

Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

**Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия
и многомасштабное моделирование: современные
проблемы, приложения и проблемы истории**

**Материалы XIX Международной конференции,
посвященной 200-летию со дня рождения
академика П. Л. Чебышёва**

Тула, 18–22 мая 2021 года

Заметим, что в работе [1] утверждение следствия 1 доказано лишь для $p \leq 3$.

Наше следующее утверждение обобщает теорему 2.18 из [1].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть M — R -бимодуль, удовлетворяющий условию: если $a, b \in R$ таковы, что $aRb = 0$, то $aMb = 0$. Пусть $T = T(R, M)$ — тривиальное расширение кольца R с помощью M . Тогда равносильны следующие утверждения:

(1) R является GSC-кольцом; (2) T является GSC-кольцом.

Далее мы ограничимся случаем, когда R является полем, и докажем, что $S_p(R)$ — максимальное (по включению) GSC-подкольцо матричного кольца $M_p(R)$. Этот результат позволит также построить некоторые другие максимальные GSC-подкольца в кольце $M_p(R)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R — поле, p — натуральное число. Тогда $S_p(R)$ — максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$.

В следующем утверждении мы для данного разбиения $p_1, p_2, \dots, p_k$ натурального числа p отождествляем кольцо $M_{p_1}(R) \times M_{p_2}(R) \times \dots \times M_{p_k}(R)$ и подкольцо кольца $M_p(R)$, состоящее из матриц соответствующей блочно-диагональной структуры.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть R — поле, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — натуральные числа с суммой, равной p . Тогда $S_{p_1}(R) \times S_{p_2}(R) \times \dots \times S_{p_k}(R)$ — максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что если D — некоторое максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$, то для любой матрицы $C \in \text{GL}_p(R)$ CDC^{-1} — тоже максимальное GSC-подкольцо кольца $M_p(R)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рой Д., Субеди Т. Обобщенно полукоммутативные кольца // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Том 7(65), в.1. С. 91-103.
2. Генералов А. И., Зильберборд И. М. Заметка об обобщенно полукоммутативных кольцах // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А.Стеклова РАН. 2020. Том 492. С. 69-74.

УДК 512.541+512.552

О E -кольцах

М. Н. Зонов (Россия, г. Томск)

Томский государственный университет

e-mail: mat.zonov@yandex.ru

Е. А. Тимошенко (Россия, г. Томск)

Томский государственный университет

e-mail: tea471@mail.tsu.ru

On E -rings

M. N. Zonov (Russia, Tomsk)

Tomsk State University

e-mail: mat.zonov@yandex.ru

E. A. Timoshenko (Russia, Tomsk)

Tomsk State University

e-mail: tea471@mail.tsu.ru

Все встречающиеся в работе группы являются абелевыми.

Кольцо R называют E -кольцом, если каждый эндоморфизм аддитивной группы кольца R представляет собой умножение слева на некоторый элемент из R . Кольцо R называют *обобщённым E -кольцом*, если существует какой-либо кольцевой изоморфизм между R и кольцом эндоморфизмов аддитивной группы кольца R . Понятие E -кольца было введено Шульцем в работе [1]. Многие важные свойства E -колец установлены Боушеллом и Шульцем в [2]. Известно, что обобщённое E -кольцо является E -кольцом тогда и только тогда, когда оно коммутативно; для колец, имеющих конечный ранг без кручения, понятия E -кольца и обобщённого E -кольца совпадают.

Пусть n – неотрицательное целое число. Группу G называют *факторно делимой группой ранга n* , если её периодическая часть $T(G)$ редуцирована и существует свободная подгруппа $F \subset G$ ранга n такая, что G/F – делимая периодическая группа.

Естественно называть группу G произвольного ранга без кручения *обобщённой факторно делимой*, если её периодическая часть $T(G)$ редуцирована и сама группа G является расширением свободной группы с помощью делимой периодической группы.

Ранее авторами был построен пример E -кольца, аддитивная группа которого имеет ранг без кручения 2 и не является факторно делимой. Приведём необходимые и достаточные условия для того, чтобы аддитивная группа обобщённого E -кольца была обобщённой факторно делимой.

ТЕОРЕМА 1. *Если аддитивная группа обобщённого E -кольца имеет бесконечный ранг без кручения, то она является обобщённой факторно делимой.*

Через $N(R)$ будем обозначать наибольший нильпотентный идеал кольца R (такой идеал всегда существует, если R – кольцо без кручения конечного ранга).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть R – E -кольцо, имеющее периодическую часть T и конечный ненулевой ранг без кручения. Эквивалентны следующие условия:*

- 1) Аддитивная группа кольца R факторно делима.
- 2) Аддитивная группа кольца R/T факторно делима.
- 3) Аддитивная группа идеала $N(R/T)$ факторно делима.

Следующая теорема описывает все группы, которые могут служить аддитивными группами идеала $N(R/T)$ для E -кольца R , имеющего конечный ранг без кручения.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G – группа без кручения конечного ранга. Эквивалентны следующие условия:*

- 1) Существует E -кольцо R конечного ранга без кручения такое, что $G \cong N(R/T)$, где T есть периодическая часть кольца R .
- 2) Множество всех простых чисел p таких, что $pG = G$, бесконечно.

Из теорем 2 и 3 следует, что существует достаточно много E -колец, аддитивные группы которых имеют конечный ранг без кручения и не являются факторно делимыми.

Будем говорить, что кольца R и K *квазиизоморфны*, если существуют подкольца $R' \subset R$ и $K' \subset K$ и натуральные числа m и n такие, что $R' \cong K'$, $mR \subset R'$ и $nK \subset K'$.

Пусть R – произвольное E -кольцо. Обозначим через S множество всех простых чисел p таких, что p -компонента R_p аддитивной группы кольца R отлична от 0. Для всякого $p \in S$ существует кольцевое прямое разложение $R = R_p \oplus R'_p$, причём дополнительное слагаемое R'_p определено однозначно. Записав $r = r_p + r'_p$, где $r_p \in R_p$ и $r'_p \in R'_p$, можно задать кольцевой гомоморфизм

$$\xi: R \rightarrow \prod_{p \in S} R_p,$$

полагая $\xi(r) = (r_p)_{p \in S}$ для всех $r \in R$. Известно [1], что ядро гомоморфизма ξ представляет собой идеал без кручения

$$A = \bigcap_{p \in S} \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R,$$

а образ гомоморфизма ξ является E -кольцом. В работе Боушелла и Шульца [2] поставлена следующая проблема:

ЗАДАЧА 4. *Верно ли, что всякое E -кольцо R квазиизоморфно прямой сумме кольца $\xi(R)$ и некоторого E -кольца без кручения, содержащего идеал A ?*

Проблема была положительно решена Царёвым в работе [3] для E -колец, у которых ранг без кручения не превышает 2. Авторами было построено E -кольцо ранга без кручения 3, служащего контрпримером к вопросу Боушелла и Шульца.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 15, No. 1. P. 60-69.
2. Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. Vol. 228, No. 3. P. 197-214.
3. Царёв А. В. E -кольца малых рангов // Чебышевский сборник. 2017. Том 18, № 2. С. 235-244.
