МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

VIII Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 26–30 мая 2021 г.

Под общей редакцией И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2021

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-25

ГИБРИДНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Петрива Н.В., Пауль С.В.
Томский государственный университет
nata0338@yandex.ru, paulsv82@mail.ru

Введение

Теория массового обслуживания представляет собой теоретические основы эффективного конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания (СМО). В основу теории массового обслуживания легла теория потоков однородных событий, разработанная советским математиком А.Я. Хинчиным [1]. СМО могут быть двух видов: с ожиданием или с потерями. В первом случае заявка, пришедшая в момент, когда нужный прибор занят, остается ждать момента обслуживания. Во втором случае она «покидает систему» и не требует внимания СМО. В середине 20-го века большую роль стали играть телекоммуникационные системы, для которых, в отличие от классических СМО, характерна ситуация, когда заявка, заставшая обслуживающий прибор занятым, не встает в очередь, а уходит на орбиту, откуда через некоторые промежутки времени предпринимает попытки вновь обратиться за обслуживанием. Такие модели описываются в виде СМО с повторными вызовами.

СМО с повторными вызовами – математическая модель, применяемая для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем. Характерная черта данной модели заключается в наличии повторных обращений заявок к прибору после неудачной попытки обслуживания спустя некоторое случайное время. Такие ситуации могут быть вызваны не только отсутствием свободных серверов в моменты поступления заявок в систему, но техническими причинами.

В данной работе исследуется тандемная СМО, содержащая бункер с конечным числом мест для ожидания перед первой фазой и орбиту на второй фазе. Из-за различий дисциплин ожидания система была названа гибридной. Данная система массового обслуживания может применяться, например, при моделировании удаленного доступа к приложению/файлу/БД, в котором абоненты сначала авторизуются, после чего получают обновленные данные.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (рис. 1), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ.

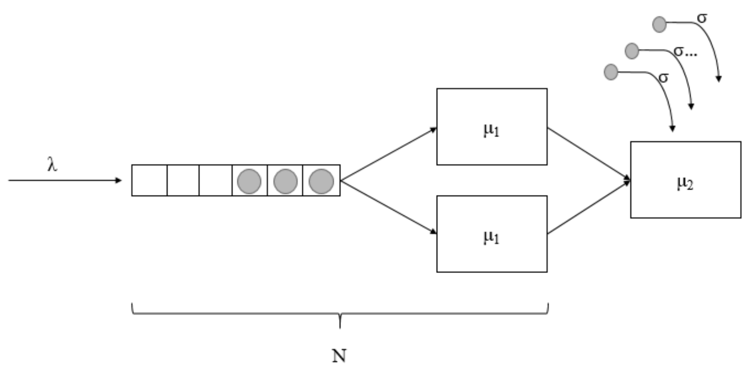

Рис. 1. Гибридная тандемная система массового обслуживания

Каждая заявка последовательно проходит две фазы обслуживания. Первая фаза системы – это система с двумя обслуживающими приборами и одним конечным бункером, в котором $N-2$ места для ожидания. Таким образом, на первой фазе одновременно может находиться не более N заявок. Вторая фаза – это система массового обслуживания с повторными вызовами и бесконечной орбитой. Если при поступлении заявки на первую фазу она обнаруживает, что хотя бы один из приборов свободен, то поступившая заявка занимает его и обслуживается время, распределенное по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_1. В противном случае, если оба прибора заняты, заявка попадает в бункер, где ожидает своей очереди обслуживания.

После обслуживания на первой фазе заявка переходит на вторую фазу, при этом, если она застает прибор на второй фазе свободным, она занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_2. В противном случае поступившая на вторую фазу заявка переходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ, после которой заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его занять. Если прибор свободен, то заявка занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается на орбиту для реализации следующей задержки случайной продолжительности с параметром σ. После обслуживания на второй фазе заявка покидает систему.

Найдем распределения вероятностей числа заявок на второй фазе методом асимптотического анализа [2] в условии большой задержки заявок на орбите на второй фазе [3].

1.1. Система уравнений Колмогорова

Обозначим: процесс $i_1(t)$ – число заявок на первой фазе, $i_2(t)$ – число заявок орбите, $k(t)$ определяет состояние прибора второй фазе следующим образом: 0 – прибор свободен, 1 – прибор занят.

Рассмотрим трехмерный Марковский процесс $\{i_1(t), i_2(t), k(t)\}$, для распределения вероятностей $P_k(i_1, i_2, t) = P\{i_1(t) = i, i_2(t) = i, k(t) = k\}$ которого составим систему уравнений Колмогорова в стационарном режиме:

$i_1 = 0$:

$$-(\lambda + i_2\sigma)P_0(0, i_2) + \mu_2 P_1(0, i_2) = 0,$$

$$-(\lambda + \mu_2)P_1(0, i_2) + \mu_1 P_1(1, i_2 - 1) + \mu_1 P_0(1, i_2) + (i_2 + 1)\sigma P_0(0, i_2 + 1) = 0,$$

$i_1 = 1$:

$$-(\lambda + \mu_1 + i_2\sigma)P_0(1, i_2) + \mu_2 P_1(1, i_2) + \lambda P_0(0, i_2) = 0,$$

$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_1(1, i_2) + \mu_1 P_1(2, i_2 - 1) + \mu_1 P_0(2, i_2) + \lambda P_1(0, i_2) + (i_2 + 1)\sigma P_0(1, i_2 + 1) = 0,$$

$1 < i_1 < N$:

$$-(\lambda + 2\mu_1 + i_2\sigma)P_0(i_1, i_2) + \mu_2 P_1(i_1, i_2) + \lambda P_0(i_1 - 1, i_2) = 0,$$

$$-(\lambda + 2\mu_1 + \mu_2)P_1(i_1, i_2) + 2\mu_1 P_1(i_1 + 1, i_2 - 1) + 2\mu_1 P_0(i_1 + 1, i_2) +$$
$$+\lambda P_1(i_1 - 1, i_2) + (i_2 + 1)\sigma P_0(i_1, i_2 + 1) = 0,$$

$i_1 = N$:

$$-(2\mu_1 + i_2\sigma)P_0(N, i_2) + \mu_2 P_1(N, i_2) + \lambda P_0(N - 1, i_2) = 0,$$

$$-(2\mu_1 + \mu_2)P_1(N, i_2) + \lambda P_1(N - 1, i_2) + (i_2 + 1)\sigma P_0(N, i_2 + 1) = 0.$$

1.2. Метод частичных характеристических функций

Введем частичные характеристические функции: $H_k\left(i_1,u\right)=\sum_{i_2=0}^{\infty}e^{jui_2}P_k\left(i_1,i_2\right)$, $j=\sqrt{-1}$. Получим систему уравнений для частичных характеристических функций:

$$i_1=0:\ -\lambda H_0(0,u)+j\sigma\frac{\partial H_0(0,u)}{\partial u}+\mu_2 H_1(0,u)=0,$$

$$-\left(\lambda+\mu_2\right)H_1(0,u)+\mu_1 e^{ju}H_1(1,u)+\mu_1 H_0(1,u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(0,u)}{\partial u}=0,$$

$$i_1=1:\ -\left(\lambda+\mu_1\right)H_0(1,u)+j\sigma\frac{\partial H_0(1,u)}{\partial u}+\mu_2 H_1(1,u)+\lambda H_0(0,u)=0,$$

$$-\left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right)H_1(1,u)+\mu_1 e^{ju}H_1(2,u)+\mu_1 H_0(2,u)+\lambda H_1(0,u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(1,u)}{\partial u}=0,$$

$$1<i_1<N:\ -\left(\lambda+2\mu_1\right)H_0\left(i_1,u\right)+j\sigma\frac{\partial H_0\left(i_1,u\right)}{\partial u}+\mu_2 H_1\left(i_1,u\right)+\lambda H_0\left(i_1-1,u\right)=0, \qquad (1),$$

$$-\left(\lambda+2\mu_1+\mu_2\right)H_1\left(i_1,u\right)+2\mu_1 e^{ju}H_1\left(i_1+1,u\right)+2\mu_1 H_0\left(i_1+1,u\right)+\lambda H_1\left(i_1-1,u\right)-$$

$$-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0\left(i_1,u\right)}{\partial u}=0,$$

$$i_1=N:\ -2\mu_1 H_0(N,u)+j\sigma\frac{\partial H_0(N,u)}{\partial u}+\mu_2 H_1(N,u)+\lambda H_0(N-1,u)=0,$$

$$-\left(2\mu_1+\mu_2\right)H_1(N,u)+\lambda H_1(N-1,u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(N,u)}{\partial u}=0.$$

Представим систему (1) в векторно-матричном виде. Введём вектор: $\mathbf{H}_k(u)=\left[H_k(0,u)\quad H_k(1,u)\quad \ldots\quad H_k(N,u)\right]$, $k=0{,}1$ и матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda+\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\mu_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu_1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

После подставим их в систему (1), получим систему уравнений в векторно-матричном виде:

$$\mathbf{H}_0(u)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}\right]+\mu_2\mathbf{H}_1(u)+j\sigma\mathbf{H}_0'(u)=0,$$

$$\mathbf{H}_1(u)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1 e^{ju}\mathbf{D}\right]+\mu_1\mathbf{H}_0(u)\mathbf{D}-j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}_0'(u)=0.$$

Просуммируем уравнения, тогда окончательно получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H}_0(u)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}\right]+\mu_2\mathbf{H}_1(u)+j\sigma\mathbf{H}_0'(u)=0,\\
&\mathbf{H}_1(u)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1e^{ju}\mathbf{D}\right]+\mu_1\mathbf{H}_0(u)\mathbf{D}-j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}_0'(u)=0,\\
&\mu_1\mathbf{H}_1(u)\mathbf{De}+j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}_0'(u)\mathbf{e}=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Данная система является основной в дальнейших исследованиях.

1.3. Распределение вероятностей числа заявок на первой фазе в гибридной тандемной системе

Вектор $\mathbf{r}$ с компонентами i_1 – распределение вероятностей числа заявок на первой фазе, имеет распределение

$$
r(i_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{i_1-1}\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{i_1}r(0)\ ,\ i_1=\overline{1,N}\ ,\ \sum_{i_1=0}^{N}r(i_1)=1\ .
$$

1.4. Асимптотика первого порядка

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma\to 0$). Выполним в (2) следующие замены: $\sigma=\varepsilon$, $u=\varepsilon w$, $\mathbf{H}_k(u)=\mathbf{F}_k(w,\varepsilon)$, получим

$$
\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}\right]+\mu_2\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)+j\frac{\partial\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=0\ ,
$$

$$
\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1e^{j\varepsilon w}\mathbf{D}\right]+\mu_1\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)\mathbf{D}-je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)}{\partial w}=0\ ,
$$

$$
\mu_1\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)\mathbf{De}+je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{e}=0\ .
$$

Теорема 1. Пусть $i_2(t)$ – число заявок на орбите второй фазы в тандемной гибридной системе, тогда

$\lim\limits_{\sigma\to 0}Me^{jw\sigma i_2(t)}=e^{jw\kappa_1}$, $\mathbf{r}_0\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\kappa_1\mathbf{I}\right]+\mu_2\mathbf{r}_1=0$, $\mathbf{r}_1\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1\mathbf{D}\right]+\mathbf{r}_0\left(\mu_1\mathbf{D}+\kappa_1\mathbf{I}\right)=0$,

κ_1 является решением уравнения $\mu_1\mathbf{r}_1\mathbf{De}-\mathbf{r}_0\kappa_1\mathbf{Ie}=0$. Здесь $\mathbf{r}_k$, $k=0,1$ – векторы с компонентами $\mathbf{r}_{i_1k}$, $i_1=\overline{0,N}$, где $\mathbf{r}_{i_1k}$ – вероятность, того, что на первой фазе i_1 заявок, а на второй фазе прибор находится в состоянии k.

Таким образом, получили систему уравнений, которая позволит нам найти величину κ_1.

Асимптотика первого порядка, т.е. доказанная теорема, определяет лишь асимптотическое среднее значение κ_1 числа заявок в системе на второй фазе. Для более детального исследования процесса $i_2(t)$ рассмотрим асимптотику второго порядка.

1.5. Асимптотика второго порядка

В системе (2) положим $\mathbf{H}_k(u)=\mathbf{H}_k^{(2)}(u)e^{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}}$, получим

$$
\mathbf{H}_0^{(2)}(u)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\kappa_1\mathbf{I}\right]+\mu_2\mathbf{H}_1^{(2)}(u)+j\sigma\mathbf{H}_0^{(2)\prime}(u)=0\ ,
$$

$$
\mathbf{H}_1^{(2)}(u)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1e^{ju}\mathbf{D}\right]+\mathbf{H}_0^{(2)}(u)\left(\mu_1\mathbf{D}+\kappa_1e^{-ju}\mathbf{I}\right)-j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}_0^{(2)\prime}(u)=0\ ,
$$

$$
\mu_1\mathbf{H}_1^{(2)}(u)\mathbf{De}-\kappa_1e^{-ju}\mathbf{H}_0^{(2)}(u)\mathbf{e}+j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}_0^{(2)\prime}(u)\mathbf{e}=0\ .
$$

Далее в системе сделаем следующую замену $\sigma=\varepsilon^2$, $u=\varepsilon w$, $\mathbf{H}_k^{(2)}(u)=\mathbf{F}_k^{(2)}(w,\varepsilon)$ и получим систему вида

$$
\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\kappa_1\mathbf{I}\right]+\mu_2\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0\ ,
$$

$$\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\varepsilon)\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1 e^{ju}\mathbf{D}\right]+\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)\left(\mu_1\mathbf{D}+\kappa_1 e^{-ju}\mathbf{I}\right)-j\varepsilon e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0\,,$$

$$\mu_1\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\varepsilon)\mathbf{D}\mathbf{e}-\kappa_1 e^{-ju}\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)\mathbf{e}+j\varepsilon e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{e}=0\,.$$

Теорема 2. Пусть $i_2(t)$ – число заявок на орбите второй фазе в тандемной гибридной системе, тогда $\lim\limits_{\sigma\to 0} E\exp\left\{jw\sqrt{\sigma}\left(i(t)-\frac{\kappa_1}{\sigma}\right)\right\}=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}$, где κ_2 определяется равенством $\kappa_2=\frac{\kappa_1\mathbf{r}_0\mathbf{e}-\kappa_1\boldsymbol{\varphi}_0\mathbf{e}+\mu_1\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{e}}{\mathbf{r}_0\mathbf{e}+\kappa_1\boldsymbol{\psi}_0\mathbf{e}-\mu_1\mathbf{D}\boldsymbol{\psi}_1\mathbf{e}}$. Здесь векторы $\mathbf{r}_k$ определены выше, величины φ_0, φ_1, ψ_0, ψ_1, определяются системами

$$\boldsymbol{\varphi}_0\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\kappa_1\mathbf{I}\right]+\mu_2\boldsymbol{\varphi}_1=0\,,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0\left[\mu_1\mathbf{D}+\kappa_1\mathbf{I}\right]+\boldsymbol{\varphi}_1\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1\mathbf{D}\right]=\kappa_1\mathbf{r}_0\mathbf{I}-\mu_1\mathbf{r}_1\mathbf{D}\,,$$

$$\boldsymbol{\psi}_0\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\kappa_1\mathbf{I}\right]+\mu_2\boldsymbol{\psi}_1=\mathbf{r}_0\,,$$

$$\boldsymbol{\psi}_0\left[\mu_1\mathbf{D}+\kappa_1\mathbf{I}\right]+\boldsymbol{\psi}_1\left[\lambda\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mu_2\mathbf{I}+\mu_1\mathbf{D}\right]=-\mathbf{r}_0\,.$$

Вторая асимптотика показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа $i_2(t)$ заявок на второй фазе является гауссовским распределением с математическим ожиданием κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ.

Заключение

В результате исследования тандемной системы массового обслуживания, которая содержит конечный бункер на первой фазе и орбиту на второй фазе, было найдено распределения вероятностей числа заявок на орбите. Задача решена методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. Под редакцией Б.В. Гнеденко. – М.: 1963. – 236 с.
2. *Назаров А.А., Пауль С.В., Лизюра О.Д.* Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 48. – С. 13-20.
3. *Судыко Е.А., Назаров А.А.* Допредельные характеристики RQ-системы с конфликтами заявок // Научное творчество молодежи: материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции, 15-16 апреля 2010 г. – Томск, 2010. – Ч. 1. – С. 97–100.

DOI: 10.17223/978-5-907442-42-9-2021-26

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАБОТЫ НЕНАДЕЖНОГО УЗЛА ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ

Решетников О.А., Лапатин И.Л.
Томский государственный университет
oleg.reshetnikov.0411@gmail.com, ilapatin@mail.ru

Введение

В век информационных технологий большой популярностью пользуются телекоммуникационные системы. Зачастую математической моделью таковых являются RQ-системы, т.е. системы с повторными вызовами. Появились они благодаря работам американских ученых R.I. Wilkinson и J.W. Cohen еще в середине XX в., в которых особое внимание уделялось решению практических задач, возникающих в телефонных сетях, и описанию влияния эффекта повторных вызовов на производительность технических