ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 64, № 10 ФИЗИКА 2021

УДК 536.75 DOI: 10.17223/00213411/64/10/32

ГРУППА ИНФОРМАЦИЙ РАЗЛИЧИЯ В РАСШИРЕННОЙ ПАРАСТАТИСТИКЕ КВАНТОВЫХ НЕЭКСТЕНСИВНЫХ СИСТЕМ

Р.Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, г. Казань, Россия

Определена абелева группа параметрических информаций различия для квантовых неэкстенсивных систем с законом композиции с квадратичной нелинейностью. Приводятся наиболее общие ее свойства в расширенной парастатистике.

Ключевые слова: *неэкстенсивность, группа, информация различия, парастатистика.*

Введение

К настоящему времени сформировалась новая область – неэкстенсивная статистическая механика и термодинамика. Подробный обзор теоретических и экспериментальных результатов приведен в [1–4]. Основой являются статистические модели с параметрическими энтропиями и информациями различия. Анализ различных мер и их свойств представлен в работах [1, 5].

Энтропия и информация различия (или относительная информация) при переходе между состояниями системы определяют соответственно статистические меры разупорядоченности и упорядоченности микросостояний системы, что является фундаментом для исследования процессов самораспада и самоорганизации. В работе [6] на основе метода квантовых состояний Бозе [7, 8] рассматривают различные аспекты парастатистики и ее расширение, при котором число частиц в *i*-состоянии находится в произвольном диапазоне изменений. Изучены также свойства абелевых групп энтропий. Однако группа информаций различия не рассматривалась, что и является целью настоящей работы.

1. Квантовая информация различия и полунорма

Используем метод квантовых состояний Бозе [7] и рассмотрим совокупность частиц $\{N_1,...,N_m\}$ с состояниями $\{G_1,...,G_m\}$, где m – число состояний. Система описывается статистикой состояний G_{ij} с $i=1,...,m$ и $j=s,...,r$, означающей, что в *i*-состоянии находятся j частиц, количество которых ограничено снизу и сверху. Для неэкстенсивных систем справедливы следующие равенства [6]:

$$G_i=\sum_{j=s}^{r}G_{ij},\ N_i^q=\sum_{j=s}^{r}jG_{ij}^q,\ p_{ij}=\frac{G_{ij}}{G_i},\ \left(\sum_{j=s}^{r}p_{ij}=1\right) \tag{1}$$

с числом состояний и числом частиц

$$G_i=\sum_{j}^{r}G_{ij},\ N_q=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}N_i^q=\sum_{i}^{m}G_i\overline{n}_i^q=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\,jp_{ij}^q\ . \tag{2}$$

Среднее число частиц в *i*-состоянии имеет значение

$$\overline{n}_i=\frac{N_i}{G_i}=\left(\sum_{j=s}^{r}G_{ij}\right)^{-1}\left(\sum_{j=s}^{r}jG_{ij}^q\right)^{1/q}. \tag{3}$$

Усреднение ненормированным распределением p_{ij}^q для каждого *i*-состояния с весом G_i позволяет находить общее значение произвольной физической величины в виде взвешенного среднего

$$T_q=\sum_{i}^{m}T_iN_i^q=\sum_{i}^{m}G_iT_i\overline{n}_i^q=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_iT_i\,jp_{ij}^q\ . \tag{4}$$

Квантовая энтропия и информация различия представляются в виде средних значений

$$S_q = \frac{k}{q-1}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}\left(G_{ij} - G_{ij}^{q}G_i^{1-q}\right) = \frac{k}{q-1}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(p_{ij} - p_{ij}^{q}\right) = \frac{k}{1-q}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i s\left(p_{ij}\right)p_{ij}^{q}\ ; \qquad (5)$$

$$I_q = \frac{k}{1-q}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}\left(G_{ij} - G_{ij}^{q}u_{ij}^{1-q}\right) = \frac{k}{1-q}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(p_{ij} - p_{ij}^{q}u_{ij}^{1-q}\right) = \frac{k}{1-q}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i h\left(p_{ij}, u_{ij}\right)p_{ij}^{q} \qquad (6)$$

неэкстенсивных микроскопических величин

$$s\left(p_{ij}\right) = \frac{k}{1-q}\left(1 - p_{ij}^{1-q}\right); \qquad (7)$$

$$h\left(p_{ij}, u_{ij}\right) = \frac{k}{1-q}\left(p_{ij}^{1-q} - u_{ij}^{1-q}\right), \qquad (8)$$

для которых выпишем некоторые равенства

$$\begin{gathered} h\left(p_{ij}, u_{ij}\right) = -s\left(p_{ij}\right) + s\left(u_{ij}\right),\ h\left(p_{ij}, u_{ij}\right) + h\left(u_{ij}, p_{ij}\right) = 0, \\ h\left(p_{ij}, u_{ij}\right) + h\left(u_{ij}, w_{ij}\right) + h\left(w_{ij}, p_{ij}\right) = 0, \\ s\left(p_{ij}\right)h\left(u_{ij}, w_{ij}\right) + s\left(u_{ij}\right)h\left(w_{ij}, p_{ij}\right) + s\left(w_{ij}\right)h\left(p_{ij}, u_{ij}\right) = 0. \end{gathered} \qquad (9)$$

Информация различия (6) характеризует переход между состояниями p_{ij} и u_{ij} с соответствующими равенствами

$$G = \sum_{i}^{m}G_i = \sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_{ij} = \sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_{0ij}\ , \qquad (10)$$

где G_{0ij} относится к состоянию u_{ij}.

Меры (5) и (6) являются квантовыми аналогами энтропии Хаврда – Чарват – Дароши [9, 10] $S_q = k\left(q-1\right)^{-1}\sum_{i}^{m}\left(p_i - p_i^{q}\right)$ и информации различия Ратье – Каннапана [11] $I_q = k\left(1-q\right)^{-1}\times$ $\times\sum_{i}^{m}\left(p_i - p_i^{q}u_i^{1-q}\right)$, впервые полученные в теории информации. При $q = 1$ из (5) – (8) вытекают квантовые аддитивные логарифмические энтропии Больцмана и информации различия Кульбака

$$S_Б = -k\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_{ij}\ln\frac{G_{ij}}{G_i} = -k\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_j p_{ij}\ln p_{ij}\ ; \qquad (11)$$

$$I_K = k\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_{ij}\ln\frac{G_{ij}}{G_{0ij}} = k\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i p_{ij}\ln\frac{p_{ij}}{u_{ij}} \qquad (12)$$

с известными микроскопическими величинами $s(p_{ij}) = -k\ln p_{ij}$ и $h(p_{ij}, u_{ij}) = k\ln\left(p_{ij}/u_{ij}\right)$, а также выражения в методе Бозе для расширенной парастатистики [6]

$$T = \sum_{i}^{m}T_i N_i = \sum_{i}^{m}G_i T_i \overline{n}_i = \sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i T_i j p_{ij}\ ; \qquad (13)$$

$$N = \sum_{i}^{m}N_i = \sum_{i}^{m}G_i \overline{n}_i = \sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i j p_{ij}\ . \qquad (14)$$

Рассматривая равновесное состояние аддитивных систем, получим известное нормированное распределение

$$u_{ij} = p_{0ij} = \frac{G_{0ij}}{G_i} = Z_i^{-1}\exp\left[-k^{-1}\beta_0 j\left(E_i - \mu_0\right)\right],\ Z_i = \sum_{j=s}^{r}\exp\left[-k^{-1}\beta_0 j\left(E_i - \mu_0\right)\right], \qquad (15)$$

которое вытекает из экстремума энтропии (11) при вариации δp_{ij} с условиями сохранения общих значений энергии, числа частиц и числа состояний

$$E=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_iE_ijp_{ij},\ N=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_ijp_{ij},\ G=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_ip_{ij}\ . \tag{16}$$

Здесь $T=\beta_0^{-1}$ – температура; μ_0 – химический потенциал. В итоге имеет место следующее среднее число частиц в i-состоянии [6]:

$$\overline{n}_i=\frac{1}{e^{k^{-1}\beta_0(E_i-\mu_0)}-1}-\frac{(r+1)-se^{(r+1-s)k^{-1}\beta_0(E_i-\mu_0)}}{e^{(r+1-s)k^{-1}\beta_0(E_i-\mu_0)}-1}\,. \tag{17}$$

При $r=s+1$, т.е. $j=\{s,s+1\}$, из (17) вытекает выражение

$$\overline{n}_i=s+\frac{1}{e^{k^{-1}\beta_0(E_i-\mu_0)}+1}, \tag{18}$$

где второе слагаемое соответствует статистике Ферми – Дирака, что и следовало ожидать, поскольку j имеет два значения. Этот случай требует отдельного рассмотрения. При $s=0$ из (17) находим известное значение для традиционной парастатистики [8]

$$\overline{n}_i=\frac{1}{e^{k^{-1}\beta_0(E_i-\mu_0)}-1}-\frac{r+1}{e^{(r+1)k^{-1}\beta_0(E_i-\mu_0)}-1}\,. \tag{19}$$

В случае неэкстенсивных систем имеет место следующее равновесное распределение:

$$u_{ij}=p_{0ij}=\frac{G_{0ij}}{G_i}=\frac{\left[1-j(1-q)k^{-1}\beta_0\left(E_i-\mu_0\right)\right]^{1/(1-q)}}{\sum\limits_{j=s}^{r}\left[1-j(1-q)k^{-1}\beta_0\left(E_i-\mu_0\right)\right]^{1/(1-q)}}, \tag{20}$$

которое вытекает из экстремума энтропии (5) со следующим условием сохранения

$$E_q=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_iE_ijp_{ij}^q,\ N_q=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_ijp_{ij}^q,\ G=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_ip_{ij}\ . \tag{21}$$

Для энтропии получим экстремальное значение

$$S_{q0}=\frac{k}{q-1}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(p_{0ij}-p_{0ij}^q\right)=\beta_0\left(E_{q0}-\mu_0N_{q0}\right)-\beta_0\Omega_{q0} \tag{22}$$

с термодинамическим потенциалом и дифференциалом

$$\Omega_{q0}=-\frac{k}{\beta_0(1-q)}\sum_{i}^{m}G_i\left\{1-\left[\sum_{j=s}^{r}\left[1-j(1-q)k^{-1}\beta_0\left(E_i-\mu_0\right)\right]^{1/(1-q)}\right]^{1-q}\right\},$$
$$dS_{q0}=\beta_0\left(dE_{q0}-\mu_0dN_{q0}\right). \tag{23}$$

При спонтанном переходе от произвольного состояния с p_{ij} к равновесному с p_{0ij} получим информацию различия и ее дифференциал

$$I_q=\frac{k}{1-q}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(p_{ij}-p_{ij}^qu_{ij}^{1-q}\right)=-\left(S_q-S_{q0}\right)+\beta_0\left(E_q-E_{q0}\right)-\beta_0\mu_0\left(N_q-N_{q0}\right),$$
$$dI_q=-dS_q+\beta_0dE_q-\beta_0\mu_0dN_q \tag{24}$$

со средними значениями неэкстенсивных величин

$$E_{q0}=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i^{1-q}E_ijp_{0ij}^q,\ N_{q0}=\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i^{1-q}jp_{0ij}^q\ . \tag{25}$$

Рассмотрим значения полунорм распределения и отношения распределений:

$$N_{q-1}\left(p_{ij}\right)=\left[\frac{\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(p_{ij}\right)^{q-1}p_{ij}}{\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i p_{ij}}\right]^{\frac{1}{q-1}}; \tag{26}$$

$$N_{q-1}\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right)=\left[\frac{\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right)^{q-1}p_{ij}}{\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i p_{ij}}\right]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{27}$$

Для независимых систем полунормы отношений распределений запишем в виде

$$N=N_{q-1}\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right),\ N_1=N_{q-1}\left(\frac{p_{1ij}}{u_{1ij}}\right),\ N_2=N_{q-1}\left(\frac{p_{2ij}}{u_{2ij}}\right) \tag{28}$$

с $p_{ij}=p_{1ij}p_{2ij}$, $u_{ij}=u_{1ij}u_{2ij}$, $G_{ij}=G_{1ij}G_{2ij}$. Для полунормы справедливо свойство мультипликативности $N=N_1\circ N_2=N_1N_2$, выполняется свойство ассоциативности $\left(N_1\circ N_2\right)\circ N_3=N_1\circ\left(N_2\circ N_3\right)$. Единичным элементом абелевой группы полунорм является $N(1)=1$, обратным элементом – N^{-1}.

Тогда энтропия (5) и информация различия (6) с $p_{0ij}=u_{ij}$ представятся в следующем виде

$$S_q=\frac{k}{q-1}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i p_{ij}\left[1-N_{q-1}^{q-1}\left(p_{ij}\right)\right]; \tag{29}$$

$$I_q=\frac{k}{1-q}\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i p_{ij}\left[1-N_{q-1}^{q-1}\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right)\right], \tag{30}$$

а для квантовых аналогов энтропии и информации различия Реньи [12] имеем выражения

$$S_q=-k\ln N_{q-1}\left(p_{ij}\right),\ I_q=k\ln N_{q-1}\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right). \tag{31}$$

2. Группа информаций различия

Введем среднее взвешенное значение информации различия

$$I=\frac{I_q}{G}=\frac{k}{1-q}\left[1-N_{q-1}^{q-1}\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right)\right]=\frac{k}{1-q}\left[1-\frac{\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i\left(\frac{p_{ij}}{u_{ij}}\right)^{q-1}p_{ij}}{\sum_{i}^{m}\sum_{j=s}^{r}G_i p_{ij}}\right] \tag{32}$$

и, используя (28), получим закон композиции с квадратичной нелинейностью в общем виде

$$I=I_1\circ I_2=I_1+I_2-\varepsilon I_1I_2, \tag{33}$$

где ε имеет произвольное значение. В случае меры (30) имеем $\varepsilon=k^{-1}\left(1-q\right)$.

Закон композиции (33) обладает свойством коммутативности $I_1\circ I_2=I_2\circ I_1$, ассоциативности $\left(I_1\circ I_2\right)\circ I_3=I_1\circ\left(I_2\circ I_3\right)$, имеется единичный элемент $I\circ E=I$ и обратный элемент $I\circ I^{-1}=E$.

Единичному элементу абелевой группы соответствует значение $I=0$, а обратный элемент обозначается как I^{-1}. Из свойства $I\circ I^{-1}=E$ вытекает выражение для обратного элемента

$$I^{-1}=-\frac{I}{1-\varepsilon I}. \tag{34}$$

Запишем некоторые равенства для элементов группы

$$\begin{gathered}\frac{1}{I}+\frac{1}{I^{-1}}=\varepsilon,\ (1-\varepsilon I)\left(1-\varepsilon I^{-1}\right)=1,\ I=-\frac{I^{-1}}{1-\varepsilon I^{-1}},\\ I_1=I\circ I_2^{-1}=\frac{I-I_2}{1-\varepsilon I_2},\ I_2=I_1^{-1}\circ I=\frac{I-I_1}{1-\varepsilon I_1},\\ (I_1\circ I_2)^{-1}=I_2^{-1}I_1^{-1},\ \frac{1}{I_1^{-1}\circ I_2}+\frac{1}{I_2^{-1}\circ I_1}=\varepsilon,\\ (1-\varepsilon I)=(1-\varepsilon I_1)(1-\varepsilon I_2),\\ I_1+I_2+I_3-\varepsilon(I_1I_2+I_2I_3+I_3I_1)+\varepsilon^2I_1I_2I_3=0.\end{gathered} \tag{35}$$

Определение n-й степени элемента $I^{(n)}=I\circ I\circ\ldots\circ I$ позволяет получить квадрат элемента

$$I^{(2)}=I\circ I=2I-\varepsilon I^2=I_1^{(2)}\circ I_2^{(2)}=I_1^{(2)}+I_2^{(2)}-\varepsilon I_1^{(2)}I_2^{(2)}. \tag{36}$$

Решая уравнение (36), получим «квадратный корень» элемента $I^{(2)}$:

$$I=\frac{I^{(2)}}{1+\sqrt{1-\varepsilon I^{(2)}}}. \tag{37}$$

Взаимосвязь этих элементов определяется соотношением

$$\sqrt{1-\varepsilon I^{(2)}}=1-\varepsilon I. \tag{38}$$

Значение $(1/\varepsilon)$ не является элементом группы, так как обратный элемент становится неопределенным. Однако выполняется формальное соотношение

$$I\circ\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon}. \tag{39}$$

Далее рассмотрим общий случай зависимости информации различия от полунормы отношения распределений. Воспользуемся мультипликативностью полунорм для независимых систем и законом композиции (33). Тогда получим следующее уравнение:

$$(1-\varepsilon I)\frac{d\ln N}{dI}=\lambda, \tag{40}$$

справедливое для исходных систем. Решением уравнения является функция

$$I=\frac{1}{\varepsilon}\left[1-(N)^{-\varepsilon/\lambda}\right]. \tag{41}$$

Таким образом, имеем семейство мер информаций различия, зависящих от значений λ и ε. Степенная функция полунормы в (41) изучалась в работе [5]. При $\varepsilon=k^{-1}(1-q)$ и $\lambda=k^{-1}$ из (41) вытекает информация различия (30). Отметим также еще две меры, обобщающие известные функционалы. Полагая $\varepsilon=k^{-1}(t-1)$ и $\lambda=-k^{-1}$, имеем двухпараметрическую информацию различия

$$I=\frac{I_{q,t}}{G^{1-t}}=\frac{k}{t-1}\left[1-\left(\frac{\sum\limits_{i}^{m}\sum\limits_{j=s}^{r}G_ip_{ij}^{q}u_{ij}^{1-q}}{\sum\limits_{i}^{m}\sum\limits_{j=s}^{r}G_ip_{ij}}\right)^{(t-1)/(q-1)}\right], \tag{42}$$

являющейся квантовым аналогом меры Шарма – Миттала $I_{q,t} = k(t-1)^{-1}\left\{1-\left[\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right]^{(t-1)/(q-1)}\right\}$ [13]. Значение $t=1$ соответствует мере Реньи (31). Если $t=q$, то получим однопараметрическую информацию различия (30). Квантовый аналог Кульбака (12) вытекает при $t=q=1$ и $u_{ij}=p_{0ij}$. При $\lambda = k^{-1}q$ и $\varepsilon = k^{-1}q(1-q)$ следует мера

$$I = \frac{I_q}{G^{q(1-q)}} = \frac{k}{q(1-q)}\left[1-\frac{\sum_i^m\sum_{j=s}^r G_i p_{ij}^q u_{ij}^{1-q}}{\sum_i^m\sum_{j=s}^r G_i p_{ij}}\right], \tag{43}$$

которая представляет собой квантовый аналог информации различия Вайда [14]

$$I = k[q(1-q)]^{-1}\left(1-\sum_i^m p_i^q u_i^{1-q}\right).$$

Наконец, при $\varepsilon = 0$ из (41) вытекает уравнение

$$\frac{d\ln N}{dI} = \lambda \tag{44}$$

для семейства аддитивных мер с $I = I_1 + I_2$. Решением уравнения (44) является мера

$$I = \frac{1}{\lambda}\ln N, \tag{45}$$

которая при $\lambda = k^{-1}$ равняется квантовому аналогу информации различия Реньи (31).

Заключение

Приводятся выражения параметрических информаций различия при нелинейном законе композиции в абелевой группе информаций различия на случай квантовых неэкстенсивных систем в расширенной парастатистике. Рассматривается вывод семейства параметрических информаций различия, из которого вытекают известные и новые меры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарипов Р.Г. Новые меры и методы в теории информации. – Казань: Изд-во КГТУ, 2005. – 364 с.
2. Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. – N.Y.: Springer, 2009. – 382 p.
3. Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. – Казань: Изд-во КГТУ, 2010. – 404 с.
4. Naudts Jan. Generalized Thermostatistics. – London: Springer, 2011. – 201 p.
5. Taneja I.J. // Adv. Imaging Electron Phys. – 1995. – V. 91. – P. 37.
6. Зарипов Р.Г. // Изв. вузов. Физика. – 2019. – Т.62. – № 1. – С. 36.
7. Bose S.N. // Zeitschrift für Physik. – 1924. – V. 26. – P. 178.
8. Gentile G. // Nuovo Cimento. – 1942. – V. 19. – No. 4. – P. 109.
9. Havrda J., Charvat F. // Kybernetika. – 1967. – V. 3. – P. 30.
10. Daroczy Z. // Inform. and Contr. – 1970. – V. 16. – P. 36.
11. Rathie P.N., Kannappan Pl. // Inform. and Contr. – 1972. – V. 20. – P. 38–45.
12. Renyi A. Probability Theory. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1970. – 573 p.
13. Sharma B.D. and Mittal D.P. // J. Math. Sci. – 1975. – V. 10. – P. 28.
14. Vaida I. Theory of Statistical Inference and Information. – London: Kluwer Academic Press, 1989. – 436 p.

Поступила в редакцию 05.04.2021.

Зарипов Ринат Герфанович, д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией, зам. руководителя ИММ ФИЦ КазНЦ РАН по научной работе, e-mail: zaripov@imm.knc.ru.