ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Т. 64, № 9 ФИЗИКА 2021

УДК 530.12 DOI: 10.17223/00213411/64/9/149

О ВОЗМОЖНОЙ СТРУКТУРЕ ЛОКАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ФЕРМИОНОВ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ*

В.Г. Кречет[1], В.Б. Ошурко[1,2], А.Э. Байдин[1]

[1] Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия
[2] Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, г. Москва, Россия

В рамках ОТО рассматриваются возможные свойства локального пространства-времени фермионов, имеющих электрический заряд. Такие исследования обусловлены особенностями гравитационного взаимодействия дираковского спинорного поля, которое проявляет себя, в основном, локально, как контактное спин-спиновое взаимодействие гравитационного и спинорного полей. Показано, что такое взаимодействие вызывает реальное вращение частиц со спином $\hbar/2$, вследствие чего для электрически заряженных частиц – еще и появление собственного магнитного момента. При этом локальное пространство-время таких частиц может иметь структуру пространства-времени «кротовой норы», причем проходимой.

Ключевые слова: *гравитация, спинорное поле, спин-спиновое взаимодействие, магнитное поле, «кротовые норы».*

В рамках ОТО рассматриваются возможные свойства локального пространства-времени для дираковских спинорных частиц (фермионов), т.е. описываемых спинорным уравнением Дирака, обладающих электрическим зарядом, на уровне классической теории поля, т.е. без учета квантовых свойств.

Такая возможность обусловлена особенностями гравитационного взаимодействия спинорного поля, проявляющегося, в основном, локально, т.е. в том месте, где находится спинорная частица с собственным моментом импульса (спином) $\hbar/2$, о чем мы расскажем ниже.

Работая на уровне релятивистской физики, мы рассматриваем дираковскую спинорную частицу протяженным объектом масштаба своей комптоновской длины волны $\lambda_C = \dfrac{\hbar}{mc}$ и объемом $V \sim \lambda_C^3$.

При исследовании свойств гравитационного взаимодействия дираковского спинорного поля введем в рассмотрение спинорный лагранжиан $L(\psi)$, в римановом пространстве-времени являющийся ковариантным обобщением спинорного лагранжиана в пространстве Минковского:

$$L(\psi) = \frac{\hbar c}{2}\left[\nabla_k \bar{\psi}\gamma^k \psi - \bar{\psi}\gamma^k \nabla_k \psi - 2\mu\bar{\psi}\psi\right]. \qquad (1)$$

Здесь γ^k – матрицы Дирака в римановом пространстве, удовлетворяющие условию фундаментальной связи пространства и спина

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2g_{ik}I\,, \qquad (2)$$

где g_{ik} – компоненты метрического тензора, а I – единичная матрица (4×4).

В лагранжиане (1) ψ – дираковская спинорная 4-компонентная функция; $\bar{\psi}$ – дираковский сопряженный спинор; $\nabla_k\psi$ – ковариантная производная спинора ψ в римановом пространстве [1]:

$$\nabla_k\psi = \partial_k\psi - \Gamma_k\psi\,,\ \nabla_k\bar{\psi} = \partial_k\bar{\psi} + \bar{\psi}\Gamma_k\,. \qquad (3)$$

Здесь Γ_k – коэффициенты спинорной связности. Эти коэффициенты определяются из уравнения [1, 2]

$$\partial_k\gamma_i - \Gamma_{ki}^{\ m}\gamma_m - \Gamma_k\gamma_i + \gamma_i\Gamma_k = 0\,, \qquad (4)$$

где $\Gamma_{ki}^{\ m}$ – коэффициенты связности риманова пространства.

* Работа поддержана Министерством высшего образования и науки РФ, грант № FSFS-2020-0025.

Уравнение (4) есть следствие условий метричности для риманова пространства: $\nabla_k g_{ik} = 0$, $\nabla_k \gamma_i = 0$.

Матрицы Дирака γ_i в римановом пространстве определяются с использованием тетрадного формализма. Для этого в каждой точке риманова пространства строится касательный ортонормированный репер-тетрада e_a^i, удовлетворяющая соотношениям

$$e_a^i e_k^a = \delta_k^i \,,\ e_i^a e_{ak} = g_{ik} \,,\ e_a^k e_{kb} = \eta_{ab} \,,\ e_k^a e_b^k = \delta_b^a \,. \tag{5}$$

Здесь η_{ab} – метрический тензор пространства Минковского, касательного риманову пространству. Кроме того, индексы a, b, c, d, … относятся к тензорным объектам касательного пространства Минковского, а индексы i, k, l, m, … – к тензорным объектам риманова пространства.

Далее, используя соотношения (2) и (5), находим формулы для матриц γ_k риманова пространства

$$\gamma_i = e_i^a \overset{0}{\gamma}_a \,;\ \gamma^k = e^{ka} \overset{0}{\gamma}_a \,, \tag{6}$$

где $\overset{0}{\gamma}_a$ – матрицы Дирака пространства Минковского.

Используя соотношения (5), (6), находим решение для коэффициентов спинорной связности Γ_k [1, 2]:

$$\Gamma_k = -\frac{1}{4}\gamma^i \left(\partial_k \gamma_i - \Gamma_{ki}^m \gamma_m\right) + a_k I \quad (a_k \text{ – произвольный вектор}). \tag{7}$$

Теперь, подставляя формулы (3) для ковариантных производных спиноров $\bar{\psi}$, ψ в лагранжиан (1) для спинорного поля, представим лагранжиан в виде

$$L(\psi) = \frac{\hbar c}{2}\left[\partial_k \bar{\psi}\gamma^k \psi - \bar{\psi}\gamma^k \partial_k \psi + \bar{\psi}(\Gamma_k \gamma^k + \gamma^k \Gamma_k)\psi - 2\mu\bar{\psi}\psi\right]. \tag{8}$$

Выражение $\frac{\hbar c}{2}\bar{\psi}(\Gamma_k \gamma^k + \gamma^k \Gamma_k)\psi$ в (8) представляет собой лагранжиан взаимодействия $L_{\text{int}}(\psi, g)$ спинорного поля с гравитационным полем.

Подставляя в (8) формулу (7) для спинорной связности и используя алгебру тетрад (5) и алгебру матриц Дирака (2), лагранжиан (8) вместе с $L_{\text{int}}(\psi, g)$ окончательно приведем к виду с ясным физическим смыслом

$$L(\psi) = \frac{\hbar c}{2}\left[\partial_k \bar{\psi}\gamma^k \psi - \bar{\psi}\gamma^k \partial_k \psi - 2\mu\bar{\psi}\psi + \omega^k \bar{\psi}\gamma_k \gamma_5 \psi\right]. \tag{9}$$

Здесь ω^k представляет собой угловую скорость вращения поля тетрад, а математически 4-мерный ротор тетрадного репера

$$\omega^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kilm} e_{ia} e_{l,m}^a \,. \tag{10}$$

Угловая скорость ω^k является кинематической характеристикой вихревого гравитационного поля, т.е. вихревой составляющей полного гравитационного поля, и определяет его плотность потока момента импульса $s^i(g)$:

$$s^i(g) = \frac{\omega^i}{æ} \,,\ æ = \frac{8\pi G}{c^4} \,. \tag{11}$$

С другой стороны, аксиальный 4-вектор $\frac{\hbar c}{2}\bar{\psi}\gamma^i \gamma_5 \psi$ определяет плотность потока момента импульса (спина) спинорного поля $s^i(\psi) = \frac{\hbar c}{2}\bar{\psi}\gamma^i \gamma_5 \psi$, так что лагранжиан взаимодействия спинорного и вихревого гравитационного полей $L_{\text{int}}(\psi, g)$ в (9) можно записать в виде

$$L_{\text{int}}(\psi, g) = \text{æ} s^i(g) s_i(\psi) . \qquad (12)$$

То есть получается спин-спиновое взаимодействие спинорного и гравитационного полей с константой взаимодействия æ.

Лагранжиан системы гравитационного и спинорного полей, как известно, в общем случае имеет вид

$$L = -\frac{R}{2\text{æ}} + \frac{\hbar c}{2}\left[\nabla_k \bar{\psi}\gamma^k \psi - \bar{\psi}\gamma^k \nabla_k \psi - 2\mu\bar{\psi}\psi\right]. \qquad (13)$$

Из скалярной кривизны в (13) можно выделить вихревую часть [3]:

$$R = R(-\omega) + 2\omega_k \omega^k . \qquad (14)$$

Здесь $R(-\omega)$ есть безвихревая часть скаляра R.

Теперь, учитывая формулы (9) и (14), полный лагранжиан системы взаимодействующих гравитационного и спинорного полей (13) можно представить в развернутом виде

$$L = -\frac{R(-\omega) + 2\omega^k \omega_k}{2\text{æ}} + \frac{\hbar c}{2}\left[\partial_k \bar{\psi}\gamma^k \psi - \bar{\psi}\gamma^k \partial_k \psi + \omega^k \bar{\psi}\gamma_k \gamma_5 \psi - 2\mu\bar{\psi}\psi\right]. \qquad (15)$$

Варьируя плотность действия $\sqrt{-g}L$ по ω_k и приравнивая вариацию нулю, найдем соотношение между ω^k и плотностью потока спина спинорного поля:

$$\omega^k = \frac{\text{æ}\hbar c}{4}\bar{\psi}\gamma^k \gamma_5 \psi . \qquad (16)$$

Формулы (12) и (16) показывают, что взаимодействие вихревых составляющих спинорного и гравитационного полей является контактным взаимодействием, т.е. угловая скорость ω^k появляется лишь локально, т.е. в тех точках пространства, где наличествует момент импульса спинорного поля.

Из всего этого следует вывод, что при рассмотрении дираковской спинорной частицы со спином $\hbar/2$ как протяженного объекта, ограниченного его комптоновской длиной волны $\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$, с пространственным объемом $V \sim \lambda_C^3$, каждая точка внутри этого объема вращается с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\omega_k \omega^k}$ вокруг общей оси, направленной вдоль вектора спина, в соответствии с формулой (16), и являющейся центральной осью симметрии.

Для случая дираковской спинорной частицы с электрическим зарядом, распределенным в ее объеме, с учетом полученных выше результатов мы имеем в этом объеме вращающуюся в стационарном режиме электрически заряженную сплошную среду. При вращении электрически заряженной сплошной среды получаются кольцевые электрические токи. В результате индуцируется магнитный момент у спинорной частицы с распределенным внутри ее продольным магнитным полем, параллельным оси вращения и вектору спина. Именно так можно объяснить существование магнитного момента у фермионов с электрическим зарядом, как эффект локального спин-спинового гравитационного взаимодействия дираковского спинорного поля. Здесь следует еще отметить, что указанная выше сплошная электрически заряженная среда может моделироваться идеальной электрически заряженной жидкостью.

В пользу такого вывода указывают результаты экспериментов на Большом адронном коллайдере, показавшие, что кварк-глюонная плазма, являющаяся материальной субстанцией многих фермионов (протоны, нейтроны, гипероны), имеет свойства идеальной жидкости. Кроме того, плотность этой материи очень большая, близка к ядерной ~ 10^{13} г/см^3, поэтому она будет гравитировать, создавая собственное гравитационное поле внутри своего объема, дополнительно к уже присутствующему вихревому гравитационному полю. Исследовать это гравитационное поле при такой большой плотности необходимо в рамках эйнштейновской теории гравитации.

Простейшим примером стационарного пространства-времени, совместимого с наличием вихревого гравитационного поля и вращающейся жидкостью, является пространство-время с цилиндрической симметрией, описываемое метрикой [4]

$$dS^2 = Adx^2 + Bd\varphi^2 + Cdz^2 - Ddt^2 + 2Edtd\varphi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi). \tag{17}$$

Здесь ось OZ – ось симметрии, направленная вдоль вектора спина, а метрические коэффициенты A, B, C, D, E есть функции радиальной координаты x.

Выбираем систему отсчета, сопутствующую вращающейся жидкости. Тогда времениподобный единичный вектор тетрады e_4^i будет совпадать с вектором 4-скорости υ^i, нормированным на единицу и касательным к координатным линиям времени

$$e_4^i = \upsilon^i = \left(0,\ 0,\ 0,\ 1\big/\sqrt{D}\right),\ \upsilon^i\upsilon_i = -1,\ \upsilon^i = \delta_4^i = 1\big/\sqrt{D}. \tag{18}$$

Остальные три тетрадных вектора определяются компонентами

$$e_1^i = \left(1\big/\sqrt{A},\ 0,\ 0,\ 0\right),\ e_2^i = \left(0,\ \sqrt{D/\Delta},\ 0,\ 0\right),\ e_3^i = \left(0,\ 0,\ 1\big/\sqrt{C},\ 0\right),\ \Delta = E^2 + BD. \tag{19}$$

С использованием выражений для векторов тетрады (18), (19) по формуле (11) находим угловую скорость вращения ω^k:

$$\omega^k = \frac{E'D - D'E}{2D\sqrt{AC\Delta}}\delta_3^k,\ \omega = \sqrt{\omega^k\omega_k} = \frac{E'D - D'E}{2D\sqrt{A\Delta}}. \tag{20}$$

Действительно, получается, что вектор угловой скорости направлен вдоль оси OZ, т.е. вращение происходит вокруг этой оси, как мы и говорили выше. Поскольку выбрана сопутствующая система отсчета, то азимутальный поток жидкости $T_4^2 = 0$, поэтому $R_4^2 = 0$, отсюда получаем, что

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{\Delta}}{2D\sqrt{A}},\ \omega_0 = \text{const}. \tag{21}$$

Далее мы находим метрику эффективного пространственного сечения [3]

$$dl^2 = Adx^2 + Rd\varphi^2 + Cdz^2,\ R = \frac{E^2 + BD}{D} = \frac{\Delta}{D}. \tag{22}$$

Поэтому рассматриваемое пространство-время определяется четырьмя метрическими коэффициентами: A, R, C, D.

В рассматриваемом случае основной материальной компонентой является электрически заряженная вращающаяся вокруг оси OZ идеальная жидкость с плотностью электрического заряда ρ. Считаем, что она подчиняется баротропному уравнению состояния: $p = w\varepsilon$, $w = \text{const}$, где p – давление, а ε – плотность энергии.

Но поскольку при ее вращении получаются кольцевые электрические токи, то в системе будет индуцироваться магнитный момент с распределенным магнитным продольным полем B_z, направленным вдоль оси OZ.

Такому магнитному полю соответствует 4-векторный потенциал A_i с компонентами

$$A_i = (0,\ \varphi(x),\ 0,\ 0). \tag{23}$$

Поэтому у тензора напряженности электромагнитного поля $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$ будет только одна ковариантная компонента $F_{12} = \varphi' \equiv B_z$.

Ненулевые контравариантные компоненты этого тензора следующие:

$$F^{12} = \frac{D}{A\Delta}\varphi',\ F^{14} = \frac{E}{A\Delta}\varphi',\ \Delta = E^2 + BD. \tag{24}$$

Плотность электрического тока J^i определяется формулой $J^i = \rho u^i$, где u^i – 4-скорость, которая в данном случае с учетом (18) примет вид

$$u^i = \delta_4^i \frac{1}{\sqrt{D}};\ J^i = \frac{\rho}{\sqrt{D}}\delta_4^i. \tag{25}$$

При этом закон сохранения электрического заряда ($J^k_{;k} = 0$) выполняется тождественно.

Далее записываем уравнения Максвелла $F^{ik}_{;k} = J^i$, которых в данном случае окажется два:

$$\left(\sqrt{AC\Delta}\frac{D}{A\Delta}\varphi'\right)' = 0\,,\ \frac{1}{\sqrt{AC\Delta}}\left(\sqrt{AC\Delta}\frac{E}{A\Delta}\varphi'\right)' = \frac{\rho}{\sqrt{D}}\,. \tag{26}$$

Из уравнений (26) получаем формулы:

$$\frac{\varphi'}{A\Delta} = \frac{h}{D\sqrt{AC\Delta}}\,,\ \frac{E'D - D'E}{D^2} = \frac{\rho}{h}\sqrt{\frac{AC\Delta}{D}}\,,\ h = \text{const}\,. \tag{27}$$

С использованием полученных результатов получаем формулу для плотности электрического заряда ρ:

$$\rho = \frac{h\omega_0}{CD\sqrt{D}}\,. \tag{28}$$

Однако электрические заряды всегда имеют материального носителя, можно сказать, они вморожены в материю с плотностью энергии ε. Поэтому отношение плотности электрического заряда к плотности энергии для одного и того же вида заряженной материи всюду должно быть одинаковым, т.е.

$$\rho/\varepsilon = a\,,\ \rho = a\varepsilon\,,\ a = \text{const}\,. \tag{29}$$

В результате из (28) и (29) находим выражение для плотности энергии электрически заряженной жидкости:

$$\varepsilon = \frac{h\omega_0}{a}\frac{1}{CD\sqrt{D}} \quad (h,\ \omega_0,\ a = \text{const}\,). \tag{30}$$

С другой стороны, из локального закона сохранения энергии $T^{ik}_{;k} = 0$ для случая идеальной жидкости при условии стационарности имеем уравнение

$$p' + \frac{D'}{2D}(p + \varepsilon) = 0\,. \tag{31}$$

При использовании уравнения состояния $p = w\varepsilon$ получаем решение уравнения (31):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 D^{-\frac{w+1}{2w}}\,,\ \varepsilon_0 = \text{const}\,. \tag{32}$$

Теперь, сравнивая (30) и (32), получаем соотношение между метрическими коэффициентами

$$D^{\frac{1-2w}{2w}} = \frac{a\varepsilon_0}{h\omega_0}C\,. \tag{33}$$

Далее необходимо вычислить компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля для рассматриваемого случая наличия продольного магнитного поля по известной формуле

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4}g_{ik}F_{ml}F^{ml} - F_{im}F_k{}^m\right]. \tag{34}$$

С учетом формул (24) для F_{ik} из (34) находим компоненты T^i_k:

$$T^1_1 = -\frac{1}{8\pi}\frac{D}{C\Delta^2}\varphi'^2\,;\ T^2_2 = -\frac{1}{8\pi}\frac{D}{C\Delta^2}\varphi'^2\,;\ T^3_3 = \frac{1}{8\pi}\frac{D}{C\Delta^2}\varphi'^2\,;\ T^4_4 = \frac{1}{8\pi}\frac{D}{C\Delta^2}\varphi'^2\,. \tag{35}$$

После этого вычисляем компоненты тензора энергии-импульса для рассматриваемой идеальной жидкости по известной формуле: $T_{ik} = (p + \varepsilon)u_i u_k + pg_{ik}$ (в сигнатуре +++–),

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = p\,,\ T^4_4 = -\varepsilon\,. \tag{36}$$

Для удобства метрические коэффициенты представим в экспоненциальной форме:

$$A = e^{2\alpha},\ R = e^{2\beta},\ C = e^{2\mu},\ D = e^{2\gamma}, \tag{37}$$

и примем координатное условие гармоничности $\alpha = \beta + \gamma + \mu$.

В итоге с учетом всех полученных формул выписываем уравнения Эйнштейна для рассматриваемой самогравитирующей вращающейся идеальной электрически заряженной жидкости, взаимодействующей с вихревым гравитационным полем и индуцированным продольным магнитным полем:

$$\begin{gathered}
\beta'\gamma' + \beta'\mu' + \gamma'\mu' = -\omega_0^2 e^{2\beta-2\gamma} + æh^2 e^{2\beta+2\gamma} + 2æw\varepsilon_0 e^{2\beta+2\mu+\frac{w-1}{w}\gamma},\\
\beta'' = 2\omega_0^2 e^{2\beta-2\gamma} - æh^2 e^{2\beta+2\gamma} + (w-1)æ\varepsilon_0 e^{2\beta+2\mu+\frac{w-1}{w}\gamma},\\
\gamma'' = -2\omega_0^2 e^{2\beta-2\gamma} + æh^2 e^{2\beta+2\gamma} + (3w+1)æ\varepsilon_0 e^{2\beta+2\mu+\frac{w-1}{w}\gamma},\\
\mu'' = æh^2 e^{2\beta+2\gamma} + (w-1)æ\varepsilon_0 e^{2\beta+2\mu+\frac{w-1}{w}\gamma}.
\end{gathered} \tag{38}$$

Далее соотношение (33) , в новых обозначениях принимающее вид $e^{\frac{1-2w}{w}\gamma} = \dfrac{a\varepsilon_0}{h\omega_0} e^{2\mu}$, приводит к соотношениям между производными функций $\gamma(x)$ и $\mu(x)$:

$$\frac{1-2w}{w}\gamma' = 2\mu',\ \frac{1-2w}{w}\gamma'' = 2\mu''. \tag{39}$$

Теперь, комбинируя 3-е и 4-е уравнения системы (38) с учетом вышеприведенных соотношений, получим уравнение для метрического коэффициента $e^{2\gamma}$

$$2\omega_0^2 e^{-2\gamma} + \frac{æh^2}{1-2w} e^{2\gamma} + \frac{4w(4w-1)}{1-2w} æ \frac{h\omega_0}{a} e^{-\gamma} = 0. \tag{40}$$

Получилось алгебраическое уравнение с постоянными коэффициентами для этого метрического коэффициента. Отсюда следует, что $e^{\gamma} = \mathrm{const} \equiv b$, и поэтому

$$\gamma' = 0,\ \gamma'' = 0,\ \mu' = 0,\ \mu'' = 0 \ \text{ и } \ e^{2\mu} = \frac{h\omega_0}{a\varepsilon_0}. \tag{41}$$

Здесь константа b – корень уравнения (40). Выбором масштаба времени эту константу можно сделать равной единице.

С учетом (41) 3-е и 4-е уравнения системы (38), следствием которых является уравнение (40), после сокращения на $e^{2\beta}$ также примут вид алгебраических соотношений между параметрами (ω_0, h, ε_0, a, w):

$$\begin{gathered}
-2\omega_0^2 + æh^2 + (3w+1)æ\frac{h\omega_0}{a} = 0,\\
æh^2 + (w-1)æ\frac{h\omega_0}{a} = 0.
\end{gathered} \tag{42}$$

При подстановке соотношений (41), (42) в 1-е уравнение системы (38) – уравнение 1-го порядка, оно обращается в тождество, что свидетельствует о совместности системы уравнений (38) и полученных соотношений (41) и (42).

А из формулы (21) для угловой скорости при учете в ней соотношений (41) следует, что $\omega = \omega_0$, т.е. угловая скорость вращения во всех точках электрически заряженной частицы одинакова, т.е. имеет место твердотельное вращение.

Далее из формул (28) – (30) следует, что при этом и $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\rho = a\varepsilon_0$, $p = w\varepsilon_0$, т.е. плотность энергии, плотность электрического заряда и давление также во всех точках рассматриваемой материальной системы одинаковы.

Кроме того, из полученных соотношений (42) следует, что все параметры данной системы выражаются через два (ω_0 и w) и получаются границы возможных значений для коэффициента w:

$$æh^2 = \frac{1-w}{1+w}\omega_0^2,\ æ\varepsilon_0 = \frac{\omega_0^2}{w+1},\ a = \frac{\rho}{\varepsilon} = \sqrt{æ(1-w^2)},\ -1 < w < 1. \qquad (43)$$

Из последнего в (43) условия для коэффициента w следует, что невозможно существование стационарных конфигураций электрически заряженной жидкости с предельным уравнением состояния ($w=1$) и вакуумно-подобным уравнением состояния ($w=-1$).

В применении к дираковским спинорным частицам с электрическим зарядом следует вывод, что их материальная субстанция не может быть предельно жесткой и вакуумно-подобной.

Теперь, подставляя соотношения (41), (43) во второе уравнение системы (38), т.е. в уравнение для углового метрического коэффициента $e^{2\beta} \equiv R(x)$, найдем

$$\beta'' = \frac{4w}{1+w}\omega_0^2 e^{2\beta},\ -1 < w < 1. \qquad (44)$$

То есть получено дифференциальное уравнение для углового метрического коэффициента в метрике пространства-времени самогравитирующей вращающейся электрически заряженной жидкости с баротропным уравнением состояния $p = w\varepsilon$, общее для всех возможных значений коэффициента баротропности w в интервале ($-1 < w < 1$), причем это есть уравнение Лиувиля, решение которого известно.

Сказанное выше разительно отличается от случая вращающейся электрически нейтральной идеальной жидкости с баротропным уравнением состояния $p = w\varepsilon$, когда решение гравитационных уравнений удается получить лишь для нескольких значений коэффициента w: $w = 1,\ 0,\ -1$.

Из получившегося уравнения (44) для функции $\beta(x)$ следует, что $\beta'' > 0$ при $w > 0$. Но положительное значение второй производной от углового метрического коэффициента есть необходимое (но не достаточное) условие для образования геометрии «кротовой норы». Таким образом, лишь при $w > 0$ возможно образование «кротовой норы», и исключаются случаи, когда $w \le 0$, что соответствует пылевидной материи и материи с отрицательным давлением.

Но такие виды материи, т.е. типа пыли или с отрицательным давлением, которые применяются в космологических моделях, не могут, естественно, рассматриваться как материальная субстанция дираковских спинорных частиц – фермионов, свойства которых мы здесь рассматриваем.

Поэтому здесь мы будем считать, что $w > 0$, а это, как мы доказали выше, соответствует возможности образования геометрии пространства-времени «кротовых нор» как локального пространства-времени фермионов, и будем рассматривать решения уравнения (44) только для такого случая ($w > 0$).

Первый интеграл этого уравнения следующий:

$$\beta' = -\sqrt{q^2 e^{2\beta} + \operatorname{sign} k \cdot k^2},\ k = \mathrm{const}. \qquad (45)$$

Здесь $\operatorname{sign} k$ – знаковая функция: $\operatorname{sign} k = 1$ при $k > 0$, $\operatorname{sign} k = -1$ при $k < 0$, и принято обозначение $q^2 = \omega_0^2 \dfrac{4w}{w+1}$.

Здесь уместно отметить, что еще одним необходимым условием существования геометрии пространства-времени «кротовой норы», кроме условия $\beta'' > 0$, является обращение в нуль первой производной функции $\beta(x)$ ($\beta' = 0$) внутри области существования решения. Но такое возможно, очевидно, лишь при $k < 0$, когда $\operatorname{sign} k = -1$, и 1-й интеграл (45) будет иметь вид

$$\beta' = -\sqrt{q^2 e^{2\beta} - k^2},\ q^2 = \omega_0^2 \frac{4w}{w+1}. \qquad (46)$$

Здесь нам интереснее решения с «кротовой норой», и поэтому будем, в первую очередь, находить решение уравнения (46). Это решение следующее:

$$e^{2\beta} = \frac{k^2}{q^2}\frac{1}{\cos^2 kx},\ -\frac{\pi}{2} < kx < \frac{\pi}{2}. \qquad (47)$$

Из этой формулы видно, что функция $e^{2\beta}$ на обоих концах интервала $\left(-\frac{\pi}{2k} < x < \frac{\pi}{2k}\right)$ стремится к бесконечности, что соответствует наличию двух пространственных бесконечностей на концах интервала, и нигде внутри его не обращается в нуль, а это соответствует свойствам пространства-времени «кротовой норы».

Чтобы представить это решение в более наглядном виде, произведем преобразование радиальной координаты $x = x(r)$, после которого метрика станет более близкой по виду к метрике пространства Минковского, а концы интервала $\left(-\frac{\pi}{2k} < x < \frac{\pi}{2k}\right)$ раздвинутся в $+\infty$ и $-\infty$. Это преобразование следующее:

$$qr = \ln\left(\frac{1+\sin kx}{\cos kx}\right), \; q = 2\omega_0\sqrt{\frac{w}{w+1}} \; . \qquad (48)$$

В результате метрика пространства-времени получившейся «кротовой норы» будет иметь вид

$$dS^2 = dr^2 + \frac{k^2(w+1)}{4w\omega_0^2}\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{\frac{4w}{w+1}}\omega_0 r\right)d\varphi^2 + dz^2 - dt^2 \quad (-\infty < r < \infty). \qquad (49)$$

Метрика (49) описывает геометрию пространства-времени «кротовой норы» с плоской асимптотикой на обоих концах, так как ее метрические коэффициенты $e^{2\alpha}$, $e^{2\gamma}$ и $e^{2\mu}$ везде равны единице, т.е. совпадают с соответствующими метрическими коэффициентами пространства Минковского, а сама «кротовая нора» является проходимой, так как у нее нигде во всем интервале изменения радиальной координаты нет особенностей.

Самое узкое место «кротовой норы», т.е. горловина, находится в точке $r = 0$, а радиус горловины $a_0 = \sqrt{\frac{w+1}{4w}}\frac{k}{\omega_0}$.

Таким образом, локальное пространство-время дираковской спинорной частицы с электрическим зарядом может иметь структуру пространства времени «кротовой норы», проходимой в обоих направлениях и с обоими выходами в плоское пространство-время Минковского, т.е. в пространство-время наблюдателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брилл Д., Уилер Дж. // Новейшие проблемы гравитации: сб. статей / под ред. Д. Иваненко. – М.: ИЛ, 1961. – С. 381–427.
2. Кречет В.Г., Пономарёв В.Н. // ТМФ. – 1975. – Т. 25. – № 1. – С. 141–144.
3. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982. – 256 с.
4. Кречет В.Г. // Изв. вузов. Физика. – 2007. – Т. 50. – № 10. – С. 57–60.

Поступила в редакцию 16.06.2020.

Кречет Владимир Георгиевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры физики МГТУ «СТАНКИН»;
Ошурко Вадим Борисович, д.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой физики МГТУ «СТАНКИН», ИОФ РАН, e-mail: vbo08@yandex.ru;
Байдин Алексей Эдуардович, к.ф.-м.н., доцент кафедры физики МГТУ «СТАНКИН», e-mail: al.baidin@yandex.ru.