

УДК 530.12:531.51:519.711.3

DOI: 10.17223/00213411/64/3/136

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ, А.Р. САМИГУЛЛИНА

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ МОДЕЛИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ КЛАССИЧЕСКОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С ХИГГСОВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. I. АНАЛИЗ МОДЕЛИ \*

Проведено исследование и компьютерное моделирование полной модели космологической эволюции классического скалярного поля с Хиггсовым потенциалом без предположения о неотрицательности постоянной Хаббла. Проведены качественный анализ соответствующей динамической системы и классификация гиперповерхностей Эйнштейна – Хиггса, топология которых определяет глобальные свойства фазовых траекторий космологической модели.

**Ключевые слова:** космологические модели, Хиггсовы поля, гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса, глобальное поведение.

### Введение

В ряде последних работ [1–4] одним из авторов было сформулировано предположение о возможности существования так называемых *предельных Евклидовых циклов* в космологических моделях, основанных как на классических, так и на фантомных скалярных полях. Суть явления Евклидовых циклов заключается в стремлении космологических моделей при определенных параметрах полевой модели к состоянию с нулевой эффективной энергией. При этом пространство-время становится псевдоевклидовым, хотя скалярные поля отличны от нуля и совершают свободные нелинейные колебания. Это предположение было сформулировано на основе анализа большого числа как качественных, так и численных исследований космологических моделей со скалярными полями (см., например, [5–7], кроме цитированных в них работ). Мы не будем в рамках данной статьи приводить обзор работ по космологическим моделям со скалярными полями других авторов, не относящихся непосредственно к существу исследования. Такой достаточно подробный обзор можно найти в [1, 4]. В работах авторов [8, 9] были изучены детали явления Евклидовых циклов, в частности спектр нелинейных колебаний, обнаруживающий черты теплового спектра.

Заметим, что все указанные работы основывались на динамических системах, в которых постоянная Хаббла  $H(t)$  подставлялась из уравнения Эйнштейна  $\frac{4}{4}$ , как его *неотрицательный* корень, что позволяло понизить на единицу размерность динамической системы. Однако в работе [10] было показано, что *предположение о неотрицательности  $H(t)$*  может противоречить полной системе динамических уравнений, сформулированной в указанной работе. В [10] было проведено предварительное исследование полной динамической системы, в частности, проведен ее качественный анализ и показано, что динамическая система, основанная на классическом поле Хиггса, в процессе космологической эволюции может переходить из стадии расширения на стадию сжатия. Это совершенно неожиданное свойство исследуемой космологической модели нуждается в дополнительном более детальном исследовании. Кроме того, необходимо более тщательно исследовать фазу перехода модели со стадии расширения на стадию сжатия, когда реализуются нулевые и близкие к нулевым значения постоянной Хаббла и геометрия становится близкой к псевдоевклидовой. Исследованию этих вопросов для космологических моделей, основанных на классическом скалярном поле Хиггса, и посвящена данная работа.

### 1. Математическая модель

#### 1.1. Базовые отношения

Опишем, согласно [10], базовые соотношения математической модели космологической эволюции классического скалярного Хиггсова поля и ее основные свойства. В качестве полевой модели рассмотрим самосогласованную систему уравнений Эйнштейна и классического скалярного поля  $\Phi$  с потенциалом Хиггса, которому соответствует функция Лагранжа

\* The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

$$L_s = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{2} g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - V(\Phi) \right), \quad (1)$$

где  $V(\Phi)$  – потенциальная энергия скалярного поля:

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left( \Phi^2 - \frac{em^2}{\alpha} \right)^2, \quad (2)$$

$\alpha$  – константа самодействия;  $m$  – масса скалярных бозонов;  $e = \pm 1$  – индикатор. Функции Лагранжа (1) соответствует уравнение скалярного поля

$$\Delta\Phi + V'_{\Phi} = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta = g^{ik} \nabla_i \nabla_k$ , и тензор энергии-импульса скалярного поля

$$T_k^i = \frac{1}{8\pi} \left( \Phi^i \Phi_{,k} - \frac{1}{2} \delta_k^i \Phi_{,j} \Phi^{,j} + \delta_k^i V(\Phi) \right). \quad (4)$$

Далее мы будем опускать постоянный член в потенциале Хиггса (2), приводящий к простому переопределению космологической постоянной  $\lambda$ , замечая, что при этом космологическая постоянная  $\lambda$  перенормируется следующим образом:

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{m^4}{4\alpha}, \quad (5)$$

где  $\lambda_0$  – ее невозмущенное, *затравочное*, значение.

Соответствующие уравнения Эйнштейна изучаемой системы имеют вид\*

$$G_k^i \equiv R_k^i - \frac{1}{2} R \delta_k^i = 8\pi T_k^i + \lambda \delta_k^i. \quad (6)$$

Уравнения (3) и (6) являются базовыми уравнениями модели.

В [10] показано, что в случае пространственно-плоской Вселенной Фридмана

$$ds_0^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

полную систему динамических уравнений (3), (4) относительно масштабного фактора  $a(t)$  и скалярного потенциала  $\Phi(t)$  можно записать в виде

$$\ddot{\Phi} = -3H\dot{\Phi} - em^2\Phi + \alpha\Phi^3; \quad (7)$$

$$3H^2 - \mathcal{E} = 0; \quad (8)$$

$$\dot{H} = -3H^2 + \frac{em^2\Phi^2}{2} - \frac{\alpha\Phi^4}{4} + \lambda, \quad (9)$$

где

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (10)$$

– постоянная Хаббла,

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + \frac{em^2\Phi^2}{2} - \frac{\alpha\Phi^4}{4} + \lambda \quad (11)$$

– *эффективная энергия* системы, которая, согласно (8), является неотрицательной величиной –

$$\mathcal{E} \geq 0. \quad (12)$$

Подстановка уравнения Эйнштейна (8) в правую часть (9) дает соотношение

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 (\leq 0), \quad (13)$$

согласно которому постоянная Хаббла в данной модели может только уменьшаться со временем, причем  $H = \text{Const} \Leftrightarrow \dot{\Phi} = 0$ . Вводя также *инвариантное космологическое ускорение*

\* Всюду  $G = \hbar = c = 1$ , сигнатура метрики  $(-, -, -, +)$ , тензор Риччи получается сверткой первого и третьего индексов.

$$\Omega \equiv \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (14)$$

представим уравнение (13) в эквивалентной форме

$$\Omega = 1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Phi}^2}{H^2} \quad (\leq 1). \quad (15)$$

Введем также полезное соотношение для квадратичного инварианта кривизны пространства Фридмана

$$\sigma \equiv \sqrt{R_{ijkl}R^{ijkl}} = H^2 \sqrt{6(1 + \Omega^2)} \geq 0. \quad (16)$$

Вводя далее безразмерную временную переменную  $\tau = mt$ ,  $\Phi' = d\Phi/d\tau$ , безразмерные фундаментальные константы и безразмерные функции

$$\alpha_m = \frac{\alpha}{m^2}, \quad \lambda_m = \frac{\lambda}{m^2}, \quad h = \frac{a'}{a} = \frac{H}{m}, \quad (17)$$

перепишем систему базовых уравнений (7) – (9) в нормальном виде относительно переменных  $\Phi \equiv x_1, Z \equiv x_2, h \equiv x_3$ :

$$\Phi' = Z \quad (\equiv f_1); \quad (18)$$

$$Z' = -3hZ - e\Phi + \alpha_m \Phi^3 \quad (\equiv f_2); \quad (19)$$

$$h' = -3h^2 + \frac{e\Phi^2}{2} - \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} + \lambda_m \quad (\equiv f_3). \quad (20)$$

При этом выражения для инвариантного космологического ускорения (14) и (15) остаются инвариантными с заменой  $H \rightarrow h$  и производных  $d/dt \rightarrow d/d\tau$ , а выражение для эффективной энергии (11) преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{E} = m^2 \mathcal{E}_m, \quad \mathcal{E}_m(\Phi, Z) = \frac{Z^2}{2} + \frac{e\Phi^2}{2} - \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} + \lambda_m \geq 0. \quad (21)$$

Запишем также в этих обозначениях интегральное условие (8)

$$3h^2 - \frac{Z^2}{2} - \frac{e\Phi^2}{2} + \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} - \lambda_m = 0. \quad (22)$$

Заметим, что в принятых обозначениях все переменные и постоянные безразмерны. Итак, исследуемая динамическая система имеет три степени свободы, а ее состояние однозначно определяется координатами точки  $M(\Phi, Z, h) \equiv M(x_1, x_2, x_3)$  в 3-мерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . При этом области фазового пространства  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , в которых нарушается энергетическое условие (12), т.е.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3: \quad \mathcal{E}_m(\Phi, Z) < 0, \quad (23)$$

являются недоступными для динамической системы, вследствие чего фазовое пространство динамической системы может оказаться многосвязным. Заметим, что недоступные области (23), если таковые существуют, являются цилиндрическими с осями, параллельными  $Oh$ . Далее, уравнение Эйнштейна (22), являющееся *первым интегралом динамической системы* – интегралом полной нулевой энергии, в то же время описывает алгебраическую поверхность 4-го порядка в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  динамической системы  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ , на которой лежат все фазовые траектории динамической системы. В дальнейшем в соответствии с [10] будем называть поверхность  $\Sigma$  *гиперповерхностью Эйнштейна – Хиггса*.

## 1.2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются равенством нулю правых частей нормальной системы уравнений. Таким образом, координаты особых точек динамической системы (18) – (20) определяются уравнениями

$$Z = 0; \quad -3hZ - e\Phi + \alpha_m \Phi^3 = 0; \quad (24)$$

$$-3h^2 + \frac{e\Phi^2}{2} - \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} + \lambda_m = 0.$$

Отсюда в общем случае имеем шесть особых точек системы – две симметричных с нулевым потенциалом и его производной [10]:

$$M_{\pm} \left( 0, 0, \pm \sqrt{\frac{\lambda_m}{3}} \right) \quad (\text{для } \lambda_m \geq 0, \forall \alpha) \quad (25)$$

и четыре симметричных  $M_{ab}$ , располагающихся в вершинах прямоугольника в плоскости  $P_2 \{ \Phi, h \} : Z = 0$ :

$$M_{ab} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{e\alpha_m}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\lambda_\alpha}{3}} \right), \quad \text{для } e\alpha > 0; \lambda_\alpha \equiv \lambda_m + \frac{1}{4\alpha_m} \geq 0. \quad (26)$$

Таким образом, всего возможны пять случаев [10]:

- 1) при  $\{e\alpha < 0, \lambda < 0\}$  особых точек не существует;
- 2) при  $\{e\alpha > 0, \lambda < -1/4\alpha_m\}$  особых точек не существует;
- 3) при  $\{e\alpha < 0, \lambda > 0\}$  существуют только две особые точки  $M_{\pm}$ ;
- 4) при  $\{e\alpha > 0, -1/4\alpha_m < \lambda < 0\}$  существуют четыре особые точки  $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ ;
- 5) при  $\{e\alpha > 0, \lambda > 0\}$  существуют все шесть особых точек.

Вычисляя величину эффективной энергии (21) в особых точках, найдем

$$\mathcal{E}_m(M_{\pm}) = \lambda_m, \quad \mathcal{E}_m(M_{ab}) = \lambda_\alpha. \quad (27)$$

Итак, из условий (25) и (26) следует: *все особые точки динамической системы, если они существуют, доступны*. В особых точках собственные значения матрицы динамической системы равны [10]:

$$M_{\pm}: \quad k_1 = \mp 2\sqrt{3\lambda_m}, \quad k_{2,3} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_m - 4e};$$

$$M_{ab}: \quad k_1 = \mp 2\sqrt{3\lambda_\alpha}, \quad k_{2,3} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_\alpha} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3\lambda_\alpha + 8e}.$$

В парах симметричных точек  $(M_{11}, M_{21})$  и  $(M_{12}, M_{22})$  собственные значения матрицы динамической системы совпадают. Знаки перед первыми и вторыми радикалами в этих формулах принимают независимые друг от друга значения: знаки перед первыми радикалами соответствуют различным парам точек, знаки перед вторыми радикалами – различным собственным значениям. При этом важно помнить необходимые условия существования особых точек (25) и (26).

Таким образом, особые точки  $M_{\pm}$  при  $3\lambda_m - 4e > 0$  являются неустойчивыми (седловыми) точками, а при  $3\lambda_m - 4e < 0$  – устойчивыми (притягивающими центрами). В этих точках постоянная Хаббла  $h = \pm \sqrt{\lambda_m/3}$  при  $\lambda > 0$ , а скалярное поле отсутствует. Согласно формулам (21) и (23) инвариантное космологическое ускорение и инвариантная кривизна равны

$$\Omega(M_{\pm}) = 1, \quad \sigma(M_{\pm}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda. \quad (28)$$

В результате особым точкам  $M_{\pm}$  соответствуют инфляционные решения с положительной или отрицательной постоянной Хаббла:  $a \sim e^{\pm \sqrt{\lambda/3}t}$ . При  $e = +1$  все собственные значения матрицы динамической системы в ее особых точках  $M_{ab}$  вещественны и имеют различные знаки. Таким образом, при  $e = +1$  все особые точки являются седловыми. При  $e = -1$  и  $\lambda_\alpha < 8/3$  собственные значения динамической матрицы в ее особых точках  $M_{ab}$  становятся комплексно сопряженными и среди них есть значения, отвечающие притяжению.

### 1.3. Асимптотические фазовые траектории

Динамическая система уравнений (18) – (20) однозначно задается *матрицей динамической системы*:

$$A = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|,$$

а ее фазовые траектории вблизи особых точек  $M^0(x_i^0)$  определяются асимптотическими формулами (см., например, [11])

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^0 + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n C_k \xi^k e^{\lambda_k t}, \quad (29)$$

где  $\xi^k$  – собственные векторы, соответствующие собственным значениям  $\lambda_k$  матрицы  $A$ :

$$(A - \lambda E) \xi = 0. \quad (30)$$

Для нахождения постоянных  $C_i$  необходимо определить начальные условия  $\mathbf{r}(t_0) \equiv \mathbf{r}_0$  в какой-либо точке  $M_0$ , достаточно близкой к особой точке  $M^0$ . На рис. 1 и 2 показаны примеры таких траекторий для фундаментальных параметров  $\alpha_m = 5$ ,  $e = +1$ ,  $\lambda = 0.1$ . Особые точки обозначены черными точками, начальные точки – звездочками, начало траекторий – круг/сфера, конец – квадрат/куб.

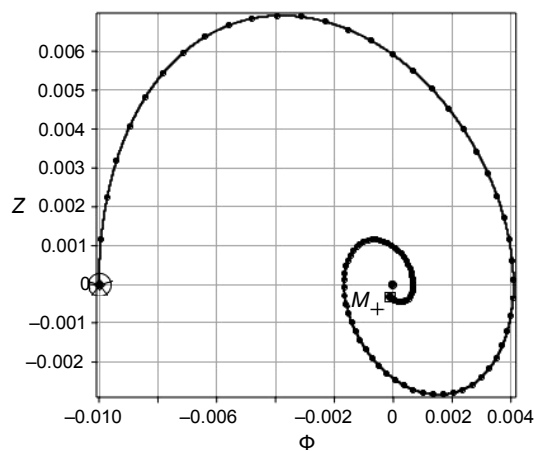


Рис. 1. Фазовая траектория динамической системы (18) – (20) (сплошная кривая) и асимптотическая траектория (точки) на плоскости  $\{\Phi Z\}$

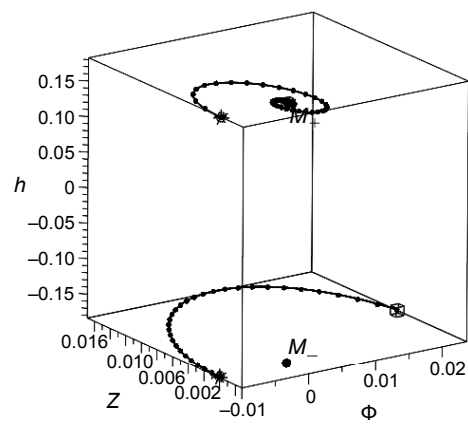


Рис. 2. Фазовые траектории динамической системы (18) – (20) (сплошная кривая) и асимптотическая траектория (точки) в 3-мерном пространстве  $\{\Phi Zh\}$

## 2. Гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса

### 2.1. Топология поверхности и форма сечений

Вследствие формулы (13)  $\dot{h} \leq 0$ , поэтому постоянная Хаббла не может возрастать со временем. Возможность же перехода от стадии расширения ( $h > 0$ ) к стадии сжатия ( $h < 0$ ) определяется топологией гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса. Перепишем уравнение гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса (22) в эквивалентном виде

$$\Sigma : 3h^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{\alpha_m}{4} \left( \Phi^2 - \frac{e}{\alpha_m} \right)^2 = \lambda_\alpha, \quad \left( \lambda_\alpha = \lambda + \frac{1}{4\alpha_m} \right). \quad (31)$$

Заметим, что согласно (5)  $\lambda_\alpha = \lambda_0 / m^2$ . Производя замену

$$\Phi^2 - \frac{e}{\alpha_m} = y, \quad (32)$$

приведем уравнение гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса к виду уравнения *центральной* поверхности второго порядка в трехмерном пространстве:

$$3h^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{\alpha_m y^2}{4} = \lambda_\alpha,$$

причем при  $\alpha_m > 0$  ее главной осью является ось  $OZ$ , при  $\alpha_m < 0$  – ось  $Oh$ . При  $\lambda_0 = 0$  гиперповерхность Эйнштейна – Хиггса является конусом в переменных  $\{y, Z, h\}$ . Полагая  $\lambda_0 \neq 0$ , приведем уравнение гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса к каноническому виду

$$\frac{3h^2}{\lambda_\alpha} - \frac{Z^2}{2\lambda_\alpha} + \frac{\alpha_m^2 y^2}{4\beta} = 1, \quad (33)$$

где  $\beta = \alpha_m \lambda_\alpha \equiv 1/4 + \alpha_m \lambda$ . Таким образом, тип поверхности Эйнштейна – Хиггса (33) в переменных  $\{y, Z, h\}$  определяется знаком  $\beta$ : при  $\beta > 0$  – это однополостной гиперboloид, при  $\beta = 0$  – конус, при  $\beta < 0$  – двуполостной гиперboloид. При этом мы должны понимать, что преобразование (32) не является биективным: при обратном преобразовании появляются два корня  $\Phi = \pm \sqrt{y + e/\alpha_m}$ , в результате чего поверхность 2-го порядка искажается. Наибольшие деформации возникают в области особых точек  $|\Phi| \leq 1/\sqrt{e\alpha_m}$ ,  $|\Phi| \sim 1/\sqrt{e\alpha_m}$ . В этой области сечение поверхности Эйнштейна – Хиггса может иметь достаточно разнообразные формы, в значительной мере определяющие возможности переходов космологической модели со стадии расширения на стадию сжатия. В частности, сечение  $\mathcal{S}: Z = 0$  (т.е. в плоскости  $\{\Phi, h\}$ ), в котором лежат особые точки, определяется уравнением

$$\mathcal{S}: \frac{3h^2}{\lambda_\alpha} + \frac{\alpha_m}{4\lambda_\alpha} \left( \Phi^2 - \frac{e}{\alpha} \right)^2 = 1,$$

согласно которому возможны следующие формы сечения:  $\beta < 0 \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$ ;  $\beta < 0 \Rightarrow \mathcal{S} = M_1 \cup M_2$ ;  $0 < \beta < 1/4 \Rightarrow \mathcal{S} = E_1 \cup E_2$ ;  $\beta > 1/4 \Rightarrow \mathcal{S} = E$  или  $\infty$ , где  $M_a$  – точки,  $E_a$  – деформированные эллипсы,  $\infty$  – «восьмерка».

### 2.2. Типы гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса и ее сечения

Далее, говоря о типах гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса по классификации центральных поверхностей (рис. 3–10), мы по умолчанию будем иметь ввиду прилагательное «деформированная».

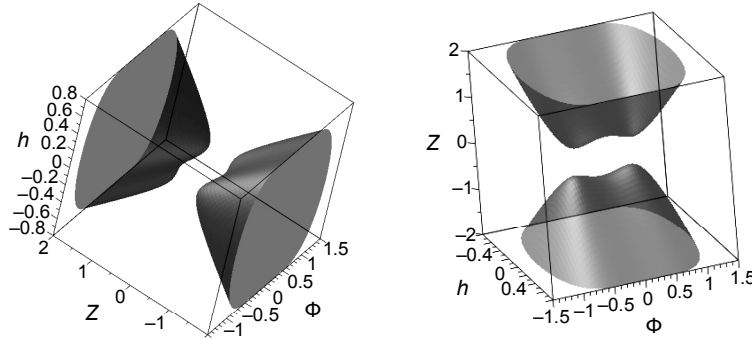


Рис. 3. Двуполостной гиперboloид:  $\alpha_m = 5$ ;  $e = +1$ ;  $\lambda = -0.1 \Rightarrow \beta = -1/4$ . Главная ось  $OZ$

Из этих примеров видно, что топология поверхности на рис. 3 допускает переходы космологической модели от стадии расширения к стадии сжатия  $H_+ \rightarrow H_-$ , а топология поверхности на рис. 4 – не допускает.

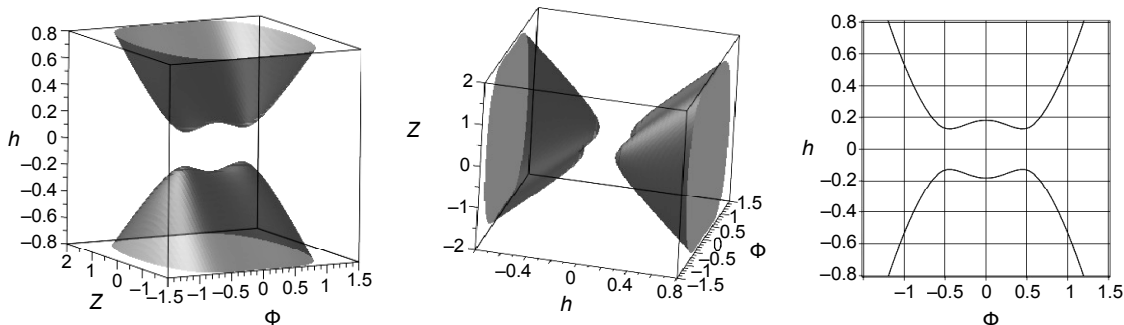


Рис. 4. Двуполостной гиперboloид:  $\alpha_m = -5$ ;  $e = -1$ ;  $\lambda = -0.1 \Rightarrow \beta = +1/4$ . Главная ось  $Oh$

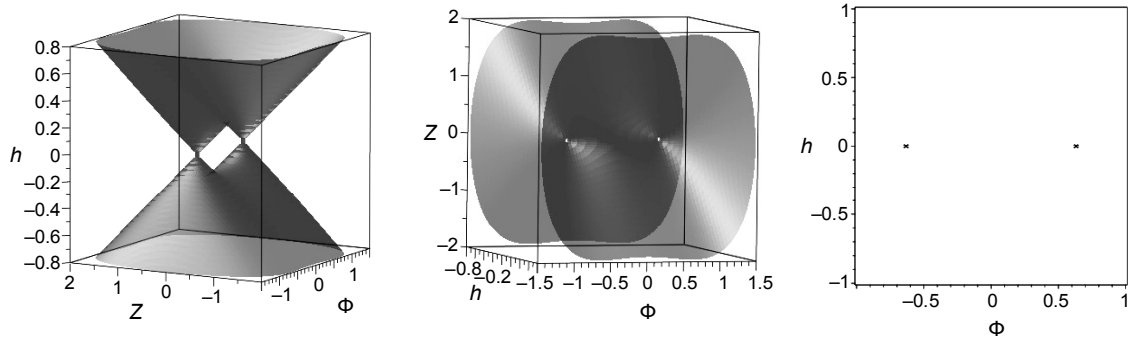


Рис. 5. Конус:  $\alpha_m = -2.5$ ;  $e = 1$ ;  $\lambda = -0.1 \Rightarrow \beta = 0$ . Главная ось  $Oh$ . Показаны точки сечения  $h = 0$

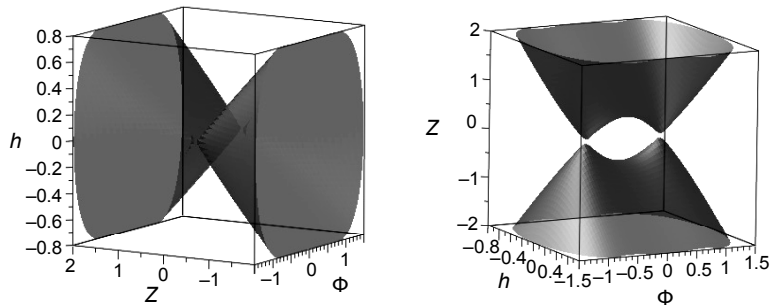


Рис. 6. Конус:  $\alpha_m = 2.5$ ;  $e = 1$ ;  $\lambda = -0.1 \Rightarrow \beta = 0$ . Главная ось  $OZ$

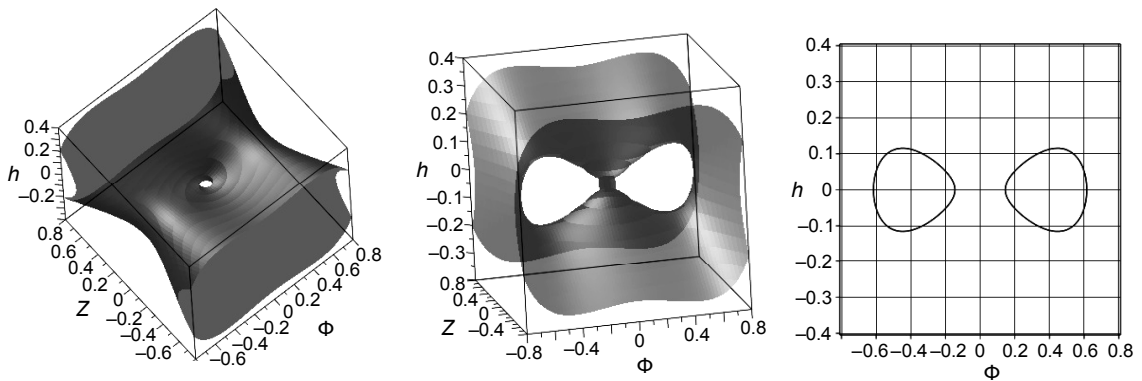


Рис. 7. Однополостной гиперболюид:  $\alpha_m = 5$ ;  $e = 1$ ;  $\lambda = -0.01 \Rightarrow \beta = 0.2$ . Главная ось  $OZ$

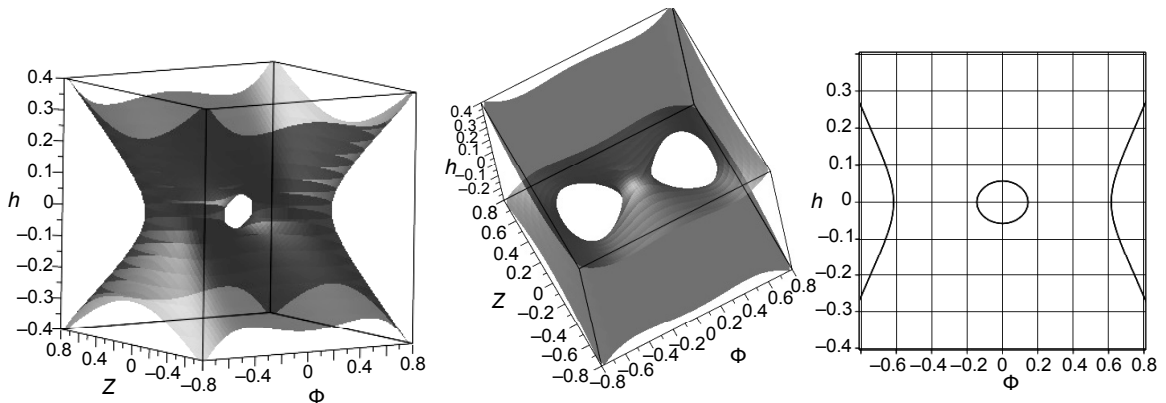


Рис. 8. Однополостной гиперболюид:  $\alpha_m = -5$ ;  $e = -1$ ;  $\lambda = -0.01 \Rightarrow \beta = 0.2$ . Главная ось  $OZ$

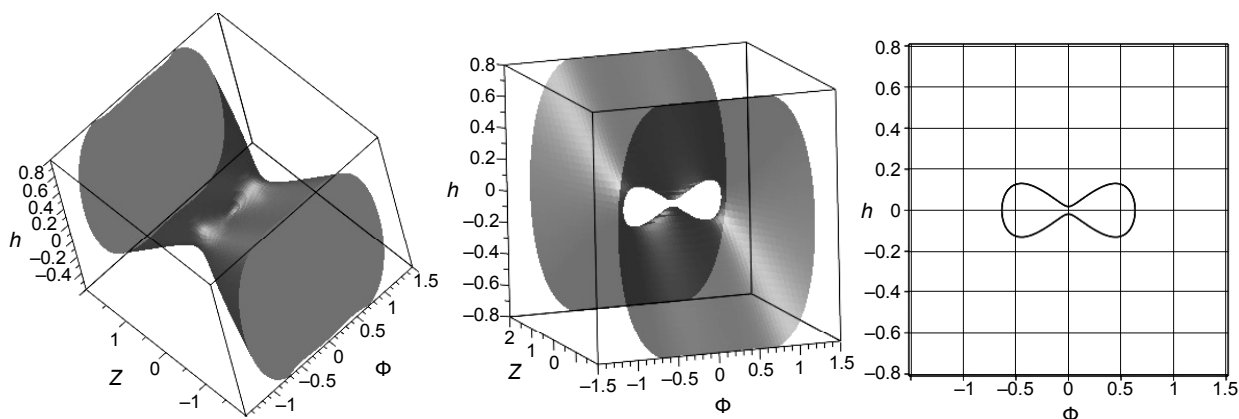


Рис. 9. Однополостной гиперboloид:  $\alpha_m = 2; e = 1; \lambda = 0.001 \Rightarrow \beta = 0.252 > 1/4$ . Главная ось  $OZ$

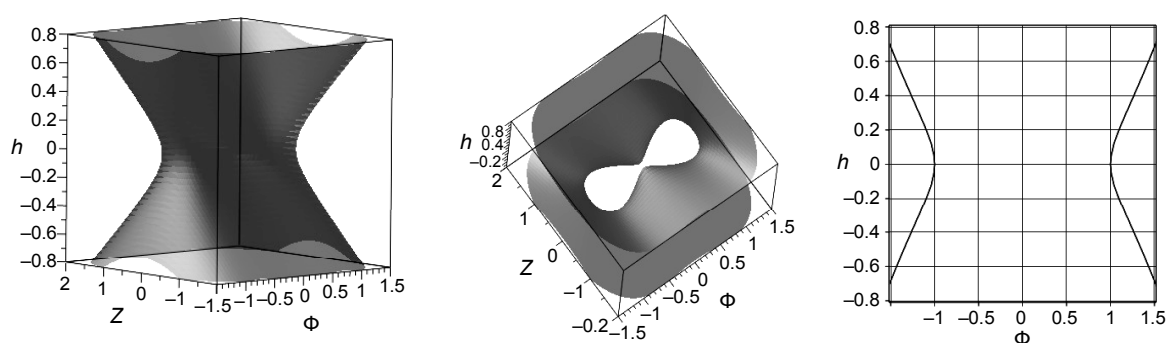


Рис. 10. Однополостной гиперboloид. Главная ось  $Oh$

В следующей части статьи мы обсудим результаты численного моделирования представленной космологической модели.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнат'ев Ю. Г. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – Вып. 2. – С. 36.
2. Игнат'ев Ю. Г. // Изв. вузов. Физика. – 2016. – Т. 59. – № 12. – С. 83–87.
3. Ignat'ev Yu. G. and Kokh I. A. // Gravit. and Cosmol. – 2019. – V. 25. – P. 24.
4. Ignat'ev Yu. G. and Kokh I. A. // Gravit. and Cosmol. – 2019. – V. 25. – P. 37.
5. Ignat'ev Yurii, Agathonov Alexander, and Kokh Irina, arXiv:1810.09873 [gr-qc] (2018).
6. Игнат'ев Ю. Г., Самигуллина А. Р. // Изв. вузов. Физика. – 2018. – Т. 61. – № 4. – С. 41–44.
7. Игнат'ев Ю. Г., Кох И. А. // Изв. вузов. Физика. – 2018. – Т. 61. – № 9. – С. 38–42.
8. Игнат'ев Ю. Г., Самигуллина А. Р. // Изв. вузов. Физика. – 2019. – Т. 62. – № 4. – С. 55–61.
9. Игнат'ев Ю. Г., Самигуллина А. Р. // Изв. вузов. Физика. – 2020. – Т. 63. – № 1. – С. 24–31.
10. Ignat'ev Yu. G. and Ignatyev D. Yu. // Gravit. and Cosmol. – 2020. – V. 26. – P. 29.
11. Боявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. – М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 07.10.2020.

Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

**Игнат'ев** Юрий Геннадиевич, д.ф.-м.н., профессор, ведущ. науч. сотр. Института физики КФУ, e-mail: ignat'ev\_yu@rambler.ru;

**Самигуллина** Алсу Ринатовна, ст. преподаватель каф. высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ, e-mail: alsu\_sam@rambler.ru.