	1.6	2.78	0.20833	1.2	0.089

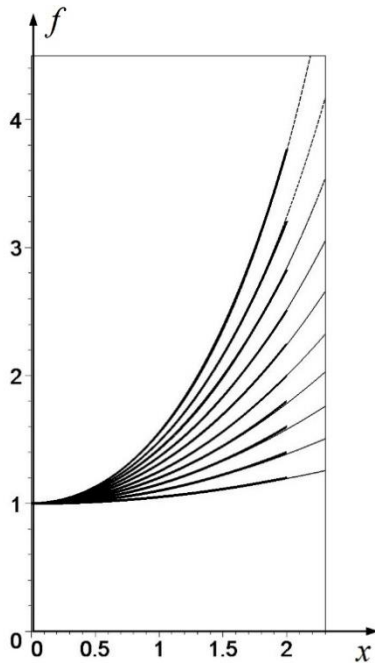


Рис. 10. Пунктирные линии – численные решения ОДУ для значений $a = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ (снизу вверх). Налагающиеся на них сплошные линии – имитационные модели
Fig. 10. The dotted lines are numerical solutions of the ODE for the values $a =$ to $0.1, 0.2, \dots, 1.0$ (from bottom to top). The superimposing unbroken lines are the simulation models

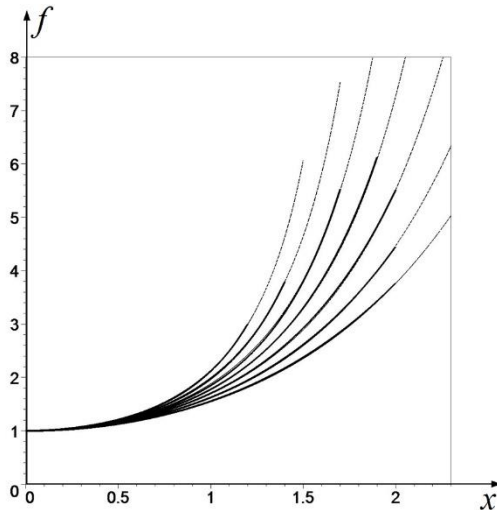


Рис. 11. Пунктирные линии – численные решения ОДУ для значений $a = 1.1, \dots, 1.6$ (снизу вверх). Налагающиеся на них сплошные линии – имитационные модели
Fig. 11. The dotted lines are numerical solutions of the ODE for the values $a =$ to $1.1, \dots, 1.6$ (from bottom to top). The superimposing unbroken lines are the simulation models

Заключение

Меридиан псевдоминимальной поверхности вращения определяется дифференциальным уравнением, неудобным и для точного решения (допустимые для этого значения параметра заключены в узкий интервал), и для приближенного (в виде полинома). Тем не менее некоторые модели, по-видимому, пригодны для приложений. Во всяком случае экспоненциальная аппроксимация (7) в известных границах работоспособна. Мы полагаем, что эти границы не слишком стеснительны для возможных инженерных приложений модели.

Авторы считают, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению понятия псевдоминимальности применительно к поверхностям вращения, и надеются на внимание к этому вопросу со стороны заинтересованных лиц.

Список источников

1. Жуков А.П. Реакция отражающей поверхности крупногабаритного рефлектора на действие возмущающего импульса // Вестник Томского университета. Математика и механика. 2011. № 4 (16). С. 101–109.
2. Гаспарян С.Г. О характеристической сети и ее свойствах // Доклады АН Армянской ССР. 1961. Т. XXXII, № 3. С. 101–109.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л. : ОНТИ НКТП, 1935. 672 с.
4. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2 (40). С. 5–17.
5. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М. : Радио и связь, 1987. 72 с.
6. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39, № 1. С. 97–106.
7. Бухтяк М.С. Конечно-элементная модель псевдоминимальной поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 5–16.
8. Бухтяк М.С. Псевдоминимальность и линейчатые поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 18–27.
9. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 5–24.
10. Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 5–24.
11. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. М. : Наука, 2006. 544 с.
12. Беляева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций : дис. ... канд. техн. наук. Екатеринбург, 2015. 175 с.
13. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Катеноидные оболочки // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 12. С. 7–13.
14. Кривошапко С.Н. Упрощенный критерий оптимальности для оболочек вращения // Приволжский научный журнал. 2019. № 4. С. 108–116.
15. Кривошапко С.Н. Псевдосферические оболочки // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 32–40.
16. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры // Academia Architecture and Consctuction. 2020. September. С. 149–160. doi: 10.22337/2077-9038

17. Кривошапко С.Н. Вантовые структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 9–22.
18. Кривошапко С.Н. Висячие тросовые конструкции и покрытия сооружений // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 7 (34). С. 51–70.
19. Кривошапко С.Н. Тентовая архитектура // Строительство и реконструкция. 2015. № 3 (59). С. 100–109.
20. Хайпер Э., Вайнер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 685 с.

References

1. Zhukov A.P. (2011) Reaktsiya otrazhayushchey poverkhnosti krupnogabarinogo reflektora na deystviye vozmushchayushchego impul'sa [Response of the reflecting surface of a large reflector to the action of a disturbing pulse]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(16). pp. 101–109.
2. Gasparyan S.G. (1961) O kharakteristicheskoy seti i eyë svoystvakh [On the characteristic net and its properties]. *Proceedings of Academy of Sciences of the Armenian SSR*. 32(3). pp. 101–109.
3. Love A. (1927) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
4. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepestka setepolotna [Defect of mapping for a deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17.
5. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertvyayemyye zerkal'nyye anteny zontichnogo tipa* [Deployable reflector umbrella-type antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
6. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical modeling of a metallic mesh deformation of the parabolic reflector. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461.
7. Bukhtyak M.S. (2017) Finite-element model of the pseudominimal surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 5–16.
8. Bukhtyak M.S. (2020) Pseudo-minimality and ruled surfaces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 18–27.
9. Bukhtyak M.S. (2017) Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotopic material construction. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24.
10. Bukhtyak M.S. (2017) A composite surface close to pseudo-minimal. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13.
11. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. (2006) *Analiticheskiye poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical surfaces: materials on geometry of 500 surfaces and information for strength calculation of thin shells]. Moscow: Nauka.
12. Belyayeva Z.V. (2015) *Geometricheskoye modelirovaniye prostranstvennykh konstruksiy* [Geometric modelling of spatial constructions]. Dissertation. Ural Federal University.
13. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2018) Katenoidnyye obolochki [Catenoidal envelopes]. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. (12). pp. 7–13.
14. Krivoshapko S.N. (2019) Uproshchënnnyy kriteriy optimal'nosti dlya obolochek vrashcheniya [A simplified criterion of optimality for envelopes of rotation]. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal*. (4). pp. 108–116.

15. Krivoshapko S.N. (2018) Pseudosfericheskiye obolochki [Pseudospherical envelopes]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* 76(2). pp. 32–40.
16. Mamiyeva I.A. (2020) Analiticheskiye poverkhnosti dlya parametricheskoy arkhitektury v sovremennykh zdaniyakh i sooruzheniyakh [Analytical surfaces for parametric architecture in modern buildings and erections]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo*. (1). pp. 150–165.
17. Krivoshapko S.N. (2016) Vantovyye struktury [Cable-stayed structures]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. (1). pp. 9–22.
18. Krivoshapko S.N. (2015) Visyachiye trosovyye konstruksii i pokrytiya sooruzheniy [Hanging cable structures and structure coverings]. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 7(34). pp. 51–70.
19. Krivoshapko S.N. (2015) Tentovaya arkhitektura [Tent architecture]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 59(3). pp. 100–109.
20. Hairer E., Wanner G. (1996) *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag.

Сведения об авторах:

Бухтяк Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Есипов Дмитрий Евгеньевич – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: desipov@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Bukhtyak Mikhail S. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Yesipov Dmitrii E. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: desipov@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 20.07.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 20.07.2021; accepted for publication 22.03.2022