

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 539.1.01

DOI: 10.17223/00213411/64/7/126

В.В. ОБУХОВ^{1,2}, К. МЫРЗАКУЛОВ^{3,4}, У.А. ГУСЕЛЬНИКОВА¹, А. ЖАДЫРАНОВА³АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА – ФОКА
ДЛЯ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ТРАНЗИТИВНО НА ДВУМЕРНЫХ
ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ *

Найдены все внешние электромагнитные поля, в которых уравнение Клейна – Гордона – Фока для заряженной пробной частицы допускает операторы симметрии первого порядка при условии, что группы движений пространственно-временного многообразия G_3 , $r \leq 3$, действуют транзитивно на двумерном подпространстве V_2 .

Ключевые слова: уравнение Клейна – Гордона – Фока, операторы симметрии, группа движений пространственно-временного многообразия.

Введение

Уравнение Клейна – Гордона – Фока описывает релятивистскую динамику скалярной частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. В последнее время интерес к скалярным уравнениям значительно вырос в связи с проблемой тёмной материи и её возможным описанием в рамках скалярно-тензорной теории. Точные решения уравнения Клейна – Гордона – Фока используются для построения реалистичных моделей релятивистских квантово-механических систем. Возможность осуществления точного или надёжного приближённого интегрирования одночастичных уравнений движения заряженных пробных частиц даёт метод полного разделения переменных. Этот метод долгое время оставался единственно известным. В работах [1–6] можно найти подробную библиографию статей, посвященных теории полного разделения переменных.

После появления работ [7–11] начали развиваться методы некоммутативного интегрирования, в том числе для уравнения Дирака – Фока [12, 13]. Отметим следующее обстоятельство. В [1–4] найдены все внешние электромагнитные поля, в которых допускает полное разделение переменных уравнение Гамильтона – Якоби для пробного заряда. В работе [6] осуществлена полная классификация допустимых электромагнитных полей для просто транзитивных групп движений G_3 . При этом группа G_3 действует на неизотропных гиперповерхностях пространственно-временного многообразия. В обоих случаях под допустимыми понимаются поля, для которых существует соответствующая алгебра операторов симметрии уравнений Гамильтона – Якоби и Клейна – Гордона – Фока первого (для группы G_r) или не выше второго (для полного набора) порядка. Таким образом, настоящая работа является продолжением этих статей. Окончательная цель – классификация всех допустимых внешних электромагнитных полей как для операторов симметрии из полного набора, обеспечивающего полное разделение переменных, так и для операторов группы G_r .

1. Условия существования алгебры операторов симметрии

Рассмотрим пространственно-временное многообразие V_4 , на двумерном подпространстве которого действует транзитивно группа G_r , $r \leq 3$. Координатные индексы переменных локальной координатной системы $[u^i]$ пространства V_4 будем обозначать малыми буквами латинского алфавита: $i, j, k, l = 0, 1, \dots, 3$. Координатные индексы переменных локальной координатной системы подпространства V_2 выразим малыми буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$. Буквами a, b обозначим индексы, пробегающие значения от 1 до 3. Предметом нашего изучения являются условия существования алгебры операторов симметрии (интегралов движения) классического и квантового уравнений движения для заряженной скалярной пробной частицы во внешнем электромагнитном поле для случая, когда в пространстве действует описанная выше группа.

* Работа поддержана Министерством образования и науки Казахстана, грант AP08052034.

В книге Александра Зиновьевича Петрова [14], изданной в 1961 г., перечислены все пространственно-временные метрики, в которых действуют группы движений G_r , и приведены все операторы этих групп. Мы используем эти результаты с небольшими изменениями в обозначениях.

Уравнение Гамильтона – Якоби для заряженной пробной частицы во внешнем электромагнитном поле с потенциалом A_i имеет вид

$$\hat{H} = g^{ij} P_i P_j = m, \quad P_i = p_i + A_i, \quad p_i = \partial_i \varphi. \quad (1)$$

Интегралы движения свободного уравнения Гамильтона – Якоби задаются векторными полями Киллинга ξ_a^i :

$$\hat{Y}_a = \xi_a^i p_i. \quad (2)$$

Как известно [6, 8–10], при ненулевом электромагнитном поле уравнение (1) допускает интегралы движения вида (2), если $\hat{Y}_a$ коммутируют с $\hat{H}$ относительно скобок Пуассона:

$$[H, \hat{Y}_a]_P = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial p_i} = 0. \quad (3)$$

Необходимое и достаточное условие этого имеет вид

$$(\xi_a^j A_j)_{,i} = \xi_a^j F_{ij}. \quad (4)$$

Таким образом, в отличие от свободного уравнения Гамильтона – Якоби, в общем случае уравнение (1) интегралов движения первого порядка не имеет. Система уравнений (4) определяет множество допустимых электромагнитных полей, в которых такие интегралы, задаваемые группой G_r , существуют. Заметим, что условие (4) справедливо и в случае n -мерного пространства.

В работах [6, 10] было доказано, что система уравнений (4) задаёт допустимое электромагнитное поле и для уравнения Клейна – Гордона – Фока:

$$\hat{H}\varphi = (g^{ij} \hat{P}_i \hat{P}_j)\varphi = m\varphi, \quad \hat{P}_i = -i\hat{\nabla}_i + A_i. \quad (5)$$

Здесь φ – поле скалярной частицы с массой m ; $\hat{\nabla}_i$ – оператор ковариантной производной со связностью, согласованной с метрикой; $\hat{\nabla}_i$ отвечает оператору частной производной $\hat{\partial}_i = i p_i$.

Таким образом, алгебра операторов действующей в пространстве группы является алгеброй операторов симметрии для уравнений Гамильтона – Якоби и Клейна – Гордона – Фока в допустимых электромагнитных полях. Заметим, что линейные по импульсам интегралы движения вида не обязательно образуют алгебру группы G_r . Более того, их может быть меньше r . При этом условия существования допустимого электромагнитного поля будут менее жесткими (см. [6–10]).

Согласно классификации Бианки по вещественным неизоморфным структурам, в зависимости от набора структурных постоянных $C_{\alpha\beta}^\gamma$ имеются следующие структуры двухпараметрических и трёхпараметрических групп:

$$\left\{ \begin{array}{lll} G_2(I): & C_{\alpha\beta}^\gamma = 0; \\ G_2(II): & C_{12}^\alpha = \delta_1^\alpha; \\ G_3(I): & C_{\alpha\beta}^\gamma = 0; \\ G_3(II): & C_{12}^\alpha = 0, \quad C_{13}^\alpha = 0, \quad C_{23}^\alpha = \delta_1^\alpha; \\ G_3(III): & C_{12}^\alpha = 0, \quad C_{13}^\alpha = 0, \quad C_{23}^\alpha = \delta_1^\alpha; \\ G_3(IV): & C_{12}^\alpha = 0, \quad C_{13}^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = \delta_1^\alpha + \delta\alpha_1; \\ G_3(V): & C_{12}^\alpha = 0, \quad C_{13}^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = \delta_2^\alpha; \\ G_3(VI): & C_{12}^\alpha = 0, \quad C_{13}^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = q\delta_2^\alpha \quad (q \neq 0,1); \\ G_3(VII): & C_{12}^\alpha = 0, \quad C_{13}^\alpha = \delta_2^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = 2\delta_2^\alpha \cos\alpha, \quad \alpha = \text{const}; \\ G_3(VIII): & C_{12}^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad C_{13}^\alpha = 2\delta_2^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = \delta_3^\alpha + q\delta_2^\alpha \quad (q \neq 0,1); \\ G_3(IX): & C_{12}^\alpha = \delta_3^\alpha, \quad C_{13}^\alpha = -\delta_2^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = \delta_1^\alpha. \end{array} \right. \quad (6)$$

Используя результаты работы [14], исследуем систему уравнений (4) для случая, когда группа действует на двумерных пространствах транзитивности. При этом выбрана калибровка потенциала, при которой

$$A_0 = 0.$$

2. Группа $G_2(N)$

2.1. Группа $G_2(I)$

1) Если группа $G_2(I)$ действует на неизотропном подпространстве транзитивности или, имея особый оператор, на изотропном, то векторные поля Киллинга принимают вид

$$\xi_1^i = \delta_1^i, \quad \xi_2^i = \delta_2^i. \quad (7)$$

Из уравнений Киллинга следует

$$ds^2 = a_{ij} du^i du^j, \quad a_{0i} = \delta_{0i} \quad a_{ij} = a_{ij}(u^0, u^3). \quad (8)$$

Здесь и далее

$$a_{ij} = a_{ij}(u^0, u^3).$$

В случае изотропной поверхности транзитивности, дополнительно к этому,

$$g_{a1} = \delta_{a3} g_{a3}.$$

Подставим (7) в систему (4). В результате получим потенциал допустимого электромагнитного поля:

$$A_0 = 0, \quad A_a = \alpha_a(u^0, u^3). \quad (9)$$

2) Пусть теперь группа $G_2(1)$ не имеет особого оператора и действует на изотропном подпространстве транзитивности. В этом случае векторное поле Киллинга можно записать в виде

$$\xi_1^i = \delta_2^i, \quad \xi_2^i = u^3 \delta_2^i - \delta_1^i. \quad (10)$$

Данная группа действует на двух пространствах, задаваемых метриками

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad ds^2 = a_{22}(du^2)^2 + [a_{33} + 2u^1 a_{23} + (u^1)^2 a_{22}](du^3)^2 + 2(a_{23} + u^1 a_{22})du^3 du^2 + \\ \quad + 2a_{01}du^0 du^1 + 2a_{03}du^0 du^3, \\ b) \quad ds^2 = a_{22}(du^2)^2 + [a_{33} + 2u^1 a_{23} + (u^1)^2 a_{22}](du^3)^2 + 2(a_{23} + u^1 a_{22})du^3 du^2 + \\ \quad + 2a_{13}du^1 du^3 + e(du^0)^2, \quad e^2 = 1. \end{array} \right. \quad (11)$$

Система уравнений (4) распадается на две подсистемы:

$$\xi_{\alpha,3}^\beta A_\beta = -\xi_\alpha^\beta A_{3,\beta}; \quad (12)$$

$$\xi_\alpha^\gamma A_{\beta,\gamma} = C_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma = 0, \quad (13)$$

где

$$A_\alpha = \xi_\alpha^\beta A_\beta.$$

Решение этих систем имеет вид

$$A_\beta = \alpha_\beta(u^0, u^3), \quad A_3 = u^1 \alpha_2 - \beta(u^0, u^3). \quad (14)$$

Выражая функции A_a через A_a , получим окончательно

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_1(u^0, u^3)u^3, \quad A_2 = \alpha_1(u^0, u^3), \quad A_3 = u^1 \alpha_1 + \beta(u^0, u^3). \quad (15)$$

2.2. Группа $G_2(II)$

1) Если группа $G_2(II)$ действует на неизотропном подпространстве транзитивности или, имея особый оператор, на изотропном, то векторные поля Киллинга принимают вид

$$\xi_1^i = \delta_1^i, \quad \xi_2^i = u^1 \delta_1^i - \delta_2^i. \quad (16)$$

Из уравнений Киллинга следует

$$ds^2 = a_{11}(du^1)^2 \exp 2u^2 + a_{22}(du^2)^2 + a_{33}(du^3)^2 + 2a_{23}du^3 du^2 + 2a_{12}du^1 du^2 \exp u^2 + \\ + 2a_{13}du^1 du^3 \exp u^2 + e(du^0)^2, \quad e^2 = 1, \quad a_{ab} = a_{ab}(u^0, u^3).$$

В случае изотропной поверхности транзитивности

$$g_{a1} = \delta_{a3} a_{a3} \exp u^2.$$

2) Если группа не содержит особого оператора, решение уравнения Киллинга имеет вид

$$ds^2 = a_{11}(du^1)^2 \exp 2u^2 + a_{33}(du^3)^2 + 2a_{13}du^3 du^1 \exp u^2 + 2a_{23}du^2 du^3 + e(du^0)^2.$$

Система (4) после подстановки (16) распадается на две подсистемы:

$$\xi_\alpha^\beta A_{3,\beta} = 0 \rightarrow A_3 = \gamma(u^0, u^3); \quad (17)$$

$$\xi_\alpha^\gamma A_{\beta,\gamma} = C_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma, \quad (18)$$

где

$$A_\alpha = \xi_\alpha^\beta A_\beta.$$

Решение этих систем запишем как

$$A_1 = \alpha(u^0, u^3) \exp u^2, \quad A_2 = u^1 \alpha(u^0, u^3) \exp u^2 - \beta(u^0, u^3). \quad (19)$$

Выражая функции A_a через A_a , окончательно получим

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha(u^0, u^3) \exp u^2, \quad A_2 = \beta(u^0, u^3), \quad A_3 = \gamma(u^0, u^3). \quad (20)$$

3. Группа $G_3(N)$

3.1. Группы G_3 , действующие транзитивно на V_2

Все допустимые электромагнитные поля для групп, действующих транзитивно на неизотропных гиперповерхностях пространственно-временного многообразия, найдены в работе [6]. Если группа G_3 действует транзитивно на подпространстве V_2 , то она является максимальной группой для V_2 и поэтому имеет постоянную кривизну. В книге [14] перечислены все такие группы и метрики всех пространств, имеющих двумерные подпространства постоянной кривизны.

А. Группы $G_3(VI)$, $G_3(VII)$

Метрика:

$$ds^2 = a(u^0, u^3)[(du^1)^2 + e(du^2)^2] + b(u^0, u^3)[(du^2)^2 + e_0(du^3)^2], \quad e^2 = e_0^2 = 0. \quad (21)$$

Операторы группы:

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^1 \hat{p}_2 - e u^2 \hat{p}_1. \quad (22)$$

В. Группа $G_3(IX)$, действующая транзитивно на V_2

1) Метрика:

$$ds^2 = a(u^0, u^3)[(du^1)^2 + e \cos^2 u^1 (du^2)^2] + b(u^0, u^3)[(du^2)^2 + e_0(du^3)^2], \quad e^2 = e_0^2 = 1. \quad (23)$$

Операторы группы:

$$a) \quad e = 1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \cos u^2 \hat{p}_1 + \cos u^1 \frac{\sin u_2}{\sin u_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = -\partial_2 \hat{X}_2, \quad (24)$$

$$b) \quad e = -1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \operatorname{ch} u^2 \hat{p}_1 + \cos u^1 \frac{\operatorname{sh} u_2}{\sin u_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = \partial_2 \hat{X}_2. \quad (25)$$

2) Метрика:

$$ds^2 = a(u^0, u^3)[(du^1)^2 + e^2 u^1 (du^2)^2] + b(u^0, u^3)[(du^2)^2 + e_0(du^3)^2], \quad e^2 = e_0^2 = 1. \quad (26)$$

Операторы группы:

$$a) \quad e = -1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \cos u^2 \hat{p}_1 - \operatorname{sh} u^1 \frac{\sin u_2}{\operatorname{ch} u_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = -\partial_2 \hat{X}_2; \quad (27)$$

$$b) \quad e = 1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \operatorname{ch} u^2 \hat{p}_1 - \operatorname{sh} u^1 \frac{\operatorname{sh} u_2}{\operatorname{ch} u_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = \partial_2 \hat{X}_2. \quad (28)$$

Найдём потенциалы допустимых электромагнитных полей. Рассмотрим группу с операторами (24). Из системы уравнений (4) получаем

$$A_{i,1} = A_{i,2} = 0.$$

С учётом этого, из оставшихся уравнений системы (4) следует

$$\delta_{i1} A_2 - \delta_{i2} A_1 = 0.$$

Таким образом, потенциал допустимого электромагнитного поля выразим так:

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = \alpha(u^0, u^3). \quad (29)$$

Проводя аналогичные расчёты для остальных наборов операторов группы, убеждаемся, что во всех этих вариантах потенциал допустимого электромагнитного поля имеет тот же вид (29).

3.2. Группа G_3 , действующая транзитивно на V_2^*

Существует только одна трёхпараметрическая группа движений, действующая на изотропном двумерном подпространстве пространственно-временного многообразия: $G_3(II)$. Метрика пространства и операторы этой группы имеют вид

$$ds^2 = a(u^0, u^3)[(du^2)^2 + 2du^1 du^2] + b(u^0, u^3)(du^3)^2 + e(du^0)^2, \quad e^2 = 0; \quad (30)$$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^2 \hat{p}_1 - u^3 \hat{p}_2. \quad (31)$$

Найдём допустимые электромагнитные поля. Для этого подставим (31) в (4). В результате получим

$$A_{i,1} = A_{i,2} = 0, \quad A_1 \delta_{2i} = A_2 \delta_{3i}. \quad (32)$$

Таким образом, и в этом случае окончательное решение запишем в форме

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = \alpha(u^0, u^3). \quad (33)$$

Заключение

В заключение отметим следующие возможности использования полученных результатов.

1. Рассмотренные метрики могут найти применение в космологии, особенно при изучении процессов, происходящих на ранних этапах эволюции Вселенной и при построении моделей взаимодействия аксионного поля с электромагнитным, что представляет интерес при изучении проблемы тёмной материи (см., например, [15–17]).

2. Результаты можно использовать при получении точных самосогласованных решений в общей теории относительности, в скалярно-тензорной теории гравитации, в проблеме Вайдья, а также при интегрировании полевых уравнений в других гравитационных теориях (см., например, [18–20]).

3. Результаты могут применяться при построении теории некоммутативного интегрирования квантовых уравнений движения в сильном гравитационном поле в присутствии полей калибровочной природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2020. – Т. 63. – № 7. – С. 21–25.
2. Obukhov V.V. // Symmetry. – 2020. – V. 12. – P. 1289.
3. Obukhov V.V. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2020. – V. 17. – No. 9. – P. 2050186, DOI: 10.1142/S0219887820501868.
4. Obukhov V.V. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2021. – V. 18. – P. 2150036. DOI: 10.1142/S0219887821500365.
5. Bagrov V.G. and Obukhov V.V. // Theor. Math. Phys. – 1993. – V. 97. – No. 2. – P. 1275–1289. DOI: 10.1007/BF01016874.
6. Obukhov V.V. // Symmetry. – 2021. – V. 13. – No. 4. – P. 727; <https://doi.org/10.3390/sym13040727>.

7. Shapovalov A.V. and Shirokov I.V. // Theor. Math. Phys. – 1996. – V. 106. – P. 3–15.
8. Magazev A.A., Shirokov I.V., and Yurevich Y.A. // Theor. Math. Phys. – 2008. – V. 156. – P. 1127–1140. DOI: 10.4213/tmf6240.
9. Magazev A.A. // Math. Phys. Anal. Geom. – 2021. – V. 24. – No. 2. – P. 11. DOI: 10.1007/s11040-021-09385-3.
10. Magazev A.A. // Theor. Math. Phys. – 2012. – V. 173. – P. 1654–1667.
11. Shapovalov A.V. and Breev A.I. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2018. – V. 15. – P. 1850085.
12. Бреев А.И., Шаповалов А.В. // Изв. вузов. Физика. – 2016. – Т. 59. – № 11. – С. 193–196.
13. Shapovalov A. and Breev A. // Symmetry. – 2020. – V. 12. – P. 1867. DOI: 10.3390/sym12111867.
14. Петров А.З. // Пространства Эйнштейна. – М.: Наука, 1961. – 495 с.
15. Nojiri S., Odintsov S.D., and Oikonomou V.K. // Ann. Phys. – 2020. – V. 418. – P. 168186.
16. Odintsov S.D. and Oikonomou V.K. // EPL. – 2020. – V. 129. – No. 4. – P. 40001.
17. Capozziello S., De Laurentis M., Nojiri S., and Odintsov S.D. // Phys. Rev. D. – 2017. – V. 95. – No. 8. – P. 083524.
18. Осетрин К.Е., Филиппов А.Е., Осетрин Е.К. // Изв. вузов. Физика. – 2018. – Т. 61. – № 8. – С. 17–23.
19. Osetrin E. and Osetrin K. // J. Math. Phys. – 2017. – V. 58. – No. 11. – P. 112504; <https://doi.org/10.1063/1.5003854>
20. Osetrin K., Filippov A., and Osetrin E. // Mod. Phys. Lett. A. – 2016. – V. 31. – No. 6. – P. 1650027; <https://doi.org/10.1142/S0217732316500279>.

Поступила в редакцию 11.05.2021.

¹Томский государственный педагогический университет, г. Томск, Россия

²Томский университет автоматизированных систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия

³Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Республика Казахстан

⁴Евразийский международный центр теоретической физики Ратбая Мырзакулова, г. Нур-Султан, Республика Казахстан

Обухов Валерий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор ТГПУ, ведущ. науч. сотр. Международной лаборатории теоретической космологии ТУСУРа, e-mail: obukhov@tspu.edu.ru;

Мырзакулов Кайрат Ратбаевич, к.ф.-м.н., и.о. доцента каф. общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, ЕМЦТФ, e-mail: krmrzhakulov@gmail.com;

Гусельникова Ульяна Александровна, аспирантка ТГПУ, e-mail: guselnikova.ulyana@yandex.ru;

Жадыранова Алия, ст. преподаватель каф. общей и теоретической физики ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, e-mail: azhadyranova@gmail.com.