ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Управление, вычислительная техника и информатика № 57

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/57/8

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра, К.С. Шульгина

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С РАЗНОТИПНЫМИ ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ И НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-703002.

Рассматривается применение метода асимптотически-диффузионного анализа для марковской модели RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Суть метода состоит в построении диффузионного процесса, аппроксимирующего число заявок на орбите в исследуемой системе. На основе функции плотности диффузионного процесса строится аппроксимация стационарного дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Ключевые слова: RQ-система; ненадежный прибор; вызываемые заявки; метод асимптотически-диффузионного анализа; диффузионная аппроксимация.

В настоящее время системы массового обслуживания с повторными обращениями к прибору (RQ-системы) являются очень популярными математическими моделями различных реальных телекоммуникационных и сервисных систем. Такие системы характеризуются тем, что поступившая в систему заявка в случае занятости сервера обслуживанием другой заявки не теряется, а отправляется на орбиту и после случайной задержки пытается вновь занять прибор. С ранними исследованиями RQ-систем можно ознакомиться в монографиях [1, 2].

Оригинальные СМО с орбитой пришли на смену системам с ожиданием и описывали поведение телефонных систем, а впоследствии применялись для моделирования сетей случайного доступа. Вклад повторных обращений к прибору в моделировании call-центров обсуждается в работах [3–5].

В последнее время с развитием так называемых смешанных call-центров RQ-системы стали рассматриваться как модели систем связи с двумя типами занятости прибора, а именно поступающими и вызываемыми заявками. Последние присутствуют в системе всегда, прибор может обратиться к таким заявкам во время простоя, чтобы увеличить производительность системы. Идея вызываемых заявок, которые получают обслуживание по инициативе прибора, принадлежит Туану Фунг-Дуку [6–8]. Он и его соавторы исследуют свойства систем с вызываемыми заявками с помощью оригинальных численных методов.

В статьях [9, 10] рассматриваются RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Такие системы применяются для моделирования радиосетей, в которых узел связи подвержен поломкам и может выходить из строя, что существенно влияет на производительность сети.

Надежности систем с вызываемыми заявками также посвящены работы [11–13]. В них авторы исследуют системы с различными дополнительными свойствами вышеописанных моделей, такими как ограниченное число входящих источников, поиск заявок на орбите и произвольное распределение длительности восстановления прибора. В качестве метода исследования используется имитационное моделирование.

В RQ-системах с поломками прибора ненадежность обычно понимается как физическое свойство узла связи [14–17]. В моделях call-центров под прибором может пониматься не только само устройство (телефон), но и оператор, совершающий звонки. В таких случаях под поломкой прибора понимается прекращение работы системы по инициативе оператора. В статьях [18, 19], мы предлагаем исследование марковской RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором с помощью методов асимптотического анализа. Интенсивность поломок имеет различные значения для разных состояний прибора. В частности, мы полагаем, что прибор не подвержен поломкам, когда обслуживает вызываемые заявки, так как вызываются они самим прибором.

В данной работе к исследованию модели, описанной в статьях [18, 19], применяется метод асимптотически-диффузионного анализа, представленный в работе [20] для исследования RQ-системы с групповым поступлением заявок. Этот метод существенно расширяет область применимости предельных характеристик системы, на основе которых мы строим диффузионную аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите. Результаты получены в предельном условии большой задержки заявок на орбите, что означает, что параметр экспоненциального распределения длительности задержки на орбите должен быть достаточно мал. Однако мы покажем, что диффузионная аппроксимация применима и в случаях, когда значения параметра далеки от предельных.

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему, описанную в работах [18, 19]. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка входящего потока, поступившая в систему и обнаружившая прибор свободным, занимает его и обслуживается в течение экспоненциально распределенного времени с параметром μ_1. Если же в момент поступления заявка застает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и повторяет попытку занять прибор по истечении случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром σ.

Когда прибор свободен, он вызывает заявки различных типов. От типа вызываемой заявки n зависят интенсивность вызывания α_n и интенсивность обслуживания μ_n. Для удобства пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до N.

Поломки прибора имеют интенсивность γ_0, когда он свободен, или интенсивность γ_1, когда обслуживает заявку входящего потока. Длительность периода восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром γ_2. В момент поломки (выхода из строя) прибора обслуживаемая заявка переходит на орбиту. Будем считать, что прибор не может выйти из строя при обслуживании вызываемых заявок, так как обслуживание инициировано самим прибором.

Обозначим процесс $k(t)$ – состояние прибора в момент времени t. Этот процесс может принимать следующие значения: 0, если прибор свободен; 1, если прибор обслуживает заявку из потока или орбиты; n, если обслуживается вызываемая заявка типа n, $n = 2, 3, \ldots, N$; $N + 1$, если прибор находится в состоянии восстановления. Также введем случайный процесс $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Ставится задача нахождения стационарного распределения числа заявок на орбите. Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{k(t), i(t)\}$. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -\left(\lambda + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + i\sigma + \gamma_0\right) P_0(i,t) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k P_k(i,t) + \gamma_2 P_{N+1}(i,t),$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu_1 + \gamma_1) P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + \sigma(i+1) P_0(i+1,t) + \lambda P_1(i-1,t),$$

$$\frac{\partial P_n(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu_n) P_n(i,t) + \lambda P_n(i-1,t) + \alpha_n P_0(i,t), \quad n = \overline{2, N},$$

$$\frac{\partial P_{N+1}(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \gamma_2) P_{N+1}(i,t) + \lambda P_{N+1}(i-1,t) + \gamma_0 P_0(i,t) + \gamma_1 P_1(i-1,t). \tag{1}$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j=\sqrt{-1}$, $H_k(u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_k(i,t)$, $k=\overline{0,N+1}$. Преобразуя систему уравнений (1), получим

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t}=-\left(\lambda+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n+\gamma_0\right)H_0(u,t)+j\sigma\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\sum_{k=1}^{N}\mu_k H_k(u,t)+\gamma_2 H_{N+1}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1(u,t)}{\partial t}=(\lambda(e^{ju}-1)-\mu_1-\gamma_1)H_1(u,t)+\lambda H_0(u,t)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_n(u,t)}{\partial t}=(\lambda(e^{ju}-1)-\mu_n)H_n(u,t)+\alpha_n H_0(u,t),\quad n=\overline{2,N},$$

$$\frac{\partial H_{N+1}(u,t)}{\partial t}=(\lambda(e^{ju}-1)-\gamma_2)H_{N+1}(u,t)+\gamma_0 H_0(u,t)+\gamma_1 e^{ju}H_1(u,t). \tag{2}$$

Суммируя уравнения системы (2), запишем дополнительное уравнение

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=(e^{ju}-1)\left\{j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\gamma_1 H_1(u,t)+\lambda\sum_{n=1}^{N+1}H_n(u,t)\right\}, \tag{3}$$

которое нам понадобится для дальнейшего анализа. Систему (2), (3) будем решать методом асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии $\sigma\to 0$.

3. Первый этап асимптотически-диффузионного анализа

Обозначим $\sigma=\varepsilon$ и введем следующие замены в системе (2) и уравнении (3):

$$\tau=t\varepsilon,\quad u=\varepsilon w,\quad H_k(u,t)=F_k(w,\tau,\varepsilon).$$

Получим систему

$$\varepsilon\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=-\left(\lambda+\gamma_0+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n\right)F_0(w,\tau,\varepsilon)++j\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\sum_{k=1}^{N}\mu_k F_k(w,\tau,\varepsilon)+\gamma_2 F_{N+1}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=(\lambda(e^{j\varepsilon w}-1)-\mu_1-\gamma_1)F_1(w,\tau,\varepsilon)+\lambda F_0(w,\tau,\varepsilon)-je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_n(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=(\lambda(e^{j\varepsilon w}-1)-\mu_n)F_n(w,\tau,\varepsilon)+\alpha_n F_0(w,\tau,\varepsilon),\quad n=\overline{2,N},$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_{N+1}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=(\lambda(e^{j\varepsilon w}-1)-\gamma_2)F_{N+1}(w,\tau,\varepsilon)+\gamma_0 F_0(w,\tau,\varepsilon)+\gamma_1 e^{j\varepsilon w}F_1(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=(e^{j\varepsilon w}-1)\left\{je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\gamma_1 F_1(w,\tau,\varepsilon)+\lambda\sum_{n=1}^{N+1}F_n(w,\tau,\varepsilon)\right\}. \tag{4}$$

Решая систему (4) в предельном условии $\varepsilon\to 0$ ($\sigma\to 0$), докажем следующее утверждение.

Теорема 1. В предельном условии $\sigma\to 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\sigma\to 0}Me^{jw\sigma i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)}=e^{jwx(\tau)}, \tag{5}$$

где скалярная функция $x=x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau)=-x(\tau)r_0+\gamma_1 r_1+\lambda\sum_{n=1}^{N+1}r_n\,.$$

Здесь $r_k=r_k(x)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{N+1}r_k=1,$$

и являются решением системы уравнений

$$-\left(\lambda+\gamma_0+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n+x\right)r_0+\sum_{k=1}^{N}\mu_k r_k+\gamma_2 r_{N+1}=0,$$

$$-(\mu_1+\gamma_1)r_1+(\lambda+x)r_0=0,$$

$$-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 = 0.$$

Доказательство. В системе (4) устремим ε → 0, обозначив $F_n(w,\tau,\varepsilon) = F_n(w,\tau)$, получим

$$-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n\right) F_0(w,\tau) + j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \sum_{k=1}^{N} \mu_k F_k(w,\tau) + \gamma_2 F_{N+1}(w,\tau) = 0,$$
$$-(\mu_1 + \gamma_1) F_1(w,\tau) + \lambda F_0(w,\tau) - j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} = 0,$$
$$-\mu_n F_n(w,\tau) + \alpha_n F_0(w,\tau) = 0, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 F_{N+1}(w,\tau) + \gamma_0 F_0(w,\tau) + \gamma_1 F_1(w,\tau) = 0,$$
$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial \tau} = jw\left\{ j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \gamma_1 F_1(w,\tau) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n(w,\tau) \right\}. \quad (6)$$

Решение системы (6) будем искать в виде:

$$F_k(w,\tau) = r_k e^{jwx(\tau)}, \quad k = \overline{0, N+1}. \quad (7)$$

Здесь $x = x(\tau)$ – скалярная функция аргумента τ, которая определяет при ε → 0 нормированное величиной ε = σ среднее значение $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите. Подставим разложение (7) в систему (6) и получим

$$-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + x\right) r_0 + \sum_{k=1}^{N} \mu_k r_k + \gamma_2 r_{N+1} = 0,$$
$$-(\mu_1 + \gamma_1) r_1 + (\lambda + x) r_0 = 0,$$
$$-\mu_n r_n + \alpha_n r_0 = 0, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 = 0,$$
$$x'(\tau) = -x(\tau) r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n. \quad (8)$$

В силу того, что скалярная функция $x(\tau)$ аргумента τ является предельным при ε → 0, нормированным величиной ε = σ средним значением $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбите, то выполняется равенство (5). *Теорема доказана.*

Вероятности r_k можно найти из (8) с учетом условия нормировки. Так как коэффициенты системы уравнений (8) зависят от x, величины r_k также можно представить как $r_k(x)$, однако мы опустим аргумент для упрощения выкладок. Также обозначим функцию $a(x)$:

$$a(x) = -x r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n. \quad (9)$$

4. Второй этап асимптотически диффузионного анализа

В системе (2) и уравнении (3) введем замены $H_k(u,t) = H_k^{(2)}(u,t) e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}$, $k = 0, 1, \ldots, N+1$, и получим систему уравнений

$$\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) H_0^{(2)}(u,t) = -\left(\lambda + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + \gamma_0 + x(\sigma t)\right) H_0^{(2)}(u,t) + j\sigma \frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \mu_k H_k^{(2)}(u,t) + \gamma_2 H_{N+1}^{(2)}(u,t),$$
$$\frac{\partial H_1^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) H_1^{(2)}(u,t) = (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) H_1^{(2)}(u,t) +$$
$$+ (\lambda + x(\sigma t) e^{-ju}) H_0^{(2)}(u,t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_n^{(2)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H_n^{(2)}(u,t)=(\lambda(e^{ju}-1)-\mu_n)H_n^{(2)}(u,t)+\alpha_n H_0^{(2)}(u,t),\quad n=\overline{2,N},$$

$$\frac{\partial H_{N+1}^{(2)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H_{N+1}^{(2)}(u,t)=(\lambda(e^{ju}-1)-\gamma_2)H_{N+1}^{(2)}(u,t)+\gamma_0 H_0^{(2)}(u,t)+\gamma_1 e^{ju}H_1^{(2)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H^{(2)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H^{(2)}(u,t)=(e^{ju}-1)\times$$

$$\times\left\{-x(\sigma t)e^{-ju}H_0^{(2)}(u,t)+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u}+\gamma_1 H_1^{(2)}(u,t)+\lambda\sum_{n=1}^{N+1}H_n^{(2)}(u,t)\right\}. \tag{10}$$

Сделаем замены $\sigma = \varepsilon^2$, $\tau = \varepsilon^2 t$, $u = \varepsilon w$, $H_k^{(2)}(u,t)=F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)$, $k=\overline{0,N+1}$, после чего получим систему уравнений

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=-\left(\lambda+\gamma_0+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n+x\right)F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+$$

$$+j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\sum_{k=1}^{N}\mu_k F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=(\lambda(e^{j\varepsilon w}-1)-\mu_1-\gamma_1)F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+$$

$$+(\lambda+xe^{-j\varepsilon w})F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=(\lambda(e^{j\varepsilon w}-1)-\mu_n)F_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\alpha_n F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),\quad n=\overline{2,N},$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=(\lambda(e^{j\varepsilon w}-1)-\gamma_2)F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+$$

$$+\gamma_0 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\gamma_1 e^{j\varepsilon w}F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=(e^{j\varepsilon w}-1)\times$$

$$\times\left\{-xe^{-j\varepsilon w}F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\gamma_1 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\lambda\sum_{n=1}^{N+1}F_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\right\}. \tag{11}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Предельные при $\varepsilon\to 0$ функции $F_k^{(2)}(w,\tau)$ имеют вид*:*

$$F_k^{(2)}(w,\tau)=\Phi(w,\tau)r_k(x),\quad k=\overline{0,N+1},$$

где $r_k(x)$, зависящие от значений параметра x, определены в Теореме 1, а скалярная функция $\Phi(w,\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}+b(x)\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau). \tag{12}$$

Здесь функция $a(x)$ определяется равенством (9), а скалярная функция $b(x)$ имеет вид:

$$b(x)=a(x)+2\left(-xg_0+\gamma_1 g_1+\lambda\sum_{k=1}^{N+1}g_k+xr_0\right), \tag{13}$$

где $g_k = g_k(x)$ определяются системой уравнений

$$-\left(\lambda+\gamma_0+\sum_{n=2}^{N}\alpha_n+x\right)g_0+\sum_{k=1}^{N}\mu_k g_k+\gamma_2 g_{N+1}=a(x)r_0,$$

$$-(\mu_1+\gamma_1)g_1+(\lambda+x)g_0=a(x)r_1-\lambda r_1+xr_0,$$

$$-\mu_n g_n + \alpha_n g_0 = a(x) r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 = a(x) r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1,$$
$$\sum_{k=0}^{N+1} g_k = 0. \tag{14}$$

Доказательство. В первых четырех уравнениях системы (11) разложим экспоненты в ряд Тейлора и сгруппируем слагаемые порядка малости не выше ε:

$$j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + x\right) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$
$$+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^{N} \mu_k F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (j\varepsilon w\lambda - \mu_1 - \gamma_1) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$
$$+ (\lambda + x(1 - j\varepsilon w)) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (j\varepsilon w\lambda - \mu_n) F_n^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \alpha_n F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N},$$
$$j\varepsilon w a(x) F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (j\varepsilon w\lambda - \gamma_2) F_{N+1}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \gamma_0 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \gamma_1 (1 + j\varepsilon w) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \tag{15}$$

Будем искать решение системы (15) в виде:

$$F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \Phi(w,\tau)\{r_k + j\varepsilon w f_k\} + O\left(\varepsilon^2\right), k = \overline{0, N+1}, \tag{16}$$

где $r_k = r_k(x)$. Разделив уравнения на $j\varepsilon w\Phi(w, \tau)$ и в пределе при $\varepsilon \to 0$ получим

$$-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + x\right) f_0 + \sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k + \gamma_2 f_{N+1} = a(x) r_0 - \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_0,$$
$$-(\mu_1 + \gamma_1) f_1 + (\lambda + x) f_0 = a(x) r_1 - \lambda r_1 + x(\tau) r_0 + \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)} r_0,$$
$$-\mu_n f_n + \alpha_n f_0 = a(x) r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 f_{N+1} + \gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 = a(x) r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1. \tag{17}$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решение $f(x)$ этой системы уравнений запишем в виде суммы

$$f_k = C r_k + g_k - \varphi_k \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}, \tag{18}$$

и подставив его в (17), получим две системы уравнений:

$$-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + x\right) \varphi_0 + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \varphi_k + \gamma_2 \varphi_{N+1} = r_0,$$
$$-(\mu_1 + \gamma_1)\varphi_1 + (\lambda + x)\varphi_0 = -r_0,$$
$$-\mu_n \varphi_n + \alpha_n \varphi_0 = 0, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 \varphi_{N+1} + \gamma_0 \varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 = 0, \tag{19}$$

$$-\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^{N} \alpha_n + x\right) g_0 + \sum_{k=1}^{N} \mu_k g_k + \gamma_2 g_{N+1} = a(x) r_0,$$
$$-(\mu_1 + \gamma_1) g_1 + (\lambda + x) g_0 = a(x) r_1 - \lambda r_1 + x r_0,$$
$$-\mu_n g_n + \alpha_n g_0 = a(x) r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N},$$
$$-\gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 = a(x) r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1. \tag{20}$$

Обратим внимание на систему уравнений (19). Если мы продифференцируем по x систему уравнений (8), то полученная система идентична системе уравнений (19), из чего можем сделать вывод, что

$$\varphi_k = \varphi_k(x) = r_k'(x), \sum_{k=0}^{N+1} \varphi_k = 0,$$

где последнее соотношение получено путем дифференцирования условия нормировки для распределения $r_k(x)$ по x.

Далее рассмотрим систему уравнений (20). Данная система имеет бесконечное число решений, так как определитель матрицы системы равен нулю и ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы. Наложим на неизвестные g_k дополнительное условие $\sum_{k=0}^{N+1} g_k = 0$ и, рассматривая его вместе с системой (20), получим систему уравнений, которая имеет единственное решение.

Обратимся к последнему уравнению системы (11). В этом уравнении сгруппируем слагаемые порядка малости не выше ε^2 и подставим разложение (16) в полученное уравнение с учетом (8), разделим уравнение на ε^2 и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, откуда с учетом разложения (18) получим

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = (jw)^2 \left\{ x r_0 - x g_0 + \gamma_1 g_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} g_n \right\} \Phi(w,\tau) -$$

$$-(jw)^2 \left\{ -x\varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_n - r_0 \right\} \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w} + \frac{(jw)^2}{2} \left\{ -x r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n \right\} \Phi(w,\tau).$$

Обратим внимание на множитель

$$-x\varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_n - r_0 = -x r_0'(x) + \gamma_1 r_1'(x) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n'(x) - r_0(x) = a'(x).$$

Обозначим также

$$b(x) = a(x) + 2\left(-x g_0(x) + \gamma_1 g_1(x) + \lambda \sum_{k=1}^{N+1} g_k(x) + x r_0(x) \right). \quad (22)$$

Тогда уравнение перепишется в виде:

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w,\tau), \quad (23)$$

которое совпадает с (12). *Теорема доказана.*

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (23), мы получим уравнение Фоккера–Планка для некоторого диффузионного процесса $y(\tau)$. Дальнейшая работа с уравнением подробно описана в работе [20].

Полученные функции $a(x)$ и $b(x)$ являются коэффициентами переноса и диффузии диффузионного процесса, аппроксимирующего число заявок на орбите в исследуемой системе. Стационарная плотность вероятностей аппроксимирующего случайного процесса имеет следующий вид:

$$\Pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

где C – нормирующая константа. Диффузионную аппроксимацию строим по формуле

$$PD(i) = \frac{\Pi(i\sigma)}{\sum_{n=0}^{\infty} \Pi(n\sigma)}. \quad (24)$$

5. Точность аппроксимации

Точность аппроксимации $PD(i)$ определим с помощью расстояния Колмогорова $\Delta_1 = \max_{0 \le i < \infty} \left| \sum_{\nu=0}^{i} \left(P(\nu) - PD(\nu) \right) \right|$, которое показывает разницу между распределением $PD(i)$ и $P(i)$, где $PD(i)$ получено по формуле (24), а аппроксимация $P(i)$ построена на основе имитационной модели системы. Для сравнения мы также покажем точность гауссовской аппроксимации Δ_2, полученной в предельном условии $\sigma \to 0$, которое также использовалось для построения диффузионной аппроксимации. Аппроксимацию будем полагать приемлемой, если расстояние Колмогорова для нее < 0,05. Положим $N = 3$, $\lambda = 2$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 4$, $\gamma_0 = 0{,}1$, $\gamma_1 = 0{,}2$, $\gamma_2 = 1$.

Расстояние Колмогорова

	σ = 10	σ = 5	σ = 1	σ = 0,5	σ = 0,1	σ = 0,05
Δ_1	0,065	**0,039**	**0,023**	**0,022**	**0,013**	**0,011**
Δ_2	0,185	0,147	0,089	0,074	**0,047**	**0,045**

Для указанных значений параметров область значений параметра σ, для которого аппроксимация является приемлемой, определяется неравенством $\sigma < 10$. Из таблицы видно, что точность диффузионной аппроксимации в среднем в 3–4 раза выше точности гауссовской аппроксимации.

Заключение

В предложенной работе рассмотрена диффузионная аппроксимация для числа заявок на орбите марковской RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Построена аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на орбите указанной системы. Численные результаты показывают, что точность диффузионной аппроксимации растет с уменьшением параметра σ. Однако несмотря на то, что предельное условие имеет вид $\sigma \to 0$, аппроксимация является удовлетворительной и для значений параметра $\sigma < 10$, которые, на взгляд авторов, далеки от предельных.

Также диффузионная аппроксимация имеет более широкую область применимости, чем гауссовская аппроксимация, построенная в статье [21]. Это следует из результатов численного эксперимента, где при тех же значениях параметров системы гауссовская аппроксимация имеет точность в 3–4 раза ниже, чем диффузионная, в смысле расстояния Колмогорова. Таким образом, полученные в статье результаты расширяют область применимости асимптотических аппроксимаций, полученных в работах [18, 19, 21].

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin : Springer Science and Business Media, 2008. 321 p.
2. Falin G., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 324 p.
3. Koole G., Mandelbaum A. Queueing models of call centers: An introduction // Annals of Operations Research. 2002. V. 113, № 4. P. 41–59.
4. Deslauriers A., L'Ecuyer P., Pichitlamken J., Ingolfsson A., Avramidis A.N. Markov chain models of a telephone call center with call blending // Computers & operations research. 2007. V. 34, № 6. P. 1616–1645.
5. Stolletz R. Performance analysis and optimization of inbound call centers. Berlin : Springer Science & Business Media, 2003. 215 p.
6. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Markovian retrial queues with two way communication // Journal of industrial and management optimization. 2012. V. 8, № 4. P. 781–806.
7. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37, № 4. P. 1811–1822.
8. Phung-Duc T., Rogiest W. Two way communication retrial queues with balanced call blending // Lecture Notes in Computer Science. 2012. V. 7314. P. 16–31.
9. Paul S., Phung-Duc T. Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 213–224.
10. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S. Unreliable Single-Server Queue with TwoWay Communication and Retrials of Blocked and Interrupted Calls for Cognitive Radio Networks // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 919. P. 276–287.
11. Kumar M.S., Dadlani A., Kim K. Performance analysis of an unreliable M/G/1 retrial queue with two-way communication // Operational Research. 2020. V. 20. № 4. P. 1–14.
12. Kuki A., Berczes T., Sztrik J., Toth A. Reliability analysis of a two-way communication system with searching for customers // 2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT). IEEE, 2019. P. 260–265.
13. Toth A., Sztrik J., Kuki A., Berczes T., Effosinin D. Reliability analysis of finite-source retrial queues with outgoing calls using simulation // 2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT). IEEE, 2019. P. 504–511.

14. Chen P., Zhou Y. Equilibrium balking strategies in the single server queue with setup times and breakdowns // Operational Research. 2015. V. 15, № 2. P. 213–231.
15. Chang J., Wang J. Unreliable M/M/1/1 retrial queues with set-up time // Quality Technology & Quantitative Management. 2018. V. 15, № 5. P. 589–601.
16. Phung-Duc T. Single server retrial queues with setup time // Journal of Industrial & Management Optimization. 2017. № 3. P. 1329–1345.
17. Chang F.M., Liu T.H., Ke J.C. On an unreliable-server retrial queue with customer feedback and impatience // Applied Mathematical Modelling. 2018. V. 55. P. 171–182.
18. Nazarov A.A., Paul S.V., Lizyura O.D. Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2020. V. 28, № 1. P. 49–61.
19. Nazarov A., Paul S., Lizyura O. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls // Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics. 2020. P. 40–41.
20. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S., Lizura O. Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11965. P. 207–222.
21. Шульгина К.С., Пауль С.В. Асимптотический анализ RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором // Труды Томского государственного университета. 2020. Т. 305: Материалы VIII международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». С. 309–314.

Поступила в редакцию 12 августа 2021 г.

Nazarov A.A., Paul S.V., Lizyura O.D., Shulgina K.S. (2021) ASYMPTOTIC-DIFFUSION ANALYSIS OF RETRIAL QUEUE WITH TWO-WAY COMMUNICATION AND UNRELIABLE SERVER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 74–83

DOI: 10.17223/19988605/57/8

In this paper Markovian retrial queue with multiple types of outgoing calls and unreliable server, which could be used as a mathematical model of a call center is considered. Incoming calls arrive at system according to a Poisson process with rate λ. Service times of incoming calls follow the exponential distribution with rate μ_1. If the server is idle upon arrival of an incoming call, it occupies the server. If the server is busy, an incoming call joins the orbit and makes a random delay for exponentially distributed time with parameter σ. From the orbit, an incoming call retries to occupy the server and behaves the same as a primary incoming call.

On the other hand, the server makes outgoing calls after some exponentially distributed idle time. We assume that there are several types of outgoing calls whole durations follow distinct exponential distributions with parameter depending on the type of outgoing call.

In our system, the server is aim to breakdowns. The duration of periods between breakdowns is exponentially distributed with parameter: γ_0, if the server is idle and γ_1, if the incoming call is in service. The recovery rate is equal to γ_2. We assume that the server cannot be broken while serving outgoing calls due to the fact that in such case the server initiates the service itself.

A random process of the number of incoming calls at the system is considered. The aim of the research is to derive stationary probability distribution for this process using limiting distribution of corresponding diffusion process. We derive Kolmogorov system of differential equations and solve it in the limit by $\sigma \to 0$.

The drift coefficient for normalized number of calls in the system (Theorem 1) is obtained. After that, we extend the study to obtain diffusion coefficient and derive the equation for limiting characteristic function of normalized number of calls in the system (Theorem 2).

Based on the obtained coefficients, we have built the diffusion approximation of the probability distribution of the number of incoming calls in the system.

Numerical example shows high accuracy of the obtained approximation. In this section, we also compare the accuracy of asymptotic-diffusion method and asymptotic analysis method, which gives Gaussian approximation under the same limit condition $\sigma \to 0$. We show that diffusion approximation have more wide area of applicability.

Keywords: Retrial queue; unreliable server; outgoing calls; asymptotic-diffusion analysis method; diffusion approximation.

NAZAROV Anatoly Andreevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

PAUL Svetlana Vladimirovna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: paulsv82@mail.ru

LIZYURA Olga Dmitrievna (Assistant Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: oliztsu@mail.ru

SHULGINA Ksenia Sergeevna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: shulgina19991999@mail.ru

REFERENCES

1. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin: Springer Science and Business Media.
2. Falin, G. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London: Chapman & Hall.
3. Koole, G. & Mandelbaum, A. (2002) Queueing models of call centers: An introduction. *Annals of Operations Research*. 113(1-4). pp. 41–59.
4. Deslauriers, A., L'Ecuyer, P., Pichitlamken, J., Ingolfsson, A. & Avramidis, A. N. (2007) Markov chain models of a telephone call center with call blending. *Computers & Operations Research*. 34(6). pp. 1616–1645.
5. Stolletz, R. (2003) *Performance analysis and optimization of inbound call centers*. Berlin: Springer Science and Business Media.
6. Artalejo, J.R. & Phung-Duc, T. (2012) Markovian retrial queues with two-way communication. *Journal of Industrial and Management Optimization*. 8(4). pp. 781–806. DOI: 10.3934/jimo.2012.8.781
7. Artalejo, J.R. & Phung-Duc, T. (2013) Single server retrial queues with two way communication. *Applied Mathematical Modelling*. 37(4). pp. 1811–1822. DOI: 10.1016/j.apm.2012.04.022
8. Phung-Duc, T. & Rogiest, W. (2012) Two-way communication retrial queues with balanced call blending. *Lecture Notes in Computer Science*. 7314. pp. 16–31. DOI: 10.1007/978-3-642-30782-9_2
9. Paul, S. & Phung-Duc, T. (2018) Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 213–224. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_17
10. Nazarov, A., Phung-Duc, T. & Paul, S. (2018) Unreliable Single-Server Queue with Two-Way Communication and Retrials of Blocked and Interrupted Calls for Cognitive Radio Networks. *Communications in Computer and Information Science*. 919. pp. 276–287. DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5_24
11. Kumar, M.S., Dadlani, A. & Kim, K. (2018) Performance analysis of an unreliable M/G/1 retrial queue with two-way communication. *Operational Research*. 20(4). pp. 1–14.
12. Kuki, A., Berczes, T., Sztrik, J. & Toth, A. (2019) Reliability analysis of a two-way communication system with searching for customers. *2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), IEEE*. pp. 260–265.
13. Toth, A., Sztrik, J., Kuki, A., Berczes, T. & Effosinin, D. (2019) Reliability analysis of finite-source retrial queues with outgoing calls using simulation. *2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), IEEE*. pp. 504–511.
14. Chen, P. & Zhou, Y. (2015) Equilibrium balking strategies in the single server queue with setup times and breakdowns. *Operational Research*. 15(2). pp. 213–231. DOI: 10.1007/s12351-015-0174-0
15. Chang, J. & Wang, J. (2018) Unreliable M/M/1/1 retrial queues with set-up time. *Quality Technology & Quantitative Management*. 15(5). pp. 589–601. DOI: 10.1080/16843703.2017.1320459
16. Phung-Duc, T. (2017) Single server retrial queues with setup time. *Journal of Industrial & Management Optimization*. 13(3). pp. 1329–1345. DOI: 10.3934/jimo.2016075
17. Chang, F.M., Liu, T.H. & Ke, J.C. (2018) On an unreliable-server retrial queue with customer feedback and impatience. *Applied Mathematical Modelling*. 55. pp. 171–182. DOI: 10.1016/j.apm.2017.10.025
18. Nazarov, A.A., Paul, S.V. & Lizyura, O.D. (2020) Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 28(1). pp. 49–61. DOI: 10.22363/2658-4670-2020-28-1-49-61
19. Nazarov, A., Paul, S. & Lizyura, O. (2020) Asymptotic analysis of Markovian Retrial Queue with Unreliable Server and Multiple Types of Outgoing Calls. *Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics*. April 24–25, 2020, Karshi State University, Uzbekistan. pp. 40–41.
20. Nazarov, A., Phung-Duc, T., Paul, S. & Lizura, O. (2019) Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls. *Lecture Notes in Computer Science*. 11965. pp. 207–222. DOI: 10.1007/978-3-030-36614-8_16
21. Shulgina, K.S. & Paul, S.V. (2020) Asymptotic Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Unreliable Server. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. 305. pp. 309–314.