

УДК 519.6
DOI 10.17223/19988621/75/3

MSC 41A60

Е.А. Молчанова

ВАРИАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, являющееся нулевым приближением краевой задачи на собственное значение, решается вариационным методом с целью получения приближенных формул для собственных значений. Применяется вариационное уравнение Галеркина при разных вариантах граничных условий. Получены приближенные формулы для анализа многопараметрической задачи. Исследованы зависимости меньших собственных значений от других параметров задач.

Ключевые слова: моделирование, спектральная задача, вариационные методы, формальное асимптотическое разложение, собственные значения, собственные функции.

Целью работы является приближенное решение спектральной задачи.

Задачи, описываемые системами дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, не имея точного решения, требуют применения методов приближенного анализа. Значительным упрощением исходного уравнения является близкое к нему уравнение более низкого порядка. Так, для уравнения с малым параметром μ при старшей производной, применяя асимптотический метод [1, 2], можно иметь решение, близкое к решению исходной задачи уже из задачи нулевого приближения, которое является частью формального асимптотического разложения

$$Hw = H_0 w_0 + \mu(H_0 w_1 + H_1 w_0) + \dots, \quad (1)$$

в котором

$$H_0 w_0 \equiv w_0^{IV} + 2q^2 f''(w_0)'' + q^4 (q^4 - \lambda_0 + f''^2) w_0. \quad (2)$$

Обыкновенное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка (2) является нулевым приближением задачи о колебании цилиндрических и близких к ним оболочек [3].

Исходная система имеет восьмой порядок и является системой дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение (2), являясь обыкновенным дифференциальным уравнением, имеет четвертый порядок и содержит несколько параметров. В частности, функция f определяет отклонение от прямолинейной образующей цилиндра, λ_0 – нулевое приближение параметра частоты, значение которого и является решением спектральной задачи. Как уравнение четвертого порядка уравнение (2) можно решать разными способами. При некотором соотношении параметров можно получить даже точные решения, которые, впрочем, могут иметь громоздкие выражения.

Имея ввиду получение явной формулы для собственных значений λ_0 , перейдем от задачи дифференциальной (2) к задаче вариационной. Однако соответствующих формул для функционала и его вариации в явном виде выписывать не будем, предполагая использование вариационного уравнения Галеркина [4–7].

В соответствии с этим умножим обе части (2) на функцию $w_0(x)$ и проинтегрируем по $x \in [0, l]$. Получим уравнение, выражающее вариационный принцип возможных перемещений

$$\int_0^l w_0 H_0 w_0 dx = 0. \quad (3)$$

Применяя в (3) к вычислению интеграла способ интегрирования по частям и решая полученное выражение относительно искомого параметра λ_0 , получим

$$\begin{aligned} \lambda_0 = q^4 + & \frac{(w_0^{IV} w_0 - w_0' w_0'') \Big|_0^l + \int_0^l w_0''^2 dx}{q^4 \int_0^l w_0^2 dx} + \\ & + \frac{\int_0^l (f'' w_0)'' w_0 dx - \int_0^l w_0'^2 dx + w_0 w_0' \Big|_0^l}{q^2 \int_0^l w_0^2 dx} + \frac{\int_0^l f''^2 w_0 dx}{\int_0^l w_0^2 dx}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для завершения вывода формул надо подставить в (4) функции $w_0(x)$ и $f(x)$. Функция $f(x)$ задается, а функция $w_0(x)$, являясь нулевым приближением исходной задачи, выбирается в известном смысле произвольно, но в соответствии с вариационным уравнением Галеркина обязательно должна удовлетворять граничным условиям. Для простоты далее считаем функцию $f(x)$ квадратичной, тогда вторая производная $f''(x) = \text{const}$.

Зададим, например, граничные условия

$$w_0(0) = w_0(l) = 0, \quad w_0'(0) = w_0'(l) = 0. \quad (5)$$

Выберем функцию $w_0(x) = \sin^2 n(\pi/l)x$, удовлетворяющую граничным условиям. Подставим $w_0(x)$ в выражение (4) и после вычисления входящих в него интегралов получим

$$\lambda_0 = q^4 + [(16/3)(n\pi/ql)^4 - (8/3)(f''/q^2(n\pi/l)^2 + f''^2)]. \quad (6)$$

Полученная формула является приближенной, так как выбранная функция $w_0(x)$, точно удовлетворяя граничным условиям, дифференциальному уравнению (2) удовлетворяет приближенно.

Аналогично для граничных условий $w_0(0) = w_0(l) = 0, w_0'(0) = w_0'(l) = 0$ при помощи функции получим $w_0(x) = \sin(\pi n/l)x + \sin(\pi n/2l)x$

$$\lambda_0 = q^4 + [(41/16)(\pi n/ql)^4 - (5/2)f''(\pi n/ql)^2 + f''^2]. \quad (7)$$

Для граничных условий $w_0(0) = w_0''(0) = w_0(l) = w_0''(l) = 0$, используя функцию $w_0(x) = \sin(\pi n/l)x$, получим

$$\lambda_0 = q^4 + [(\pi n/ql)^2 - f''^2]. \quad (8)$$

В отличие от предыдущих граничных условий принятая здесь собственная функция $w_0(0)$ точно удовлетворяет и граничным условиям, и дифференциальному уравнению (1). Если в полученных формулах положить $f'' = 0$, то будем иметь частотные параметры чисто цилиндрических оболочек. Формулы (6) – (8) удобны для анализа зависимости основного параметра λ_0 от параметра кривизны f'' и параметра волнообразования q . Дифференцируя (8) по f'' , получаем равенство $\partial\lambda_0/\partial f'' = 2[(\pi n/ql)^2 - f'']^2$, из которого определяются значения параметра $f'' = (\pi n/ql)^2$, такие, которые доставляют минимум λ_0 , а уравнение (2) приводится к известному балочному уравнению [3].

На рис. 1 изобразим две зависимости λ_0 от $f''(x)$ при фиксированных $q = 2$, $l = 3$ по формуле (8). Штрих-пунктирная кривая соответствует значению $n = 1$, сплошная – значению $n = 2$. Из рисунка видно, что обе кривые достигают минимума на одном и том же уровне $\lambda_0 = q^4$, обозначенном горизонтальной пунктирной линией.

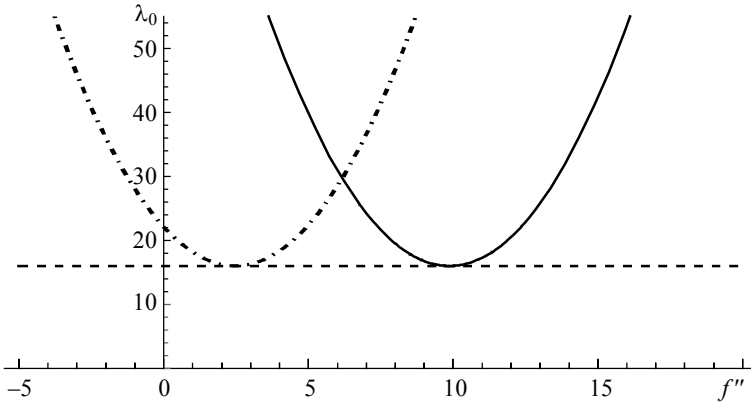


Рис. 1. График зависимостей собственного значения λ_0 от $f''(x)$ по формуле (8) при фиксированных значениях $q = 2$, $l = 3$

Fig. 1. Graph of dependencies of eigenvalues λ_0 with $f''(x)$ by formula (8) at fixed values $q = 2$, $l = 3$

Явные формулы (6) – (8) удобны для исследования зависимости λ_0 от параметров. Так, например, из формулы (6) можно установить значения (здесь постоянной) кривизны $f''(x)$, такие, при которых λ_0 достигает минимума

$$f_k'' = \frac{4}{3} \left(\frac{n\pi}{ql} \right)^2 \text{ и далее } \lambda_0 = q^4 + \frac{32}{9} \left(\frac{n\pi}{ql} \right)^4. \quad (9)$$

Подобные результаты можно получить менее наглядным путем прямо из (2). Действительно, продифференцируем (2) по $f''(x)$, полагая $w_0 = w_0(x, f'')$, $f''(x) = \text{const}$.

Так как полученная производная

$$\frac{\partial}{\partial f''} (H_0 w_0) = H_0 \frac{\partial w_0}{\partial f''} + \frac{\partial H_0}{\partial f''} w_0, \quad (10)$$

то условие существования минимума функции $\lambda_0(f'')$ выражается равенством

$$\int_0^l w_0 H_0 \frac{\partial w_0}{\partial f''} dx + \int_0^l w_0 \frac{\partial H_0}{\partial f''} w_0 dx = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial f''} = 0. \quad (11)$$

В силу самосопряженности оператора H_0 с граничными условиями (5) первый интеграл в (11) равен нулю. Тогда

$$\int_0^l w_0 \frac{\partial H_0}{\partial f''} w_0 dx = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial f''} = 0, \quad (12)$$

что равносильно уравнению

$$\int_0^l w_0 (w_0'' + q^2 f'' w_0) dx = 0. \quad (13)$$

Подставляя сюда выбранную функцию $w_0(x) = \sin^2(\pi/l)kx$, получаем снова, как в (9), значения $f''(x)$ и далее из (2) значения λ_0 .

На рис. 2 изобразим две зависимости λ_0 от $f''(x)$ по формуле (6) при фиксированных $q=2, l=3$. Штрих-пунктирная кривая соответствует значению $n=1$, сплошная – значению $n=2$. Из рисунка, так же, как и из формул (6), видно, что значение минимума λ_0 зависит от номера n , увеличиваясь с ростом n .

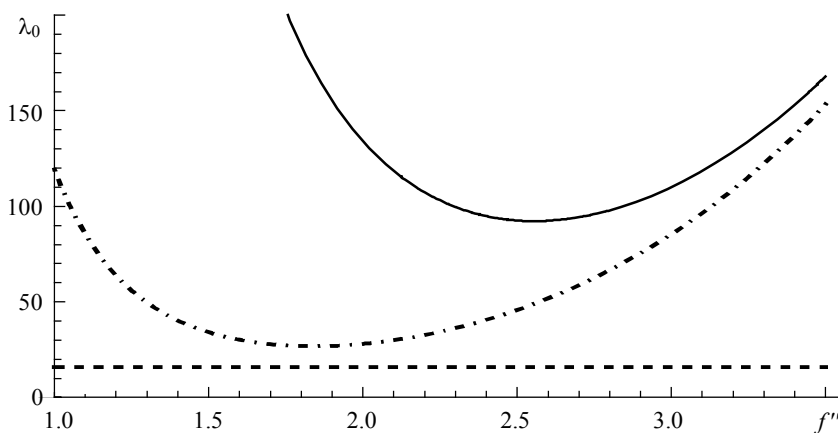


Рис. 2. График зависимостей собственного значения λ_0 от $f''(x)$ по формуле (6) при фиксированных значениях $q=2, l=3$

Fig. 2. Graph of dependencies of eigenvalues λ_0 with $f''(x)$ by formula (6) at fixed values $q=2, l=3$

Таким образом, имеем следующие результаты: из построения вариационной модели получены приближенные формулы для нулевого приближения собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Явные формулы являются удобным инструментом анализа многопараметрических зависимостей. В частности, дифференцируя по параметру, можно производить исследования на экстремум. При необходимости можно строить области изменения параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1. С. 137–182.
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский Б.В., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 176 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV. М.: Наука, 1974. 336 с.

Статья поступила 22.09.2021

Molchanova E.A. (2022) VARIATIONAL SIMULATION OF THE SPECTRAL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 33–37

DOI 10.17223/19988621/75/3

Keywords: simulation, spectral problem, variation methods, formal asymptotic decomposition, eigenvalues, eigenfunctions.

The ordinary fourth-order differential equation which is the zero approximation of the eigenvalue boundary problem is solved by the variational method to produce approximate formulas for eigenvalues. To obtain an explicit formula for eigenvalues, a transition is made from the differential problem to the variational problem in the Galerkin form. Calculating integrals in it gives a general formula for eigenvalues. The selection of functions satisfying certain boundary conditions yields approximate formulas suitable for the analysis of multiparameter dependencies. In particular, it is shown how the lowest eigenvalues are determined.

AMS Mathematical Subject Classification: 41A60

Evgeniya. A. MOLCHANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Khakas State University, Abakan, Russian Federation). E-mail: mevgen2001@mail.ru

REFERENCES

1. Gol'denveizer A.L. (1982) Asimptoticheskiy metod v teorii obolochek [The asymptotic method in the theory of shells]. *Uspekhi mekhaniki*. 5(1). pp. 137–182.
2. Fedoryuk M.V. (1983) *Asimptoticheskiye metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow: Nauka.
3. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. (1979) *Svobodnyye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells], Moscow: Nauka.
4. Mikhlin S.G. (1970) *Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
5. El'sgol'ts L.E. (1969) *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential equations and variational calculus]. Moscow: Nauka.
6. Tslaf L.Ya. (1966) *Variatsionnoye ischisleniye i integral'nyye uravneniya* [Variational calculus and integral equations]. Moscow: Nauka.
7. *A Course of Higher Mathematics. Vol. 4* (1964). Ed. by V.I. Smirnov. Elsevier.

Received: September 22, 2021