

УДК 530.12:531.51:519.711.3

DOI: 10.17223/00213411/64/5/147

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ, А.Р. САМИГУЛЛИНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ МОДЕЛИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ
КЛАССИЧЕСКОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С ХИГГСОВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ.
II. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ***

Проведено исследование и компьютерное моделирование полной модели космологической эволюции классического скалярного поля с Хиггсовым потенциалом без предположения о неотрицательности постоянной Хаббла. Показано, что в большинстве случаев начальных условий космологическая модель переходит из стадии расширения на стадию сжатия. Таким образом, космологические модели, основанные на классическом поле Хиггса, неустойчивы по отношению к конечным возмущениям.

Ключевые слова: космологические модели, поля Хиггса, гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса, глобальное поведение.

1. Динамическая система и замечания к задаче Коши

В первой части работы [1] были сформулированы основные математические соотношения космологической модели, основанной на классическом скалярном Хиггсовом поле. Это, во-первых, – нормальная автономная система дифференциальных уравнений

$$\Phi' = Z ; \tag{1}$$

$$Z' = -3hZ - e\Phi + \alpha_m \Phi^3 ; \tag{2}$$

$$h' = -3h^2 + \frac{e\Phi^2}{2} - \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} + \lambda_m , \tag{3}$$

где производные берутся по времени $\tau = mt$ в комптоновских единицах; $\lambda = \lambda_0 - m^4/4\alpha_m$; остальные обозначения см. в [1]. Во-вторых, это – уравнение гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса, являющееся, по сути, с одной стороны, уравнением Эйнштейна $\frac{4}{4}$, с другой стороны – первым интегралом динамической системы (1) – (3):

$$3h^2 - \frac{Z^2}{2} - \frac{e\Phi^2}{2} + \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} - \lambda_m = 0. \tag{4}$$

В третьих, это – соотношения для физических характеристик космологической модели: инвариантного космологического ускорения

$$\Omega \equiv \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{5}$$

инвариантной кривизны пространства Фридмана

$$\sigma \equiv \sqrt{R_{ijkl}R^{ijkl}} = H^2 \sqrt{6(1 + \Omega^2)} \equiv \sqrt{6} \sqrt{H^4 + (H^2 + \dot{H})^2} \geq 0, \tag{6}$$

эффективной энергии динамической системы

$$\mathcal{E}_m(\Phi, Z) = \frac{Z^2}{2} + \frac{e\Phi^2}{2} - \frac{\alpha_m \Phi^4}{4} + \lambda_m \geq 0. \tag{7}$$

Наконец, в-четвертых, это – некоторые дифференциальные соотношения между динамическими переменными, являющиеся следствием полной системы уравнений Эйнштейна и скалярного поля Хиггса, в частности эквивалентная форма уравнения (5)

* This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program.

$$h' = -\frac{Z^2}{2} \quad (\leq 0), \quad (8)$$

согласно которому в космологической модели с классическим скалярным полем Хигса постоянная Хаббла не может возрастать со временем.

Переходя к численному моделированию исследуемой динамической системы, отметим, во-первых, что некоторые существенные особенности поведения этой системы уже были выявлены на основе численного моделирования в работе [2]. Следуя этой работе, динамическую систему (1) – (3) будем определять упорядоченным списком трех безразмерных параметров $\mathbf{P} = [e, \alpha_m, \lambda_m]$ и упорядоченным списком начальных условий $\mathbf{I} = [\Phi_0, Z_0, \varepsilon]$, где $\varepsilon = \pm 1$, причем значению $\varepsilon = +1$ соответствует фаза расширения в начальный момент времени t_0 , значению $\varepsilon = -1$ – фаза сжатия в этот момент времени. Согласно сказанному выше, начальное значение постоянной Хаббла определяется уравнением Эйнштейна (4), из которого имеем

$$h_0 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{Z_0^2}{2} + \frac{e\Phi_0^2}{2} - \frac{\alpha_m \Phi_0^4}{4} + \lambda_m} \equiv \frac{\varepsilon}{3} \sqrt{\mathcal{E}_m^0}. \quad (9)$$

Во-вторых, заметим [2], что динамическая система (1) – (3) является автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, явно не зависящих от временной переменной, вследствие чего инвариантна по отношению к трансляции $t \rightarrow t_0 + t$. Поэтому в качестве начального момента времени при формировании начальных условий может быть выбрано любое значение t_0 . Мы положим это значение равным нулю. При этом мы вправе рассматривать и состояния динамической системы при отрицательных временах $t_0 < 0$.

2. Результаты численного моделирования

2.1. Параметры динамической системы $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$

На рис. 1 показана карта особых точек данной динамической системы. Здесь и далее сплошным черным кружком изображены притягивающие фокусы (af), звездочкой – отталкивающие фокусы (rf), диагональным крестом – седловые точки (sd). На рис. 2 изображена поверхность Эйнштейна – Хигса для этого набора параметров.

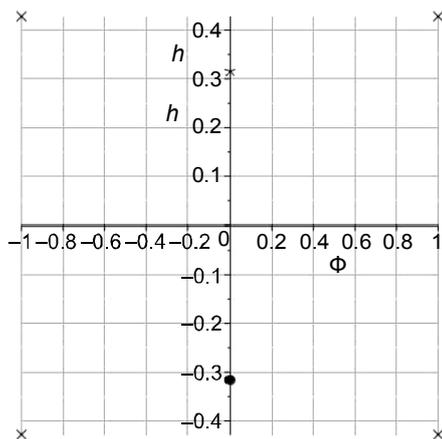


Рис. 1. Карта особых точек динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$

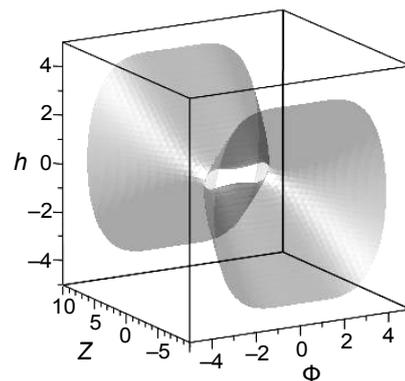


Рис. 2. Гиперповерхность Эйнштейна – Хигса динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$

Таким образом, в данном случае имеются все шесть особых точек: $[[0, -0.3162277660], \text{af}]$, $[[0, 0.3162277660], \text{rf}]$, $[[-1, -0.4281744192], \text{sd}]$, $[[1, -0.4281744192], \text{sd}]$, $[[-1, 0.4281744192], \text{sd}]$, $[[1, 0.4281744192], \text{sd}]$, из которых два фокуса – притягивающий (внизу) и отталкивающий (вверху) и четыре седловые точки (по углам).

Согласно классификации гиперповерхностей Эйнштейна – Хигса (см. работу [1]), в данном случае гиперповерхность Эйнштейна – Хигса представляет деформированный однополостный

гиперболоид с главной осью OZ . Таким образом, топология гиперповерхности Эйнштейна допускает скатывание фазовых траекторий с верхней части поверхности в нижнюю. На рис. 3 и 4 показаны зависимость $h(\tau)$ для различных начальных условий (рис. 3) и фазовые траектории динамической системы в плоскости $\{\Phi, h\}$ на фоне карты особых точек и сечения гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса $S:Z=0$ (рис. 4).

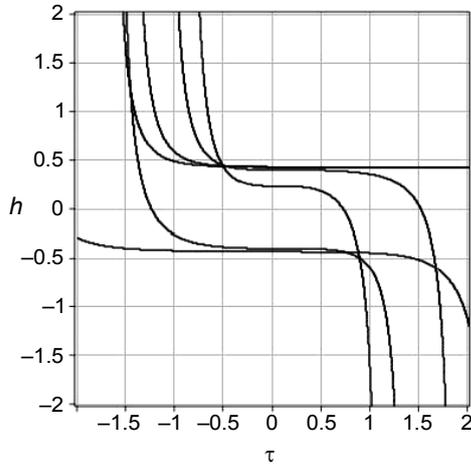


Рис. 3. Эволюция постоянной Хаббла динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$

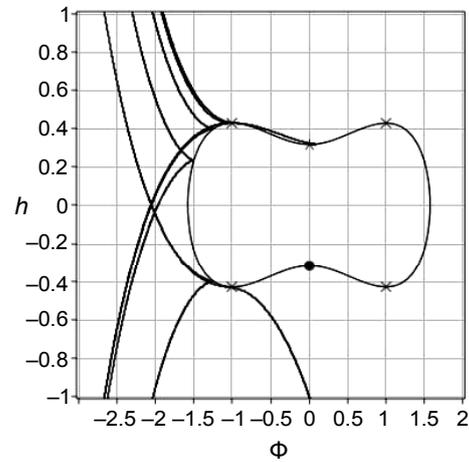


Рис. 4. Фазовые траектории динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$ в плоскости $S:Z=0$

Наконец, на рис. 5 приведены фазовые траектории данной динамической системы, наложенные на ее гиперповерхность Эйнштейна – Хиггса, а на рис. 6 – эволюция инвариантного ускорения.

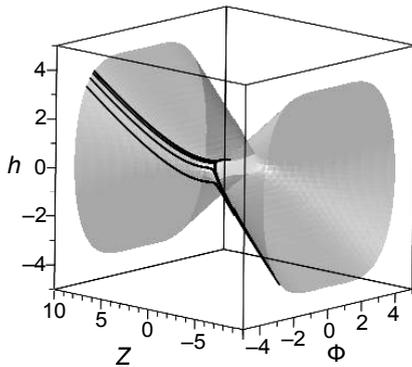


Рис. 5. Фазовые траектории динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$ на гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса

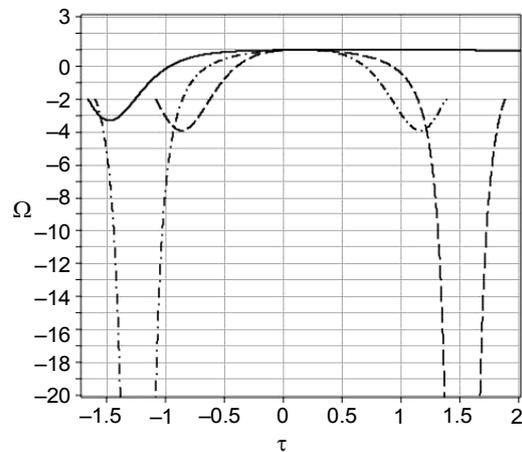


Рис. 6. Инвариантное ускорение динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [1, 1, 0.3]$ и начальных условий $\mathbf{I} = [-1, 0.1, 1]$ – сплошная кривая; $\mathbf{I} = [-1.25, 0.1, 1]$ – пунктирная, $\mathbf{I} = [-1.25, 0.1, -1]$ – точно-пунктирная

2.2 Параметры динамической системы $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$

На рис. 7 показана карта особых точек данной динамической системы. На рис. 8 изображена поверхность Эйнштейна – Хиггса для этого набора параметров.

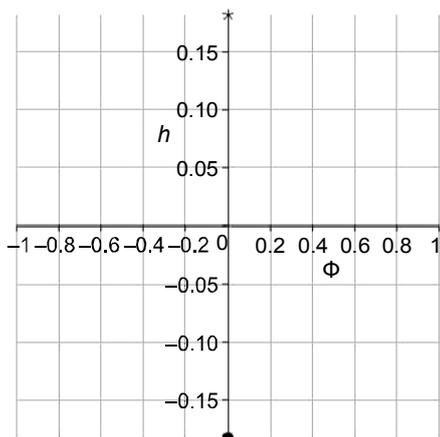


Рис. 7. Карта особых точек динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$

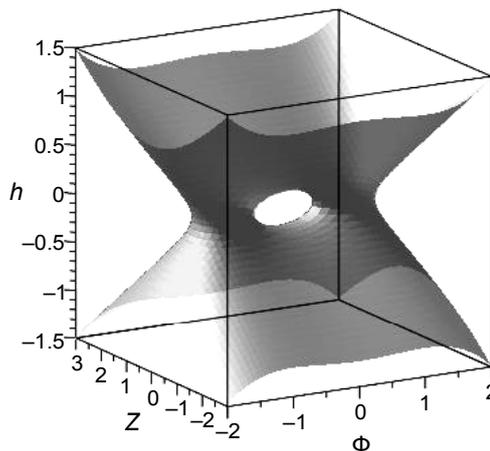


Рис. 8. Поверхность Эйнштейна – Хиггса динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$

Таким образом, в данном случае имеются всего две особые точки: $[[0, -0.1825741858], gf]$ и $[[0, 0.1825741858], af]$, одна из которых – притягивающий (внизу) и отталкивающий (вверху) центры.

Гиперповерхность Эйнштейна – Хиггса представляет деформированный однополостный гиперboloид с главной осью Oh . Таким образом, топология гиперповерхности Эйнштейна допускает скатывание фазовых траекторий с верхней части поверхности в нижнюю.

На рис. 9 и 10 показаны зависимость $h(\tau)$ для различных начальных условий (рис. 9) и фазовые траектории динамической системы в плоскости $\{\Phi, h\}$ на фоне карты особых точек и сечения гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса $S:Z=0$ (рис. 10). Наконец, на рис. 11 приведены фазовые траектории данной динамической системы, наложенные на ее гиперповерхность Эйнштейна – Хиггса, а на рис. 12 – эволюция инвариантного ускорения.

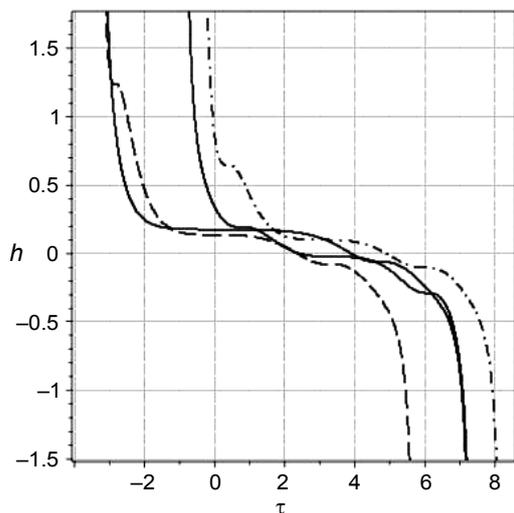


Рис. 9. Эволюция постоянной Хаббла динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$

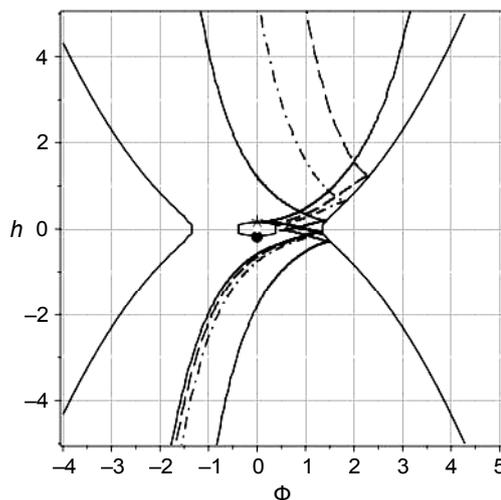


Рис. 10. Фазовые траектории динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$ в плоскости $S:Z=0$ на фоне карты особых точек

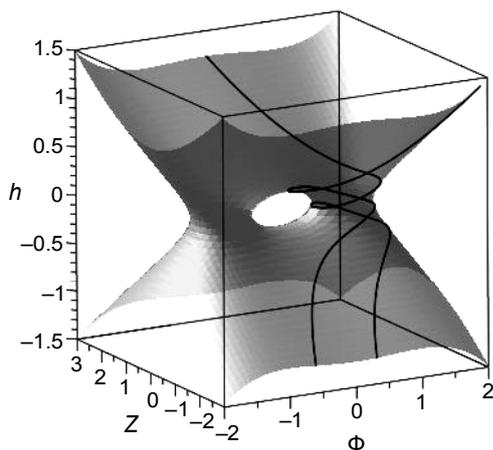


Рис. 11. Фазовые траектории динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$ на гиперповерхности Эйнштейна – Хиггса

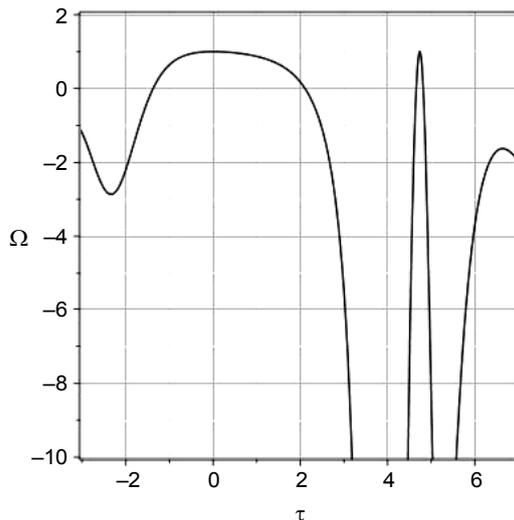


Рис. 12. Инвариантное ускорение динамической системы (1) – (3) для параметров $\mathbf{P} = [-1, -1, 0.1]$ и начальных условий $\mathbf{I} = [-1, 0.1, 1]$

Заключение

В заключении перечислим основные результаты работы.

1. Космологические модели с классическим Хиггсовым полем в широком диапазоне фундаментальных параметров и начальных условий обнаруживают тенденцию переходить из режима расширения ($H > 0$) в режим сжатия ($H < 0$).

2. При этом имеются два режима скатывания $H_+ \rightarrow H_-$ в зависимости от геометрии гиперповерхности Эйнштейна, точнее говоря, от направления ее главной оси.

3. Обычно используемые в стандартной космологии постоянные решения $\Phi = \text{const}$ соответствуют устойчивым особым точкам (притягивающим фокусам). Однако при небольшом конечном отклонении от особой точки решение скатывается к неограниченному сжатию.

4. Таким образом, можно констатировать, что решения, используемые в стандартных сценариях, составляют малый, по сравнению с общим, фазовый поток, т.е. вероятность таких решений мала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнат'ев Ю.Г., Самигуллина А.Р. // Изв. вузов. Физика. – 2021. – Т. 64. – № 3. – С. 136.
2. Ignat'ev Yu.G. and Ignatyev D.Yu. // Grav. and Cosmol. – 2020. – V. 26. – P. 29.

Поступила в редакцию 20.10.2020.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Игнат'ев Юрий Геннадиевич, д.ф.-м.н., профессор, ведущ. науч. сотр. Института физики КФУ, e-mail: ignatev_yu@rambler.ru;

Самигуллина Алсу Ринатовна, ст. преподаватель каф. высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ, e-mail: alsu_sam@rambler.ru.