

Национальный исследовательский  
Томский государственный университет

Механико-математический факультет  
Кафедра физической и вычислительной механики



## Материалы

XXII Всероссийской научной конференции  
с международным участием

"Сопряженные задачи механики реагирующих сред,  
информатики и экологии", посвященной 100-летию  
со дня рождения академика Н.Н. Яненко

12 – 14 октября 2021 г.  
г. Томск

## МНОГОМЕРНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРИБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ НА ТВЁРДОМ ТОПЛИВЕ

А.Е. Кирюшкин, Л.Л. Миньков

Национальный исследовательский Томский государственный университет  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36  
E-mail: sashakir94@mail.ru

**Введение.** Как правило, современные ракетные двигатели на твердом топливе (РДТТ) имеют заряды сложной формы, имеющие трехмерную либо осесимметричную геометрию. К типичным формам зарядов можно отнести: (а) наполнители, имеющие канал в форме звезды, (б) наполнители, имеющие наклонную кольцевую щель, (в) наполнители, содержащие свободные объемы для конструктивных элементов и пр. [1]. Течение газов внутри камеры сгорания может носить сложный характер: возможно образование вихревых структур, наличие пульсаций давления, застойных зон и пр. Изменение геометрии заряда приводит к газодинамической неустойчивости потока, возможному срыву течения и последующему интенсивному образованию крупномасштабных вихревых структур [2, 3].

Экспериментальное исследование процессов, происходящих в ракетных двигателях на твердом топливе (РДТТ), связано с определенными трудностями ввиду их скоротечности, высоких температур и давлений. В связи с чем методы математического моделирования являются неотъемлемой частью исследования подобных процессов.

На практике довольно часто встречаются ситуации, когда параметры РДТТ, полученные в результате натурных испытаний, заметно отличаются от прогнозируемых параметров. Попытки уточнить прогнозируемые характеристики за счет применения численных схем более высокого порядка, более мелких вычислительных сеток или уменьшения шагов интегрирования не всегда дают желаемый результат. В этих случаях к положительному результату приводит, как правило, построение математических моделей, учитывающих взаимное влияние процессов различной физической природы, которые формулируются в виде сопряженных задач [3].

Таким образом, разработка численных методов для решения сопряженных задач является актуальной задачей. В данной работе рассматривается численное решение сопряженной задачи определения параметров течения в камере сгорания совместно с изменением положения поверхности твердого топлива на примерах бесоплового РДТТ и РДТТ с двумя режимами тяги.

На данный момент в открытых источниках преобладают работы, учитывающие сложную геометрию заряда, но предполагающие либо

нульмерность, либо одномерность течения продуктов сгорания [3, 4]. Для некоторых конфигураций РДТТ такой подход может давать приемлемый результат, однако в общем случае проблематично адекватно описать сложные двумерные или трехмерные процессы течения с помощью нульмерного или одномерного приближения.

Для решения рассматриваемой задачи был разработан многомерный подход, который учитывает как многомерный характер течения, так и изменение положения горящей поверхности.

**Постановка задачи.** Течение продуктов сгорания в камере РДТТ описывается с помощью осесимметричных уравнений Эйлера:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = -\frac{\rho v}{y}, \quad (1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y = -\frac{\rho uv}{y}, \quad (2)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y = -\frac{\rho v^2}{y}, \quad (3)$$

$$(\rho E)_t + (\rho uH)_x + (\rho vH)_y = -\frac{\rho vH}{y}, \quad (4)$$

где  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $E$ ,  $H$  – плотность, осевая и радиальная составляющие скорости и давление соответственно,  $E = e + \frac{u^2 + v^2}{2}$  – полная энергия,  $e$

– внутренняя энергия,  $H = E + \frac{p}{\rho}$  – энтальпия.

Уравнения (1) – (4) замыкаются уравнением состояния идеального газа:

$$e = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (5)$$

Уравнения (1) – (5) рассматриваются в области  $\Omega(t)$ , изменяющейся со временем. В начальный момент времени значения всех параметров постоянны:

$$(p|_{t=0}, u|_{t=0}, v|_{t=0}, p|_{t=0}) = (\rho_0, 0, 0, p_0). \quad (6)$$

Для рассматриваемой задачи имеется 4 типа границы. На твердой стенке задается условие непротекания:

$$u_n = 0, \quad (7)$$

где  $u_n$  – нормальная составляющая скорости. На оси симметрии предполагаем равенство нулю радиальной составляющей скорости и равенство нулю радиальных производных от остальных параметров:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \quad (8)$$

На срезе сопла задается постоянное давление в случае дозвукового истечения:

$$p = p_{am}, \quad (9)$$

и не ставится никаких граничных условий при достижении потоком сверхзвуковой скорости. На поверхности горящего топлива задается массовый расход в соответствии со степенным законом и полная энтальпия продуктов сгорания, а также предполагается равенство нулю тангенциальной составляющей скорости:

$$\rho u_n = m_t p^v, \quad H = H_0, \quad u_\tau = 0, \quad (10)$$

где  $m_t$ ,  $v$  – константы степенного закона, а  $u_\tau$  – тангенциальная составляющая скорости.

**Методы решения.** Расчетная область  $\Omega(t)$  покрывается декартовой вычислительной сеткой с шагами  $h_x = h_y = h$ . Положение границы области  $\partial\Omega(t)$  отслеживается с помощью функции уровня  $\phi(x, y, t)$ , которая равна нулю на границе, отрицательна внутри области и положительна снаружи. Уравнение изменения положения для функции уровня записывается в виде:

$$\phi_t + u_{nb} |\nabla\phi| = 0, \quad (11)$$

где  $u_{nb}$  – нормальная составляющая движения поверхности. Нормальная скорость для точек, лежащих на поверхности топлива, равна:

$$u_{nb} = \frac{m_t p^v}{\rho_p}, \quad (12)$$

где  $\rho_p$  – плотность топлива.

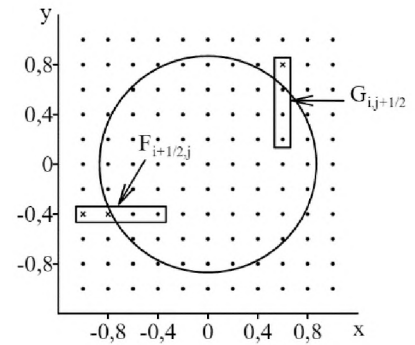
Запишем полудискретную схему для уравнений газовой динамики (1) – (5) в векторной форме:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}_{i,j}) = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}}{h_x} - \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}}{h_y} + \mathbf{S}_{i,j} \quad (13)$$

Для дискретизации уравнений (13) по времени используется многошаговая схема Рунге-Кутты, обладающая свойством уменьшения полной вариации, а численные значения потоков  $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$ ,  $\mathbf{G}_{i,j+1/2}$  находятся с помощью WENO реконструкции [5].

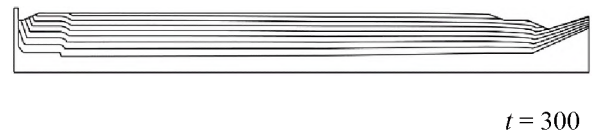
В общем случае для вычисления значений потоков  $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$  и  $\mathbf{G}_{i,j+1/2}$  используется шаблон, который помимо узла  $(i, j)$  также включает в себя  $l$  узлов слева и  $r$  узлов справа для потока  $\mathbf{F}$  и  $b$  узлов снизу и  $t$  узлов сверху для потока  $\mathbf{G}$ . При расчете

потоков рядом с границей часть узлов шаблона может выходить за расчетную область (рис. 1). Такие узлы будем называть фиктивными. Значения в таких точках вычисляются с помощью обратной процедуры Лакса-Вендроффа, которая позволяет рассчитывать значения параметров в фиктивных узлах с произвольным порядком точности [6], учитывая как распределение параметров внутри области, так и граничные условия.

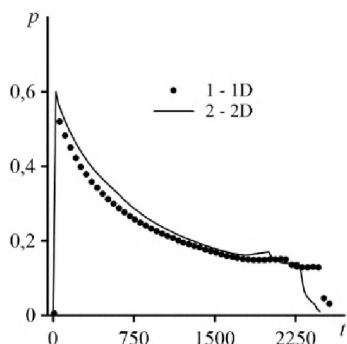


Для ускорения расчетов разработанный алгоритм был распараллелен на графических процессорах с использованием технологии CUDA, что позволило значительно повысить производительность и достичь приемлемых времен расчета порядка одного часа.

**Результаты расчетов.** В качестве первого примера рассмотрим бесопловой РДТТ, изменение положения поверхности горения топлива которого изображено на рис. 2. Из рисунка видно, что скорость горения существенно меняется вдоль оси канала. Небольшим изменениям положения горячей поверхности рядом с выходным сечением соответствуют значительные толщины прогара твердого топлива рядом с торцом двигателя.

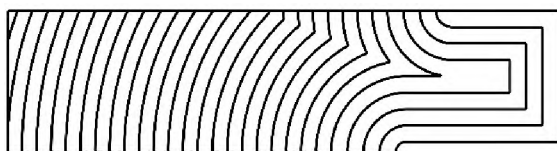


На рис. 3 представлено сравнение результатов для квазиодномерного и разработанного подходов. Расчеты для разработанного подхода производились на сетке 2800x390 узлов. Относительная погрешность в результатах составляет 20% в метрике  $L_2$ . Такая разница, по-видимому, вызвана тем, что квазиодномерный подход не позволяет в полной мере учесть двумерный характер течения в камере сгорания.



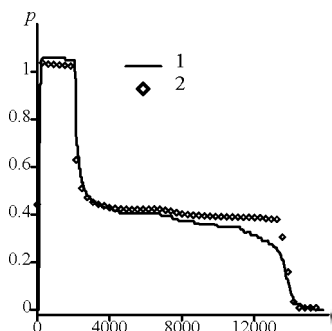
1 – квазиодномерный подход, 2 – двумерный подход

В качестве второго примера рассмотрим РДТТ с двумя режимами тяги из работы [7], изменение положения поверхности топлива которого изображено на рис. 4.



Шаг по времени  $\Delta t = 500$

На рис. 5 представлено сравнение результатов эксперимента из работы [7] и разработанного подхода. Расчеты производились на сетке 1600x400 узлов. Из результатов видно хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных: расчеты корректно воспроизводят переход от одного ко второму режиму тяги, а также окончание работы двигателя.



**Заключение.** Для решения сопряженной задачи моделирования внутрикамерных процессов в ракетных двигателях на твердом топливе был разработан алгоритм, учитывающий двумерный характер течения продуктов сгорания совместно с изменением положения горячей поверхности.

Данный алгоритм был апробирован на бесопловом РДТТ и двигателе с двумя режимами тяги. Разница в результатах между разработанным и

квазиодномерным подходами составила 20% для бесоплового ракетного двигателя, а сравнение с экспериментальными результатами для двигателя с двумя режимами тяги показало хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90033.

#### Литература

1. Алиев А. В., Амарантов Г. Н., Ахмадеев В. Ф. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А. М. Липанова и Ю. М. Милехина. М.: Машиностроение, 2007. 502 с.
2. Глазунов А. А., Еремин И. В., Жильцов К. Н., Костюпин К. В., Тырышкин И. М., Шувариков В. А. Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 53. С. 59–72.
3. Милехин Ю. М., Ключников А. Н., Попов В. С. Сопряженная Задача Моделирования Внутрибаллистических Характеристик Бесопловых РДТТ // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49. № 5. С. 77–85.
4. Cavallini E. Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics [Electronic resource]: PhD thesis. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/74323997.pdf>
5. Liu X.-D., Osher S., Chan T. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes // Journal of Computational Physics. – 1994. V. 115. – P. 200–212.
6. Tan S., Shu C.-W. Inverse Lax-Wendroff Procedure for Numerical Boundary Conditions of Conservation Laws // Journal of Computational Physics. – 2010. – V. 229. № 26. – P. 8144–8166.
7. Shekhar H. Burn-back Equations for High Volumetric Loading Single-grain Dual-thrust Rocket Propellant Configuration // Defence Science Journal. – 2011. – V. 61. № 2. – P. 165–170.