УДК 517.9 DOI: 10.17223/00213411/64/5/141

В.В. ЛАСУКОВ[1], *Т.В. ЛАСУКОВА*[2], *М.О. АБДРАШИТОВА*[3]

КВАНТОВЫЕ РЕШЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ *

Найдены квантовые решения классического уравнения релятивистской механики. Синтез классической и квантовой физики может стать базовым формализмом для второй квантовой революции, так как существование квантовых решений всех уравнений классической физики означает, что макроскопические тела как неживой, так и живой материи при определенных условиях могут быть квантовыми объектами. Это новое направление физики может найти применение при разработке природоподобных технологий.

Ключевые слова: *экзотический атом, релятивистская механика.*

Введение

В работах [1–3] разработано новое направление, основанное на существовании квантовых решений уравнений нерелятивистской классической физики. На этой основе построены теоретические модели экзотических атомов Ньютона – Гука, Максвелла – Багрова, Навье – Стокса, Колмогорова – Бюргерса, Леметра – Фридмана. В случае классической механики и электродинамики существование квантовых решений классической физики обусловлено нестационарностью потенциала и теоремой Эренфеста. При этом соответствующие решения в общем случае не зависят от постоянной Планка, вместо которой в случае уравнения диффузии автоматически возникает ее диффузионный аналог $\tilde{h} = 2mD >> \hbar$.

Разработанные теоретические основы нового научного направления представляют интерес для широкого круга исследователей и могут найти применение в различных областях науки и техники: квантовой биологии, синтетической биологии, медицине, квантовой теории сознания, биологической электронике, квантовом компьютере, природоподобных технологиях, финансовой математике, геометродинамике [4–34]. Квантовые решения фундаментальных уравнений классической физики обладают всеми атрибутами квантовой механики. Разработанный квантовый подход может быть признан решением проблемы существования и гладкости в трехмерном пространстве решения уравнения Навье – Стокса. Уравнения Максвелла имеют квантовое решение, описывающее нестационарное самоподдерживающееся электрическое поле кулоновского типа без создающего его заряда. Если частотный параметр такого решения отождествить с величиной Хаббла, то такое поле может имитировать заряд элементарной частицы, стабильной в течение жизни Вселенной.

Естественно ожидать, что и классическое уравнение релятивистской механики может иметь квантовые решения. В этой связи найдем квантовые решения классического уравнения релятивистской механики.

Квантовые решения в релятивистской классической механике

Разработанный в работах [1–3] подход можно обобщить на релятивистскую механику. Действительно, одномерное уравнение релятивистской механики имеет такой же вид, как и второй закон Ньютона, только вместо нерелятивистского выражения для импульса используется выражение $p = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \dfrac{v}{c}, v = \dfrac{dX}{dt}$:

$$m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = F .$$

Это уравнение можно представить в эквивалентном интегродифференциальном виде

* Исследование проведено в Томском политехническом университете в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского политехнического университета.

$$m_0 \frac{d^2}{dt^2} \tilde{X}(t) = F , \tag{1}$$

где $\tilde{X}(t) = \int \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} dt$; очевидно, при $\beta << 1$ функция $\tilde{X} \approx X$.

Тогда для силы $F(\tilde{X}, t) = m_0 \omega^2 \left[V(\tau) - \lambda \right] \tilde{X}$ уравнение (1) можно представить в виде безразмерного уравнения на собственные значения

$$\hat{H}_\tau \tilde{X} = \lambda \tilde{X} . \tag{2}$$

Здесь безразмерный оператор $\hat{H}_\tau = \hat{\pi}_\tau^2 + V(\tau)$, $\hat{\pi}_\tau = -i \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \omega t$, $V(\tau)$ – безразмерная функция; λ – безразмерная величина, которая в зависимости от физической задачи может быть связана с поверхностной плотностью σ, объемной плотностью энергии ε, с энтропией s, либо с энергией: $\lambda = \frac{2\sigma}{m\omega^2}$, $\lambda = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $\lambda = \frac{2s}{s_0}$, $\lambda = \frac{2E}{\tilde{\hbar}\omega}$, где $m\omega^2$ – квант поверхностной плотности энергии, ε_0 – квант объемной плотности энергии, $\tilde{\hbar}\omega$ – квант энергии, $\tilde{\hbar} = 2mD$ – диффузионный аналог постоянной Планка, D – коэффициент диффузии, s_0 – квант энтропии, который можно отождествить с постоянной Больцмана, $s_0 = k$.

Уравнение (2) имеет множество квантовых решений, так как для каждой соответствующей функции $V(\tau)$ существует свое квантовое решение уравнения (2). В отличие от уравнения квантовой механики классическое уравнение (2) в общем случае не зависит от постоянной Планка, так что и решение уравнения (2) не зависит от постоянной Планка $\hbar$. Поэтому в данном теоретическом исследовании принцип соответствия квантовой механики не имеет смысла.

Например, для потенциальной функции $V(\tau) = \tau^2$ решение уравнения (2) и условие квантования имеют известный вид

$$\tilde{X}_n(\tau) = x_0 L_n(\tau), \qquad \lambda_n = (2n+1) ,$$

где $L_n(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) H_n(\tau)$, $H_n(\tau)$ – полином Эрмита; x_0 – константа интегрирования, имеющая размерность протяженности в пространстве. Обоснованием существования квантового решения классического уравнения (2) может служить теорема Эренфеста. Действительно, уравнение (2) можно представить в форме уравнения Ньютона $m_0 \frac{d^2 \tilde{X}(t)}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{X}} U(\tilde{X}, t)$, где $U(\tilde{X}, t) = \frac{m_0 \omega^2}{2} \left[\lambda - V(\tau) \right] \tilde{X}^2$. Тогда существование квантового решения уравнения (2) оказывается теоретически обусловленным тем, что в сечении пространственно-временной поверхности потенциальной энергии произвольной плоскостью $t = \text{const}$ потенциал является гармоническим относительно пространственной переменной: $U(\tilde{X}, t = \text{const}) = \text{const} \cdot \tilde{X}^2$. По теореме Эренфеста для гармонического относительно пространственной переменной одномерного осциллятора квантовое уравнение движения Гейзенберга для величины, усредненной по начальному состоянию, тождественно уравнению Ньютона.

Из решения $\tilde{X}_n(\tau) = x_0 L_n(\tau)$ с учетом $\tilde{X}(t) = \int \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} dt$, $v = \frac{dX}{dt}$ нетрудно найти траекторную функцию $\tilde{X}_n(\tau)$ и волновую функцию $\psi_n(\tau)$:

$$X_n(\tau) = x_0 \int \frac{L_n' d\tau}{\sqrt{1 + \beta_0^2 L_n'^2}}, \quad \tilde{\psi}_n(\tau) = N \int \frac{L_n' d\tau}{\sqrt{1 + \beta_0^2 L_n'^2}},$$

где $L'_n = \frac{dL_n}{d\tau}, \beta_0^2 = \frac{v_0^2}{c^2}$, $v_0 = \omega x_0$, v_0 – эффективная скорость. Константа N может быть найдена из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_n^2 dt = 1$. Например, при $\lambda = \frac{2\varepsilon}{\sigma_0}$, $\sigma_0 = m\omega^2$ эффективная скорость $v_0 = x_0\sqrt{\frac{\sigma_0}{m_0}}$. Здесь ε – энергия на единицу площади в плоскости, перпендикулярной направлению движения частицы; σ_0 – квант поверхностной плотности энергии.

Естественно, при $\beta_0 L'_n << 1$ траекторная и волновая функции совпадают с нерелятивистскими выражениями

$$X_n(\tau) = x_0 \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) H_n(\tau), \qquad \psi_n(\tau) = N_n \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) H_n(\tau),$$

где волновую функцию дискретного спектра $\psi_n(\tau)$ можно записать в представлении Фока:

$$\psi_n(\tau) = \frac{\left(\hat{a}^+\right)^n \psi_0(\tau)}{\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left[\left(\tau - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)^n e^{-\frac{\tau^2}{2}}\right],$$

оператор $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)$ переводит состояние с номером n в состояние с номером $n+1$: $\hat{a}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$; $\psi_0 = N_0 e^{-\frac{\tau^2}{2}}$ – волновая функция, характеризующая состояние с минимальной энергией; $N_0 = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt[4]{\pi}}$.

Для необычного ангармонического по временной переменной потенциала $V(\tau) = \left[-\tau^4 + \lambda\tau\right]$ уравнение (1) в безразмерных переменных сводится к уравнению

$$\hat{H}_\tau^{(\lambda)} \tilde{X} = 0, \tag{3}$$

где $\hat{H}_\tau^{(\lambda)} = \hat{\pi}_\tau^2 + W(\tau,\lambda)$, $W(\tau,\lambda) = \tau^4 - \lambda\tau$, $\lambda = -\frac{2E}{E_0}$, E_0 – квант энергии. Для массивных частиц $E_0 = \tilde{h}\omega$, а для безмассовых частиц $E_0 = \hbar\omega$. Делая замену переменной $\xi = \frac{\tau^3}{6}$, из (3) найдем

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{3\xi}\frac{d}{d\xi} - 4 + \frac{2\lambda}{3\xi}\right]\tilde{X}(\tau) = 0\,. \tag{4}$$

Решение уравнения будем искать в виде $\tilde{X}(\tau) = e^{-2\xi} f(\tau)$. Тогда для определения функции $f(\tau)$ получим уравнение

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{2}{3} - z\right)\frac{d}{dz} - \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6}\right] f(z) = 0, \quad z = 4\xi\,. \tag{5}$$

Решение и условие квантования уравнения (5) имеют вид [16]

$$f(z) = L_n^{(\nu)}(4\xi), \qquad E_n = -3E_0\left(n + \frac{1}{3}\right).$$

Здесь $L_n^{(\nu)}(\tau)$ – обобщенный многочлен Лагерра порядка n, $\nu = -\frac{1}{3}$. Таким образом, для функции $\tilde{X}(\tau)$ окончательно имеем

$$\tilde{X}_n(\tau) = N_0 L_n^{(\nu)}\left(\frac{2}{3}\tau\right)e^{-\frac{\tau^3}{3}}. \qquad (6)$$

Аналог решения (6) $\left(E_0 = \hbar H_0, \tilde{h} H_0; H_0 = \sqrt{\dfrac{8\pi G|U_0|}{3}}\right)$ возникает в сверхпространстве-времени в квантовой геометродинамике и описывает первоатом Леметра – Фридмана [16], который является фундаментальной основой атомной модели квантовой теории гравитации и «Большого взрыва». Здесь H_0 – величина Хаббла, $U_0 = \mathrm{const}$ – плотность потенциальной энергии вакуумно-подобного скалярного поля.

Для силы $\boldsymbol{F} = -m\omega^2\left\{\left(V(\tau)-\lambda\right)\tilde{X}\right\}$ уравнение (1) на функцию $\tilde{X} = \tau\Psi(\tau)$ принимает вид $\dfrac{d^2\Psi}{d\tau^2} + \dfrac{2}{\tau}\dfrac{d\Psi}{d\tau} + \left[-\lambda + \dfrac{2\alpha}{\tau} - \dfrac{l(l+1)}{\tau^2}\right]\Psi = 0$. Здесь $V(\tau) = \dfrac{2\alpha}{\tau} - \dfrac{l(l+1)}{\tau^2}$, $\tau = \omega_0 t$. Вводя новую переменную $\xi = 2\tau\sqrt{\lambda}$, получим уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\Psi}{d\xi} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{\xi\sqrt{\lambda}} - \frac{l(l+1)}{\xi^2}\right]\Psi = 0.$$

Тогда решение уравнения (1) имеет известный вид $\tilde{X}_{nl} = z_0 \tau N e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\xi)$, где $L_k^s(\xi)$ – обобщенный многочлен Лагерра порядка k; z_0 – константа интегрирования; $N = \lambda^{\frac{3}{4}}\sqrt{\dfrac{4}{n(n-l-1)!(n+l)!}}$ – нормировочный множитель функции $\tau\Psi_{nl}(\xi)$, который находится из условия $\int_0^\infty \tau^2\Psi_{nl}^2 d\tau = 1$. Условие квантования определяется равенством $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = k + l + 1 = n$, которое при $\alpha = Z\dfrac{e^2}{\hbar c}$, $\lambda = \dfrac{-2E}{\tilde{h}\omega_0}$, $E < 0$ подобно условию квантования энергии частицы в кулоновском потенциале $E_n = -\dfrac{Z^2 e^2}{2\tilde{a}_0 n^2}$, где диффузионный аналог радиуса Бора $\tilde{a}_0 = \gamma a_0$, $\gamma = \dfrac{m_0}{m_*}$, $m_* = \dfrac{\tilde{h}\omega_0}{c^2}$, $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_0 e^2}$ – радиус Бора. При $\tilde{h}\omega_0 > m_0 c^2$ $\left(2D\omega_0 > c^2\right)$ величина $\tilde{a}_0 < a_0$, так что энергия квантов в таком случае больше, чем для обычного кулоновского потенциала.

В классической релятивистской механике возможны и спиновые эффекты. Например, для силы

$$F(\tilde{X}, t) = \left(m\omega^4 t^2 - 2\varepsilon\right)\hat{I}\tilde{X} + 2\mu\hat{S}\tilde{X}$$

уравнение (1) становится матричным:

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \lambda - \tau^2\right]\hat{I}\tilde{X}(\tau) = \lambda_s \hat{S}\tilde{X}(\tau),$$

где $\tilde{X}(\tau) = \begin{pmatrix}\Psi_1(\tau)\\ \Psi_2(\tau)\end{pmatrix}$; $\hat{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица; $\lambda_s = \dfrac{2\mu}{m\omega^2}$ – константа; $\hat{S} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Это матричное уравнение эквивалентно системе двух обычных уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}+\lambda-\tau^2\right]\Psi_1(\tau)=\lambda_s\Psi_1(\tau),$$
$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}+\lambda-\tau^2\right]\Psi_2(\tau)=-\lambda_s\Psi_2(\tau).$$

Функции $\Psi_1(\tau)=\psi(\tau)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\Psi_2(\tau)=\psi(\tau)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ могут описывать два возможных состояния собственного момента: $\hat{\Sigma}\Psi_1(\tau)=\frac{\tilde{h}}{2}\Psi_1(\tau)$, $\hat{\Sigma}\Psi_2(\tau)=-\frac{\tilde{h}}{2}\Psi_2(\tau)$, $\hat{\Sigma}=\frac{\tilde{h}}{2}\hat{S}$. Первое состояние соответствует случаю, когда спин направлен по оси z, второе – случаю, когда спин направлен против оси z. Математическая модель со спином может соответствовать частице в однородном магнитном поле, направленном по оси z $\left(H_x=H_y=0,\ H_z=H_0\right)$. При этом $E_{n,s}=\tilde{\hbar}\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\pm\mu_0 H_0$, константа $\mu=\frac{\mu_0 H_0}{r_0^2}$, где H_0 – напряженность магнитного поля, μ_0 – величина собственного магнитного момента частицы.

Заключение

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что существуют различные квантовые решения классического уравнения релятивистской механики. В случае классической механики и электродинамики существование квантовых решений классического уравнения обусловлено нестационарностью силы соответствующего типа и теоремой Эренфеста. Это означает, что если «потенциальная» функция $V(\tau)$ не зависит от времени, то уравнения классической механики и электродинамики не имеют квантовых решений. В случае уравнения диффузии существование квантовых решений обусловлено стационарным по временной переменной коэффициентом поглощения, зависящим от пространственной переменной.

Квантовые решения в общем случае не зависят от постоянной Планка, которую можно использовать в величине $\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$ для безмассовых частиц. При этом постоянная Планка не играет той принципиальной роли, которую она играет в квантовой физике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ласуков В.В., Абдрашитова М.О. // Изв. вузов. Физика. – 2018. – Т. 61. – № 3. – С. 151–160.
2. Lasukov V.V. // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2016. – V. 13. – P. 1650020.
3. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2019. – Т. 62. – № 5. – С. 40–53.
4. De Witt B.S. // Phys. Rev. – 1967. – V. 160 (D). – P. 1113.
5. De Witt B.S. // Phys. Rev. – 1967. – V. 162 (D). – P. 1195.
6. Альтшулер Б.Л., Барвинский А.О. // УФН. – 1996. – Т. 166. – С. 46.
7. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука, 1990.
8. Hartle J. and Hawking S. // Phys. Rev. – 1983. – V. 28. – P. 2960.
9. Vilenkin A. // Phys. Lett. B. – 1982. – V. 117. – P. 25.
10. Linde A. // Phys. Lett. B. – 1983. – V. 129. – P. 177.
11. Linde A. // Phys. Lett. B. – 1982. – V. 108. – P. 389.
12. Starobinsky A. // Phys. Lett. B. – 1980. – V. 91. – P. 99.
13. Dymnikova I.G. // Phys. Lett. B. – 2000. – V. 472. – P. 33.
14. Misner C.W. and Wheeler J.A. // Ann. Phys. – 1957. – V. 2. – P. 525.
15. Wheeler J.A. // Ann. Phys. – 1957. – V. 2. – P. 604–614.
16. Ласуков В.В. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 10. – С. 51–61.
17. Глинер Э.Б. // УФН. – 2002. – Т. 172. – С. 221.
18. Глинер Э.Б. // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 49. – С. 342.
19. Dymnikova I.G. // Class. Quantum Grav. – 2004. – V. 21. – P. 4417.
20. Dymnikova I.G. // Class. Quantum Grav. – 2015. – V. 32. – P. 165015.
21. Dymnikova I.G. // Class. Quantum Grav. – 2016. – V. 33. – P. 145010.
22. Dymnikova I.G. // Gen. Rel. Grav. – 1992. – V. 24. – P. 235.
23. Dymnikova I.G. // Int. J. Mod. Phys. – 1996. – V. 5. – P. 529.
24. Schwinger J. // Phys. Rev. – 1962. – V. 125. – P. 397.

25. Ginzburg V.L. // Usp. Fis. Nauk. – 2001. – V. 171. – P. 1135.
26. Логунов А.А. Релятивистская теория гравитации. – М.: Наука, 2012.
27. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. – М.: ЛКИ, 2008.
28. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. – М.: КРАСАД, 2010.
29. Рубаков В.А. // ТМФ. – 2006. – Т. 149. – С. 409.
30. Лукаш В.Н., Рубаков В.А. // УФН. – 2008. – Т. 178. – С. 301.
31. Рубаков В.А. // УФН. – 2007. – Т. 177. – С. 407.
32. Рубаков В.А. // УФН. – 2001. – Т. 171. – С. 913.
33. Lasukov V.V. // Symmetry. – 2020. – V. 12. – P. 400.
34. Penrose R. // Phys. Rev. Lett. – 1965. – V. 14. – P. 57.

Поступила в редакцию 13.10.2020.

[1] Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
г. Томск, Россия
[2] Томский государственный педагогический университет, г. Томск, Россия
[3] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
г. Москва, Россия

Ласуков Владимир Васильевич, к.ф.-м.н., доцент ШБИН ОМИ НИ ТПУ, e-mail: lav _9@list.ru;
Ласукова Татьяна Викторовна, д.б.н., профессор ТГПУ, e-mail: tlasukova@mail.ru;
Абдрашитова Мария Овсеевна, к. филол. н., доцент кафедры НИУ ВШЭ, e-mail: mabdrashitova@hse.ru.