ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 64, № 4 ФИЗИКА 2021

УДК 537.531 DOI: 10.17223/00213411/64/4/132

П.О. КАЗИНСКИЙ, В.А. РЯКИН

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ФОТОНОВ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОНДУЛЯТОРАХ [*]

Получены явные выражения для среднего числа закрученных фотонов, излученных заряженной частицей в эллиптическом ондуляторе, как в классическом приближении, так и с учетом квантовой отдачи. Показано, что для излучения, созданного частицей, движущейся вдоль эллиптической спирали с осью, совпадающей с осью, относительно которой определяется угловой момент закрученных фотонов, выполнено правило отбора: $m + n$ – четное число, где m – проекция полного углового момента закрученного фотона, а n – номер гармоники ондуляторного излучения. Это правило отбора обобщает известные правила отбора для излучения закрученных фотонов круговыми и плоскими ондуляторами и верно как в классическом режиме, так и после учета квантовой отдачи. Указан класс траекторий заряженных частиц, которые излучают закрученные фотоны, подчиняющиеся данному правилу отбора.

Ключевые слова: *закрученный фотон, угловой момент, ондулятор, излучение.*

Введение

К настоящему времени ондуляторы являются стандартным устройством для генерации мощного электромагнитного излучения с заданными свойствами в различных диапазонах частот. Известно, что круговые и плоские ондуляторы могут быть использованы в качестве ярких источников закрученных фотонов [1–7]. Свойства закрученных фотонов, излучаемых такими ондуляторами, подробно изучены в [1, 8–10]. В данной работе известные ранее результаты обобщаются на случай эллиптических ондуляторов, в которых заряженные частицы движутся по эллиптической спирали. Насколько нам известно, исследования свойств закрученных фотонов, излучаемых заряженными частицами в таких устройствах в недипольном режиме, ранее не проводились. Получим явные выражения для среднего числа закрученных фотонов, создаваемых эллиптическим ондулятором с учетом квантовой отдачи, испытываемой заряженной частицей за счет излучения фотона. В частности, будет доказано правило отбора: $m+n$ – четное число, где m – проекция полного углового момента закрученного фотона на ось ондулятора, а n – номер гармоники ондуляторного излучения. Данное правило отбора согласуется с правилами отбора, которым подчиняются закрученные фотоны, излученные в круговом и плоском ондуляторах [8–10].

Закрученные фотоны – это кванты электромагнитного поля, обладающие определенной спиральностью s, проекцией m полного углового момента на ось, вдоль которой распространяется фотон, проекцией k_3 импульса на эту ось и модулем перпендикулярной составляющей импульса $k_\perp$ [11, 12]. Эти стационарные состояния образуют полный набор, являются собственными для оператора проекции полного углового момента на ось 3 и в параксиальном режиме, $k_\perp/|k_3|\ll 1$, обладают проекцией орбитального углового момента на эту ось, $l=m-s$. Такие состояния электромагнитного поля используются для создания оптических пинцетов; в микроскопии – для увеличения контрастности изображения; в телекоммуникации и квантовой криптографии, где проекция углового момента играет роль дополнительного квантового числа, несущего информацию; при изучении вращательных степеней свободы квантовых объектов за счет возбуждения закрученными фотонами недипольных переходов (см. обзоры [13–17]). Кроме того, изучение свойств излучения в базисе закрученных фотонов позволяет увидеть такие его свойства, которые сложно обнаружить в плосковолновом базисе фотонов, обычно используемом при описании излучения. На данный момент разработаны различные типы детекторов, позволяющие регистрировать закрученные фотоны и находить количество и квантовые числа закрученных фотонов, из которых состоит приходящее в детектор электромагнитное излучение [18–27]. Поэтому полученные в данной рабо-

[*] Работа поддержана грантом РФФИ № 20-32-70023.

те выражения для среднего числа закрученных фотонов могут непосредственно наблюдаться в эксперименте.

В пункте «Общие формулы» для удобства читателя приводятся общие формулы, используемые далее для описания излучения закрученных фотонов эллиптическим ондулятором. Пункт «Излучение закрученных фотонов» является основной частью работы. Здесь получены явные выражения для среднего числа излученных закрученных фотонов и проанализированы их свойства. В Заключении сформулированы результаты данной работы и возможные направления дальнейших исследований. В работе используются обозначения и договоренности, принятые в работах [8–10]. В частности, используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$ и постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/(4\pi)$. Для согласованности обозначений всегда подразумевается, что $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$ и $z \equiv x_3$.

Общие формулы

Приведем некоторые общие формулы, необходимые для вычисления среднего числа закрученных фотонов, излученных заряженными частицами в эллиптическом ондуляторе. Траектория частицы с зарядом e в эллиптическом ондуляторе с длиной одной секции λ_0 имеет вид (см., например, [28], гл. 5)

$$x = x_0 + b_x \cos\varphi, \qquad y = y_0 + b_y \sin\varphi, \qquad z = z_0 + \beta_3 t + b_3 \sin(2\varphi), \tag{1}$$

где t – лабораторное время; $\varphi = \omega t - \chi$; параметры x_0, y_0, z_0, χ – некоторые постоянные; β_3 – средняя скорость частицы вдоль оси z; $\omega = 2\pi\beta_3/\lambda_0 > 0$. Амплитуды колебаний частицы вдоль осей выражаются через компоненты напряженности магнитного поля в ондуляторе

$$b_x = \frac{\lambda_0^2 H_y}{4\pi^2\gamma}, \qquad b_y = -\frac{\lambda_0^2 H_x}{4\pi^2\gamma}, \qquad b_3 = \frac{\lambda_0^3 (H_y^2 - H_x^2)}{64\pi^3\gamma^2}, \tag{2}$$

где γ – лоренц-фактор частицы, напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ измеряется в единицах критического поля

$$H_0 = m_e^2/|e| \approx 4.41 \times 10^{13}\ \text{G}, \tag{3}$$

и длины измеряются в комптоновских длинах волн, $1/m_e \approx 3.86 \times 10^{-11}$ см. Параметр дипольности для траектории (1) запишется как

$$K := \gamma \langle \beta_\perp^2 \rangle^{1/2} = \lambda_0 \frac{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}{2\sqrt{2}\pi}. \tag{4}$$

Для амплитуд колебаний имеют место оценки

$$b_{x,y}^2 \approx \frac{K^2}{\omega^2\gamma^2}, \qquad |b_3| \approx \frac{K^2}{2\pi\omega\gamma^2}. \tag{5}$$

Выражение (1) верно в предположении, что $\gamma >> 1$ и $K/\gamma << 1$. Если $K << 1$, то реализуется дипольный режим излучения, подробно рассмотренный в [8, 9]. Поэтому в дальнейшем считаем, что $K \gtrsim 1$, т.е. дипольное приближение не применимо для описания излучения.

Заряженная частица движется вдоль траектории (1) при $t \in [-TN/2, TN/2]$, где $T := 2\pi/\omega$ и $N >> 1$ – число секций ондулятора. При t, не принадлежащем указанному интервалу, будем считать, что частица движется параллельно оси z со скоростью $\beta_\parallel = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$. Рассмотрим излучение с участка траектории $t \in [-TN/2, TN/2]$, которое доминирует при $N >> 1$ для энергий фотонов, соответствующих гармоникам ондуляторного излучения.

Среднее число закрученных фотонов, излученных классической точечной заряженной частицей, имеет вид [8]

$$dP(s, m, k_3, k_\perp) = e^2 \left| \int d\tau e^{-i[k_0 x^0(\tau) - k_3 x_3(\tau)]} \left\{ \frac{1}{2} [\dot{x}_+(\tau) a_-(s, m, k_3, k_\perp; \boldsymbol{x}(\tau)) + \right.\right.$$

$$+\dot{x}_-(\tau)a_+(s,m,k_3,k_\perp;\boldsymbol{x}(\tau))] + \dot{x}_3(\tau)a_3(m,k_\perp;\boldsymbol{x}(\tau))\Big\}\Big|^2 n_\perp^3 \frac{dk_3dk_\perp}{16\pi^2}, \qquad (6)$$

где s – спиральность закрученного фотона; m – проекция полного углового момента закрученного фотона на ось z; $k_\perp$ и k_3 – соответствующие проекции импульса закрученного фотона; $k_0 = \sqrt{k_3^2 + k_\perp^2}$ – энергия фотона; $n_\perp := k_\perp/k_0$ (подробно см. [8–12]). Также были введены обозначения для компонент траектории частицы

$$x_\pm := x \pm iy. \qquad (7)$$

Явные выражения для модовых функций закрученных фотонов $a_\pm$, a_3 приведены, например, в формуле (2.5) работы [10]. Параметр τ в (6) – произвольный параметр на мировой линии частицы. В нашем случае его удобно выбрать равным $\tau = t \equiv x^0(t)$.

Излучение закрученных фотонов

Чтобы найти среднее число излученных закрученных фотонов, необходимо вычислить интегралы, входящие в (6). Пусть

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{-TN/2}^{TN/2} dt e^{-ik_0[t-n_3(z_0+\beta_3 t+b_3\sin(2\varphi))]}\dot{x}_3 a_3(m,k_\perp;\boldsymbol{x}(t)),\\ I_\pm &:= \int_{-TN/2}^{TN/2} dt e^{-ik_0[t-n_3(z_0+\beta_3 t+b_3\sin(2\varphi))]}\dot{x}_\pm a_\mp(s,m,k_3,k_\perp;\boldsymbol{x}(t)), \end{aligned} \qquad (8)$$

где $n_3 := k_3/k_0$. Как мы увидим, при $N >> 1$ эти интегралы дают основной вклад в (6), т.е. вкладом краевого излучения в (6) можно пренебречь. Тогда

$$dP(s,m,k_3,k_\perp) \approx e^2 \,|\, I_3 + (I_+ + I_-)/2\,|^2\, n_\perp^3 \frac{dk_3dk_\perp}{16\pi^2}. \qquad (9)$$

Компоненты траектории частицы (1) имеют вид

$$x_\pm = x_\pm^0 + Re^{\pm i\varphi} + De^{\mp i\varphi}, \qquad (10)$$

где

$$R := (b_x + b_y)/2, \qquad D := (b_x - b_y)/2, \qquad x_\pm^0 := x_0 \pm iy_0. \qquad (11)$$

Компоненты скорости запишутся как

$$\dot{x}_\pm = \pm i\omega(Re^{\pm i\varphi} - De^{\mp i\varphi}), \qquad \dot{x}_3 = \beta_3 + 2\omega b_3\cos(2\varphi). \qquad (12)$$

Второе слагаемое в последнем выражении дает малый вклад в области параметров, где сосредоточена основная часть излучения, т.е. при $n_\perp\gamma \lesssim \max(1,K)$, и мы будем им пренебрегать.

Начнем с интеграла I_3. Его вычисление удобно проводить, используя теорему сложения для функций Бесселя (см. (A6) в [8]) в виде

$$j_\nu(x_+ + y_+, x_- + y_-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{\nu-n}(x_+,x_-)j_n(y_+,y_-) \qquad (13)$$

и свойство

$$j_m(ap, q/a) = a^m j_m(p,q), \qquad m \in \mathbb{ZZZZ}. \qquad (14)$$

Определение функций $j_\nu(p,q)$ и их свойства см. в Приложении А работы [8]. Применяя эти соотношения, получаем

$$j_m(k_\perp x_+, k_\perp x_-)e^{ik_3b_3\sin(2\varphi)} = \sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty} j_{m-n-2k+2r}^0 J_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)J_r(\kappa)e^{in\varphi}, \qquad (15)$$

где экспонента в левой части этого равенства была разложена стандартным образом в ряд Фурье с коэффициентами в виде функций Бесселя и для краткости были введены обозначения

$$j_m^0 := j_m(k_\perp x_+^0, k_\perp x_-^0), \qquad \rho := k_\perp R, \qquad \delta := k_\perp D, \qquad \kappa\varkappa = k_3b_3. \qquad (16)$$

Вся зависимость от t выражения (15) содержится в экспоненте в правой его части. В результате интеграл по t легко вычисляется

$$I_3=2\pi\beta_3\sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty}\delta_N(k_0(1-n_3\beta_3)-n\omega)e^{ik_3z_0-in\chi}j^0_{m-n-2k+2r}J_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)J_r(\varkappa\kappa),\tag{17}$$

где

$$\delta_N(x):=\frac{\sin(TNx/2)}{\pi x}.\tag{18}$$

Схожим образом вычисляются интегралы $I_\pm$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}I_\pm= & -2\pi\omega\frac{n_3\pm s}{n_\perp}\sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty}\delta_N(k_0(1-n_3\beta_3)-n\omega)e^{ik_3z_0-in\chi}j^0_{m-n-2k+2r}\times\\ &\times[RJ_{n+k-2r\mp1}(\rho)J_k(\delta)-DJ_{n+k-2r}(\rho)J_{k\mp1}(\delta)]J_r(\kappa\varkappa).\end{aligned}\tag{19}$$

Два слагаемых в квадратных скобках идут от двух слагаемых в выражении для $\dot{x}_\pm$ в (12). Выражения (17), (19) при больших N имеют резкие максимумы при

$$k_0=\frac{n\omega}{1-n_3\beta_3},\qquad n=\overline{1,\infty},\tag{20}$$

соответствующие гармоникам ондуляторного излучения. Число n нумерует гармоники.

Таким образом, одночастичная амплитуда излучения закрученного фотона пропорциональна

$$\begin{aligned}I_3+(I_++I_-)/2= & -2\pi\sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty}\delta_N(k_0(1-n_3\beta_3)-n\omega)e^{ik_3z_0-in\chi}j^0_{m-n-2k+2r}J_r(\varkappa\kappa)\times\\ &\times\left\{\left(\frac{\omega(n-2r)n_3}{k_\perp n_\perp}-\beta_3\right)J_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)+\right.\\ &\left.+\frac{s\omega}{n_\perp}[RJ'_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)-DJ_{n+k-2r}(\rho)J'_k(\delta)]\right\}.\end{aligned}\tag{21}$$

Данное выражение для амплитуды излучения может быть использовано для описания как когерентного, так и некогерентного излучения закрученных фотонов пучками частиц (см. [29–31]). Теперь легко видеть, учитывая оценки (5), что после подстановки в (9) учет второго слагаемого в $\dot{x}_3$ в (12) приводит к поправке порядка, или меньше, $n_\perp^2$ по сравнению с остальными слагаемыми. Поэтому данным вкладом можно пренебречь при $n_\perp^2<<1$.

Отбрасывая интерференционные вклады между различными гармониками, для среднего числа закрученных фотонов (6), излученных заряженной частицей в эллиптическом ондуляторе, получаем

$$\begin{aligned}dP(s,m,k_3,k_\perp)\approx\frac{e^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_N^2(k_0(1-n_3\beta_3)-n\omega)&\left|\sum_{k,r=-\infty}^{\infty}j^0_{m-n-2k+2r}J_r(\varkappa\kappa)\times\right.\\ &\times\left\{\left(\frac{\omega(n-2r)n_3}{k_\perp n_\perp}-\beta_3\right)J_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)+\right.\\ &\left.\left.+\frac{s\omega}{n_\perp}\left[RJ'_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)-DJ_{n+k-2r}(\rho)J'_k(\delta)\right]\right\}\right|^2n_\perp^3dk_3dk_\perp.\end{aligned}\tag{22}$$

В случае $k_\perp|x_+^0|<<1$, т.е. когда центр эллипса спирали, вдоль которой движется частица, близок к оси, относительно которой определяется угловой момент закрученных фотонов, имеет место соотношение

$$j^0_{m-n-2k+2r}\approx\delta_{m,n+2k-2r}.\tag{23}$$

Тогда для излучения закрученных фотонов получаем правило отбора: $m+n$ – четное число. Такое же правило отбора возникало для излучения заряженной частицы, движущейся в плоском ондуляторе [8–10]. Для кругового ондулятора выполнено правило отбора $m=\pm n$, где знак определяется киральностью спирали [1, 8, 9, 32– 34]. Ясно, что и в этом случае $m+n$ – четное число. Отметим, что учет второго слагаемого в выражении для $\dot{x}_3$ в (12) не нарушает данного правила отбора. Подчеркнем, что данное правило отбора верно для излучения закрученных фотонов заряженной частицей, движущейся вдоль траектории

$$x_+ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(2k+1)\varphi}, \qquad x_- = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-i(2k+1)\varphi}, \qquad z = \beta_3 t + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{2ik\varphi}, \tag{24}$$

где $d_k^* = d_{-k}$. Доказательство этого утверждения приведено в Приложении А.

Считая соотношение (23) выполненным, выражение (22) можно несколько упростить

$$\begin{gathered}\frac{dP(s,m,k_3,k_\perp)}{n_\perp^3 dk_3 dk_\perp} \approx \frac{e^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_N^2(k_0(1-n_3\beta_3)-n\omega)\Bigg[\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(\varkappa\kappa)\times \\ \times\Bigg\{\left(\frac{\omega(n-2r)n_3}{k_\perp n_\perp}-\beta_3\right)J_{(m+n)/2-r}(\rho)J_{(m-n)/2+r}(\delta)+ \\ +\frac{s\omega}{n_\perp}\Big[RJ'_{(m+n)/2-r}(\rho)J_{(m-n)/2+r}(\delta)-DJ_{(m+n)/2-r}(\rho)J'_{(m-n)/2+r}(\delta)\Big]\Bigg\}\Bigg]^2.\end{gathered} \tag{25}$$

Помимо правила отбора, $m+n$ – четное число, для данного выражения верно соотношение, что при замене знака киральности эллиптической спирали среднее число закрученных фотонов преобразуется как

$$dP(s,m,k_\perp,k_3) \to dP(-s,-m,k_\perp,k_3). \tag{26}$$

Для плоского ондулятора – это преобразование симметрии [8–10, 35]. В частных случаях плоского и кругового ондуляторов формула (25) переходит в соответствующие выражения для среднего числа излученных закрученных фотонов, полученных в [8].

Учтем теперь влияние квантовой отдачи на излучение закрученных фотонов, используя подход, развитый в [9, 10]. Данный подход является адаптацией метода Байера – Каткова [36, 37] для описания квантового излучения, создаваемого ультрарелятивистскими заряженными скалярными и дираковскими частицами в области параметров, где сосредоточена основная часть излучения. Поскольку в ондуляторе $P_0 := m_e\gamma$ является интегралом движения заряженной частицы, для описания излучения можем воспользоваться формулой (2.13) работы [10]. Пусть

$$q := P_0/(P_0-k_0); \tag{27}$$

$$k'_0 := q[k_0 - k_\perp^2/(2P_0)], \qquad k'_3 = qk_3, \qquad \kappa\varkappa' := qk_3b_3. \tag{28}$$

При вычислении вероятности излучения закрученного фотона, согласно формуле (2.13) работы [10], возникают интегралы вида (8) с очевидными заменами. Обозначим эти интегралы как I'_3 и $I'_\pm$. Тогда с точностью до несущественной общей фазы имеем

$$\begin{gathered}I'_3 = 2\pi\sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty}\delta_N(k'_0-k'_3\beta_3-n\omega)e^{-in\chi}j^0_{m-n-2k+2r}J_{n+k-2r}(\rho)J_k(\delta)J_r(\kappa\varkappa'), \\ I'_s = -\frac{4\pi\omega}{n_\perp}\sum_{n,k,r=-\infty}^{\infty}\delta_N(k'_0-k'_3\beta_3-n\omega)e^{-in\chi}j^0_{m-n-2k+2r}\times \\ \times\big[RJ_{n+k-2r-s}(\rho)J_k(\delta)-DJ_{n+k-2r}(\rho)J_{k-s}(\delta)\big]J_r(\kappa\varkappa'),\end{gathered} \tag{29}$$

где мы учли, что в рассматриваемом приближении $n_3 \approx 1$.

Равенство нулю аргумента $\delta_N(x)$ дает энергию фотонов, излучаемых на гармонике n с учетом квантовой отдачи. Если пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках в выражении для k'_0 в (28), которое в рассматриваемом приближении мало, то спектр ондуляторного излучения запишется как

$$k_0 = \frac{n\omega}{1-n_3\beta_3+n\omega/P_0}, \qquad n=\overline{1,\infty}. \tag{30}$$

В результате, пренебрегая интерференцией различных гармоник, получаем инклюзивную вероятность излучения одного закрученного фотона заряженной дираковской частицей в эллиптическом ондуляторе в ведущем порядке теории возмущений

$$\frac{dP(s,m,k_3,k_\perp)}{n_\perp^3 dk_3 dk_\perp} \approx \frac{e^2}{4}\frac{1+q^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_N^2(k_0'-k_3'\beta_3-n\omega)\Bigg|\sum_{k,r=-\infty}^{\infty} j^0_{m-n-2k+2r} J_r(\kappa\varkappa')\times$$
$$\times\left\{\left[J_{n+k-2r}(\rho)-\frac{\omega R}{n_\perp}J_{n+k-2r-s}(\rho)\right]J_k(\delta)+\frac{\omega D}{n_\perp}J_{n+k-2r}(\rho)J_{k-s}(\delta)\right\}\Bigg|^2. \quad (31)$$

При $k_\perp |x_+^0| \ll 1$ верно соотношение (23) и, следовательно, выполнено правило отбора: $m+n$ – четное число, т.е. это правило отбора не нарушается при учете квантовой отдачи.

В области параметров $k_\perp |x_+^0| \ll 1$ выражение (31) можно упростить. Введем функции

$$g_{nm}(\varkappa\kappa,\rho,\delta) := \frac{1+(-1)^{n+m}}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(\kappa\varkappa)J_{(m+n)/2-r}(\rho)J_{(m-n)/2+r}(\delta). \quad (32)$$

Фактически, эти функции являются коэффициентами ряда Фурье (15) при $x_\pm^0 = 0$. Некоторые свойства функций (32) приведены в Приложении Б. Тогда для вероятности (31) получаем

$$\frac{dP(s,m,k_3,k_\perp)}{n_\perp^3 dk_3 dk_\perp} = \frac{e^2}{4}\frac{1+q^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_N^2(k_0'-k_3'\beta_3-n\omega)\left(g_{nm}-\frac{\omega R}{n_\perp}g_{n-s,m-s}+\frac{\omega D}{n_\perp}g_{n+s,m-s}\right)^2, \quad (33)$$

где $g_{nm} \equiv g_{nm}(\kappa\varkappa',\rho,\delta)$. Для вероятности излучения закрученных фотонов, создаваемых скалярными частицами, общий множитель $(1+q^2)/2$ нужно заменить на q (см. (2.10) в [10]). В частных случаях кругового и плоского ондуляторов выражение (33) переходит в формулы (54) работы [9] и (3.7) работы [10]. Кроме того, в пределе малой отдачи в параксиальном режиме, $n_\perp^2 \ll 1$, формула (33) переходит в (25). Используя свойства симметрии (38) Приложения Б, несложно видеть, что при замене знака киральности эллиптической спирали траектории частицы в ондуляторе вероятность излучения закрученного фотона (33) преобразуется согласно (26).

Заключение

Кратко сформулируем основные результаты данной работы. Используя общий формализм, развитый в работах [8–10], получены явные выражения для среднего числа закрученных фотонов, излученных релятивистской заряженной частицей в эллиптическом ондуляторе. Для учета квантовой отдачи использовался метод, разработанный в [9, 10], который является адаптацией метода Байера – Каткова [36, 37] для описания вероятности излучения закрученных фотонов в области параметров, где сосредоточена основная часть излучения. В этой области параметров получены явные выражения для вероятности излучения одного закрученного фотона как заряженной скалярной частицей, так и заряженным дираковским фермионом. В пределе исчезающе малой квантовой отдачи в параксиальном режиме найденное выражение переходит в выражение для среднего числа закрученных фотонов, созданных классическим током точечной заряженной частицы в эллиптическом ондуляторе, которое также получено в данной работе. В частных случаях кругового и плоского ондуляторов полученные выражения для эллиптического ондулятора переходят в ранее известные [8–10]. Доказано, что излучение закрученных фотонов вперед подчиняется правилу отбора: $m+n$ – четное число, где m – проекция полного углового момента закрученного фотона, а n – номер гармоники ондуляторного излучения. Данное правило отбора верно как в классическом подходе к описанию излучения, так и с учетом квантовой отдачи. Оно обобщает известные правила отбора для излучения закрученных фотонов круговым и плоским ондуляторами и остается верным для траекторий вида (24).

Явные выражения для одночастичной амплитуды излучения фотона, полученные в данной работе, позволяют легко найти среднее число закрученных фотонов, излученных пучком заряженных частиц в эллиптическом ондуляторе. Для этого можно воспользоваться теорией излучения закрученных фотонов пучками заряженных частиц, развитой в [29–31]. Также, поскольку движение заряженных частиц в поле плоской лазерной волны с эллиптической поляризацией схоже с движением заряженных частиц в эллиптическом ондуляторе, полученные в данной работе результаты можно применить для описания излучения закрученных фотонов и в этом случае [9]. Кроме того, развитый формализм может быть использован для описания излучения закрученных фотонов при осевом и плоскостном каналировании [38, 39]. Схожие свойства излучения следует ожидать при переходном излучении в диспергирующих средах, тензор диэлектрической проницаемости которых инвариантен относительно сдвигов вдоль эллиптической спирали [30, 40], и для эллиптических ондуляторов, заполненных диспергирующей средой [35].

Авторы выражают благодарность П.С. Королеву и Г.Ю. Лазаренко за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Доказательство правила отбора

Рассмотрим излучение закрученных фотонов заряженной частицей, движущейся вдоль траектории (24). Верны соотношения

$$\exp\Big(i\sum_{k=-\infty}^{\infty}k_3d_ke^{2ik\varphi}\Big)=e^{ik_3d_0}\prod_{k=1}^{\infty}\exp\Big[i(k_3d_ke^{2ik\varphi}+k_3d_k^*e^{-2ik\varphi})\Big]=$$
$$=e^{ik_3d_0}\sum_{\{k_r\}}\exp\Big(i\sum_{r=1}^{\infty}2rk_r\varphi)\prod_{r=1}^{\infty}i^{k_r}j_{k_r}(2k_3d_r,2k_3d_r^*\Big),\tag{34}$$

где в последнем выражении сумма идет по всем целочисленным последовательностям $\{k_r\}$, $r=\overline{1,\infty}$, с конечным числом отличных от нуля членов. Аналогично, многократно применяя теорему сложения (13) и свойство (14), имеем

$$j_m(k_\perp x_+,k_\perp x_-)=\sum_{\{l_q\}}\delta_{m,\sum_q l_q}\exp\Big(im\varphi+i\sum_{q=-\infty}^{\infty}2ql_q\varphi\Big)\prod_{q=-\infty}^{\infty}j_{l_q}(k_\perp c_q,k_\perp c_q^*),\tag{35}$$

где сумма идет по всем целочисленным последовательностям $\{l_q\}$, $q=\overline{-\infty,\infty}$, с конечным числом отличных от нуля членов. В результате подынтегральное выражение I_3 запишется как

$$\dot{x}_3j_m(k_\perp x_+,k_\perp x_-)\exp\Big(i\sum_{k=-\infty}^{\infty}k_3d_ke^{2ik\varphi}\Big)=e^{ik_3d_0}\sum_{\{k_r\},\{l_q\},r'}2i\omega r'd_{r'}\delta_{m,\sum_q l_q}e^{in\varphi}\times$$
$$\times\Big[\prod_{r=1}^{\infty}i^{k_r}j_{k_r}(2k_3d_r,2k_3d_r^*)\Big]\prod_{q=-\infty}^{\infty}j_{l_q}(k_\perp c_q,k_\perp c_q^*),\tag{36}$$

где $2i\omega r'd_{r'}$ нужно заменить на β_3 при $r'=0$, и номер гармоники

$$n=m+\sum_{r=1}^{\infty}2rk_r+\sum_{q=-\infty}^{\infty}2ql_q+2r'.\tag{37}$$

Очевидно, что $m+n$ – четное число. Таким же образом разлагаются подынтегральные выражения в $I_\pm$. Для них также выполнено соотношение: $m+n$ – четное число. Несложно проверить, что учет квантовой отдачи, как это сделано в п. 3, не нарушает данного правила отбора, по крайней мере в случае, когда $P_0=const$.

Б. Некоторые свойства функций g_{nm}

Свойства симметрии:

$$g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta)=(-1)^m g_{n,-m}(\varkappa,\delta,\rho),\qquad g_{nm}(\varkappa,\rho,\delta)=g_{-n,m}(-\varkappa,\rho,\delta).\tag{38}$$

Рекуррентные соотношения:

$$2mg_{nm}=\rho(g_{n+1,m+1}+g_{n-1,m-1})+\delta(g_{n+1,m-1}+g_{n-1,m+1}),$$
$$2\frac{\partial g_{nm}}{\partial\varkappa}=g_{n-2,m}-g_{n+2,m},$$
$$2\frac{\partial g_{nm}}{\partial\rho}=g_{n-1,m-1}-g_{n+1,m+1},\tag{39}$$
$$2\frac{\partial g_{nm}}{\partial\delta}=g_{n+1,m-1}-g_{n-1,m+1},$$

где $g_{nm} \equiv g_{nm}(\kappa\varkappa, \rho, \delta)$. Производящая функция:

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} g_{nm} s^n t^m = \exp\left[\frac{\kappa\varkappa}{2}\left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) + \frac{\rho}{2}\left(st - \frac{1}{st}\right) + \frac{\delta}{2}\left(\frac{t}{s} - \frac{s}{t}\right)\right],$$
$$g_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi d\psi}{(2\pi)^2} \exp\left\{i\left[\varkappa \sin(2\psi) + \rho\sin(\varphi+\psi) + \delta\sin(\varphi-\psi) - n\psi - m\varphi\right]\right\}. \quad (40)$$

Используя производящую функцию, несложно получить правила сумм

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\varkappa\kappa, \rho, \delta) = J_n(\rho-\delta, \kappa\varkappa), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\varkappa\kappa, \rho, \delta) = J_m(\rho+\delta),$$
$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} g_{nm}(\varkappa\kappa, \rho, \delta) = 1, \quad (41)$$

где $J_n(x, y)$ – обобщенная функция Бесселя двух аргументов [28, 41–44].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sasaki S. and McNulty. I. // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 100. – P. 124801.
2. Afanasev A. and Mikhailichenko A. On generation of photons carrying orbital angular momentum in the helical undulator // arXiv:1109.1603, 2011.
3. Бордовицын В.А., Константинова О.А., Немченко Е.А. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 1. – С. 40.
4. Hemsing E. and Marinelli A. // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 109. – P. 224801.
5. Bahrdt J., Holldack K., Kuske P., et al. // Phys. Rev. Lett. – 2013. – V. 111. – P. 034801.
6. Hemsing E., Knyazik A., Dunning M., et al. // Nature Phys. – 2013. – V. 9. – P. 549.
7. Ribič P.R., Gauthier D., and De Ninno G. // Phys. Rev. Lett. – 2014. – V. 112. – P. 203602.
8. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. A. – 2018. – V. 97. – P. 033837.
9. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. D. – 2020. – V. 99. – P. 116016.
10. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Lazarenko G. Yu. // JINST. – 2020. – V. 15. – P. C04008.
11. Jentschura U.D. and Serbo V.G. // Phys. Rev. Lett. – 2011. – V. 106. – P. 013001.
12. Jentschura U.D. and Serbo V.G. // Eur. Phys. J. C. – 2011 – V. 71. – P. 1571.
13. Twisted Photons / eds. J.P. Torres and L. Torner. – Weinheim: Wiley-VCH, 2011.
14. The Angular Momentum of Light / eds. D.L. Andrews and M. Babiker. – N.Y.: Cambridge University Press, 2013.
15. Padgett M. J. // Opt. Express. – 2017. – V. 25. – P. 11265.
16. Rubinsztein-Dunlop H., Forbes A., Berry M.V., et al. // J. Opt. – 2017. – V. 19. – P. 013001.
17. Knyazev B. A. and Serbo V. G. // Phys. Usp. – 2018. – V. 61. – P. 449.
18. Hickmann J.M., Fonseca E.J.S., Soares W.C., and Chávez-Cerda S. // Phys. Rev. Lett. – 2010. – V. 105. – P. 053904.
19. Berkhout G.C.G., Lavery M.P.J., Courtial J., et al. // Phys. Rev. Lett. – 2010. – V. 105. – P. 153601.
20. Su T., Scott R.P., Djordjevic S.S., et al. // Opt. Express. – 2020. – V. 20. – P. 9396.
21. Lavery M.P.J., Courtial J., and Padgett M.J. // The Angular Momentum of Light / eds. by D.L. Andrews and M. Babiker. – N.Y.: Cambridge University Press, 2013.
22. Walsh G.F., De Sio L., Roberts D.E., et al. // Opt. Lett. – 2018. – V. 43. – P. 2256.
23. Ruffato G., Girardi M., Massari M., et al. // Sci. Rep. – 2018. – V. 8. – P. 10248.
24. Ruffato G., Massari M., Girardi M., et al. // Opt. Express. – 2019. – V. 27. – P. 15750.
25. Goto Y., Tsujimura T. I., and Kubo S. // Int. J. Infrared Millimeter Waves. – 2019. – V. 40. – P. 943.
26. Taira Y. and Kohmura Y. // J. Opt. – 2019. – V. 21. – P. 045604.
27. Paroli B., Siano M., and Potenza M.A.C. // Appl. Opt. – 2020. – V. 59. – P. 5258.
28. Bagrov V.G., Bisnovatyi-Kogan G.S., Bordovitsyn V.A., et al. Synchrotron Radiation Theory and its Development. – Singapore: World Scientific, 1999.
29. Bogdanov O.V. and Kazinski P.O. // Eur. Phys. J. Plus. – 2019. – V. 134. – P. 586.
30. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Lazarenko G.Yu. // Phys. Rev. A. – 2019. – V. 100. – P. 043836.
31. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Lazarenko G.Yu. // Ann. Phys. – 2020. – V. 415. – P. 168116.
32. Katoh M., Fujimoto M., Kawaguchi K., et al. // Phys. Rev. Lett. – 2017. – V. 118. – P. 094801.
33. Katoh M., Fujimoto M., Mirian N.S., et al. // Sci. Rep. – 2017. – V. 7. – P. 6130.
34. Epp V. and Guselnikova U. // Phys. Lett. A. – 2019. – V. 383. – P. 2668.
35. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Lazarenko G.Yu. // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – V. 135. – P. 901.
36. Baier V.N. and Katkov V.M. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1968. – V. 55. – P. 1542.
37. Baier V.N., Katkov V.M., and Strakhovenko V.M. Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals. – Singapore: World Scientific, 1998.

38. Abdrashitov S.V., Bogdanov O.V., Kazinski P.O., and Tukhfatullin T.A. // Phys. Lett. A. – 2018. – V. 382. – P. 3141.
39. Epp V., Janz J., and Zotova M. // Nucl. Instrum. Methods B. – 2018. – V. 436. – P. 78.
40. Bogdanov O.V., Kazinski P.O., Korolev P.S., and Lazarenko G.Yu. // J. Mol. Liq. – 2021. – V. 326. – P. 115278.
41. Nikishov A.I. and Ritus V.I. // J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.). – 1964. – V. 46. – P. 776.
42. Didenko A.N., Kozhevnikov A.V., Medvedev A.F., et al. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1979. – V. 76. – P. 1919.
43. Dattoli G., Giannessi L., Mezi L., and Torre A. // Nuovo Cim. – 1990. – V. 105 B. – P. 327.
44. Dattoli G., Torre A., Lorenzutta S., et al. // Nuovo Cim. – 1991. – V. 106 B. – P. 21.

Поступила в редакцию 01.02.2021.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия

Казинский Петр Олегович, д.ф.-м.н., доцент, профессор каф. квантовой теории поля НИ ТГУ, e-mail: kazinski.po@mail.ru;

Рякин Владислав Александрович, студент, лаборант-исследователь лаб. математической и теоретической физики НИ ТГУ, e-mail: vlad-r@sibmail.com vlad-r@sibmail.com.