ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Управление, вычислительная техника и информатика № 55

УДК 519.95
DOI: 10.17223/19988605/55/10

Ф.Г. Фейзиев, Н.Б. Абаева

УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВХОДНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОДНОГО КЛАССА ДВОИЧНЫХ 4*D*-НЕЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Приводится понятие ортогональной входной последовательности для двоичных 4D-модулярных динамических систем, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. Доказываются необходимые и достаточные условия ортогональности в совокупности входных последовательностей и необходимые и достаточные условия собственной ортогональности каждой входной последовательности. Предлагается методика построения ортогональной входной последовательности на базе коротких вспомогательных ортогональных последовательностей. Приводятся достаточные условия ортогональности вспомогательных последовательностей и формулы их определения.
Ключевые слова: 4D-нелинейные модулярные динамические системы; ортогональные входные последовательности; условия ортогональности.

Модулярные динамические системы (МДС), или последовательностные машины, являются одним из важных классов дискретных динамических систем [1–4]. Они находят широкое применение в различных областях науки и техники [1, 3–8]. Исследованы различные задачи теории и приложений одно- и многопараметрических МДС (*nD*-МДС) [8–15]. К ним относится и задача синтеза МДС. Для нахождения наилучшего решения задачи синтеза МДС используется метод, основанный на применении ортогональных входных последовательностей. Ортогональные входные последовательности строятся с учетом особенности конкретных классов МДС. В работах [3, 4, 16–18] в случаях $n \in \{1, 2, 3\}$ для некоторых нелинейных МДС (*nD*-НМДС) найдены соответствующие условия ортогональности входной последовательности и разработаны алгоритмы их построения. Одним из классов *nD*-НМДС является 4*D*-НМДС [19], который имеет более общую структуру, чем *nD*-НМДС, $n \in \{1, 2, 3\}$. В работе [20] рассмотрен вопрос нахождения наилучшего решения задачи синтеза, и для решения этой задачи отмечена необходимость нахождения условий ортогональности для входных последовательностей 4*D*-НМДС. А в данной работе рассматривается вопрос вывода условий ортогональности входных последовательностей двоичных 4*D*-НМДС.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двоичную 4*D*-НМДС с фиксированной памятью n_0, ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, степенью S, описываемую в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [20]:

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{i=1}^{S} \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} \sum_{(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L_{i,\nu}} \sum_{\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma_{i,\nu}} h_{i,\nu}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\bar{\tau}}] \times$$
$$\times \prod_{(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_{i,\nu}} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} \upsilon_{i,\nu}[n - \tau(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha,\beta,\gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2). \quad (1)$$

Здесь $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, $c_\alpha \in \{..., -1, 0, 1, ...\}, \alpha = \overline{1,3}$; $y[n, c_1, c_2, c_3]$ и $\upsilon_{i,\nu}[n, c_1, c_2, c_3]$ есть соответственно выходная и входная последовательности над полем $GF(2)$ (см.: [1, 5]). Присутствие записи $GF(2)$ в формуле (1) указывает, что эта формула выполняется над полем $GF(2)$, т.е. операции сложения и умножения есть сложение и умножение по mod 2 (это не касается выражений $n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma})$, $c_1+p_1(j_\alpha)$, $c_2+p_2(\sigma_\beta)$ и $c_3+p_3(\rho_\gamma)$);

$$P_\alpha=\{p_\alpha(1),\dots,p_\alpha(r_\alpha)\},\quad -\infty<p_\alpha(1)<\dots<p_\alpha(r_\alpha)<\infty,\quad p_\alpha(j)\in\{\dots,-1,0,1\dots\},\quad j=\overline{1,r_\alpha}\,,\quad \alpha=\overline{1,3}\,;$$

$\lambda_i=|F(i)|$ (через $|F(i)|$ обозначено число элементов множества $F(i)$), где

$$F(i)=\{(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)\,\big|\,\bar m=(m_{1,1,1},\dots,m_{1,1,\ell_3},m_{1,2,1},\dots,m_{1,2,\ell_3},\dots,m_{1,\ell_2,\ell_3},\dots,m_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\ell_1}\sum_{\beta=1}^{\ell_2}\sum_{\gamma=1}^{\ell_3}m_{\alpha,\beta,\gamma}=i;\quad m_{\alpha,\beta,\gamma}\in\{0,\dots,n_0+1\},\ \ \alpha=\overline{1,\ell_1},\ \beta=\overline{1,\ell_2},\gamma=\overline{1,\ell_3};$$

$$(\forall\alpha\in\{1,\dots,\ell_1\})(\exists\beta\in\{1,\dots,\ell_2\})(\exists\gamma\in\{1,\dots,\ell_3\})\Rightarrow(m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq0),$$

$$(\forall\beta\in\{1,\dots,\ell_2\})(\exists\alpha\in\{1,\dots,\ell_1\})(\exists\gamma\in\{1,\dots,\ell_3\})\Rightarrow(m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq0),$$

$$(\forall\gamma\in\{1,\dots,\ell_3\})(\exists\alpha\in\{1,\dots,\ell_1\})(\exists\beta\in\{1,\dots,\ell_2\})\Rightarrow(m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq0);\ \ell_\sigma\in\{1,\dots,r_\sigma\},\sigma=\overline{1,3}\big\};$$

$$L(\ell)=L_1(\ell_1)\times L_2(\ell_2)\times L_3(\ell_3)\,,$$

где

$$L_2(\ell_2)=\{\bar\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_{\ell_2})\,\big|\,1\le\sigma_1<\dots,\sigma_{\ell_2}\le r_2\},\ \ L_3(\ell_3)=\{\bar\rho=(\rho_1,\dots,\rho_{\ell_3})\,\big|\,1\le\rho_1<\dots<\rho_{\ell_3}\le r_3\};$$

$$h_{i,\nu}[\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}]\equiv h_{i,(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu}[\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}]\,,\qquad Q_{i,\nu}\equiv Q_0(i,(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu),\qquad \Gamma_{i,\nu}\equiv\Gamma(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)_\nu\,,$$

$$L_{i,\nu}\equiv L((\ell_1,\ell_2,\ell_3)_\nu)\,,$$

где

$$\Gamma(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)=\underset{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)}{\times}\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})$$

$$\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})=\{\bar\tau_{\alpha,\beta,\gamma}=(\tau(\alpha,\beta,\gamma,1),\dots,\tau(\alpha,\beta,\gamma,m_{\alpha,\beta,\gamma}))\,\big|\,0\le\tau(\alpha,\beta,\gamma,1))<\dots<\tau(\alpha,\beta,\gamma,m_{\alpha,\beta,\gamma})\le n_0\};$$

$$Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\bar m)=\{(\alpha,\beta,\gamma)\,\big|\,m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq0,\alpha=\overline{1,\ell_1},\ \beta=\overline{1,\ell_2},\gamma=\overline{1,\ell_3}\}\,.$$

Пусть $n\in[0,\mathrm N]\equiv\{0,1,\dots\mathrm N\}$, $c_\alpha\in[0,C_\alpha]\equiv\{0,1,\dots,C_\alpha\}$, $\alpha=\overline{1,3}$, и $V_0(i,\nu,\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}_k)$ есть следующая $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)\times1$-мерная матрица:

$$V_0(i,\nu,\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}_k)=$$

$$=\left\{\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}}\ \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}}\upsilon_{i,\nu}[n-\tau^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)]\right\}.\tag{2}$$

В матрице (2) каждому набору $(n,c_1,c_2,c_3)\in[0,N]\times[0,C_1]\times[0,C_2]\times[0,C_3]$ соответствует одна строка. На основе матрицы $V_0(i,\nu,\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}_k)$ строятся матрицы

$$V_1(i,\nu,\bar j,\bar\sigma,\bar\rho)=(V_0(i,\nu,\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}_1)\ \dots\ V_0(i,\nu,\bar j,\bar\sigma,\bar\rho,\bar{\bar\tau}_{|\Gamma_{i,\nu}|}))\,,$$

$$V_2(i,\nu)=(V_1(i,\nu,(\bar j,\bar\sigma,\bar\rho)_1)\ \dots\ V_1(i,\nu,(\bar j,\bar\sigma,\bar\rho)_{|L_{i,\nu}|}))\,,\tag{3}$$

$$V_3(i)=(V_2(i,1)\ \dots\ V_2(i,\lambda_i))\,,\quad V=(V_3(1)\ \dots\ V_3(S))\,.$$

Блочная матрица V как обыкновенная матрица имеет размерность $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)\times R$, где $R=\sum_{i=1}^{S}C^i_{(n_0+1)r_1r_2r_3}$. Пусть

$$\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]:n\in[0,N],\ c_\alpha\in[0,C_\alpha],\alpha=\overline{1,3}\},\quad \nu\in\{1,\dots,\lambda_i\},\quad i\in\{1,\dots,S\}\,,\tag{4}$$

таковы, что матрица V, образованная из них по формулам (2), (3), удовлетворяет условию ортогональности

$$V^{\mathrm T}V=\mathrm{diag}\{d_{1,1},\dots,d_{R,R}\};\quad d_{\alpha,\alpha}>0,\ \alpha=1,\dots,R\,.\tag{5}$$

Тогда последовательности (4) называются ортогональными (в совокупности) входными последовательностьями (ОВП) для 4*D*-НМДС (1).

2. Условия ортогональности для входной последовательности $4D$-НМДС

Обозначим через $R_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $R_2(i,\nu)$, $R_3(i)$, R количество столбцов матрицы $V_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $V_2(i,\nu)$, $V_3(i)$, V соответственно. Ясно, что

$$R_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}) = \left|\Gamma_{i,\nu}\right|, \; R_2(i,\nu) = \left|\Gamma_{i,\nu}\right|\cdot\left|L_{i,\nu}\right|, \; R_3(i) = \sum_{i=1}^{\lambda_i} R_2(i,\nu).$$

Теорема 1. Пусть имеют место формулы (2), (3). Для того чтобы входная последовательность (4) была ортогональной (в совокупности) входной последовательностью для 4*D*-НМДС (1), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,\dots,S\}$, выполнялись соотношения

$$V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}} V_2(i,\nu) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(2,i,\nu),...,d_{R_2(i,\nu),R_2(i,\nu)}(2,i,\nu)\}, \; d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu)>0, \; \gamma=1,...,R_2(i,\nu), \tag{6}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu)$ есть элемент матрицы $V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i,\nu)$, а для всех $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, $\nu'\in\{1,...,\lambda_{i'}\}$, $i'\in\{1,...,S\}$, $(i,\nu)\neq(i',\nu')$ выполнялось соотношение

$$V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}} V_2(i',\nu') = 0_{R_2(i,\nu)\times R_2(i',\nu')}, \tag{7}$$

где в (7) через $0_{R_2(i,\nu)\times R_2(i',\nu')}$ обозначена нулевая матрица с размерностью $R_2(i,\nu)\times R_2(i',\nu')$.

Доказательство. По определению матрицы V имеем:

$$V^{\mathrm{T}}V = \left(V_3^{\mathrm{T}}(\alpha)V_3(\beta)\right), \; \alpha=\overline{1,S}, \; \beta=\overline{1,S}. \tag{8}$$

По (8) для того, чтобы V удовлетворяла условию ортогональности, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha\in\{1,...,S\}$ выполнялись соотношения

$$V_3(\alpha)^{\mathrm{T}} V_3(\alpha) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(3,\alpha),...,d_{R_3(\alpha),R_3(\alpha)}(3,\alpha)\}, \; d_{\gamma,\gamma}(3,\alpha)>0, \; \gamma=1,...,R_3(\alpha), \tag{9}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(3,\alpha)$ есть элемент матрицы $V_3(\alpha)^{\mathrm{T}}V_3(\alpha)$, а для всех $\alpha\in\{1,...,S\}$, $\beta\in\{1,...,S\}$, $\alpha\neq\beta$ выполнялось соотношение

$$V_3(\alpha)^{\mathrm{T}} V_3(\beta) = 0_{R_3(\alpha),R_3(\beta)}. \tag{10}$$

Из формулы $V_3(i) = (V_2(i,1) \;...\; V_2(i,\lambda_i))$ имеем

$$V_3(i)^{\mathrm{T}} V_3(i) = \left(V_2(i,\alpha)^{\mathrm{T}} V_3(i,\beta)\right), \; \alpha=\overline{1,\lambda_i}, \; \beta=\overline{1,\lambda_i}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что для того, чтобы $V_3(\alpha)$ удовлетворяла условию ортогональности (9), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$ выполнялись

$$V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}} V_2(i,\nu) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(2,i,\nu),...,d_{R_2(i,\nu),R_2(i,\nu)}(2,i,\nu)\}, \; d_{\gamma,\gamma}(2,\nu)>0, \; \gamma=1,...,R_2(i,\nu), \tag{12}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu)$ есть элемент матрицы $V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_3(i,\nu)$, а для всех $\alpha\in\{1,...,\lambda_i\}$, $\beta\in\{1,...,\lambda_i\}$, $\alpha\neq\beta$ выполнялось

$$V_2(i,\alpha)^{\mathrm{T}} V_2(i,\beta) = 0_{R_2(i,\alpha),R_2(i,\alpha)}. \tag{13}$$

Таким образом, учитывая соотношения (8)–(13), для удовлетворения матрицей *V* условия ортогональности (5) необходимыми и достаточными условиями являются условия (6), (7). Теорема доказана.

Соотношения (6) есть условие собственной ортогональности каждой последовательности (4), а соотношения (7) – взаимной ортогональности последовательностей (4) и последовательностей

$$\{\upsilon_{i',\nu'}[n,c_1,c_2,c_3] : n\in[0,N], \; c_\alpha\in[0,C_\alpha], \alpha=\overline{1,3}\}, \quad \nu'\in\{1,...,\lambda_{i'}\}, \; i'\in\{1,...,S\}.$$

Теорема 2. Пусть $\nu \in \{1,...,\lambda_i\}$, $i \in \{1,...,S\}$. Для собственной ортогональности последовательностей $\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]: n \in [0,N],\ c_\alpha \in [0,C_\alpha], \alpha = \overline{1,3}\}$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}) \in L_{i,\nu}$ выполнялись соотношения

$$\begin{gathered} V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))^{\mathrm{T}} V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(1),...,d_{R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})),R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))}(1)\}, \\ d_{\alpha,\alpha}(1) > 0,\ \ \alpha = 1,...,R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))\ , \end{gathered} \tag{14}$$

где $d_{\alpha,\alpha}(1)$ есть элемент матрицы $V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))^T \cdot V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))$, а для всех $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}) \in L_{i,\nu}$, $(\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}') \in L_{i,\nu}$, $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}) \neq (\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')$ выполнялось соотношение

$$V_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})^T \cdot V_1(i,\nu,\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}') = 0_{R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))\times V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))}. \tag{15}$$

Доказательство. По формулам (3) можем записать матрицу $V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i,\nu)$ в следующем компактном виде:

$$V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i,\nu) = (V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha)^{\mathrm{T}} V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\beta)),\ \alpha = \overline{1,|L_{i,\nu}|}\ ,\ \beta = \overline{1,|L_{i,\nu}|}\ . \tag{16}$$

По (16) ясно, что в матрице $V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i,\nu)$ на главной диагонали стоят элементы

$$V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha)^T \cdot V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha),\ \ \alpha = \overline{1,|L_{i,\nu}|}\ ,$$

а элементы, стоящие вне главной диагонали, есть элементы

$$V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha)^T \cdot V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\beta),\ \alpha = \overline{1,|L_{i,\nu}|}\ ,\ \beta = \overline{1,|L_{i,\nu}|}\ ,\ \alpha \neq \beta.$$

Поэтому если для каждых $\alpha = \{1,...,|L_{i,\nu}|\}$ в матрице $V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha)^{\mathrm{T}} V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha)$ все диагональные элементы ненулевые, тогда выполняется условие (14), а если для каждых $\alpha \in \{1,...,|L_{i,\nu}|\}$, $\beta \in \{1,...,|L_{i,\nu}|\}$, $\alpha \neq \beta$, матрица $V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\alpha)^{\mathrm{T}} V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_\beta)$ есть нулевая матрица, тогда выполняется условие (15). Таким образом, для удовлетворения соотношения (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (14) и (15). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть: I. а) Для всех $\nu \in \{1,...,\lambda_i\}$, $i \in \{1,...,S\}$ вспомогательная последовательность $\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ является $\{0,1\}$ – последовательностью с периодом $T(i,\nu)+1$, $A_1(i,\nu)+1$, $A_2(i,\nu)+1$ и $A_3(i,\nu)+1$ соответственно по аргументам n, c_1, c_2 и c_3, где $T(i,\nu)+1 < N$, $A_\alpha(i,\nu)+1 < C_\alpha, \alpha = \overline{1,3}$;

б) Для всех $\nu \in \{1,...,\lambda_i\}$, $i \in \{1,...,S\}$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \bar{V}_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}\bar{V}_2(i,\nu) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(2,i,\nu),...,d_{R_2(i,\nu),R_2(i,\nu)}(2,i,\nu)\}, \\ d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu) > 0,\ \ \gamma = 1,...,R_2(i,\nu)\ , \end{gathered} \tag{17}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu)$ есть элемент матрицы $\bar{V}_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}\bar{V}_2(i,\nu)$, а матрица $\bar{V}_2(i,\nu)$ образована из последовательностей $\{\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]:\ n \in [0,T(i,\nu)]\}$, $c_1 \in [0,A_1(i,\nu)]$, $c_2 \in [0,A_2(i,\nu)]$, $c_3 \in [0,A_3(i,\nu)]$ последовательно по формулам:

$$\begin{gathered} \bar{V}_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_k) = \\ = \left\{ \prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} \bar{\upsilon}_{i,\nu}[n-\tau^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)] \right\}. \end{gathered} \tag{18}$$

$$\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}) = (\bar{V}_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_1)\ \ ...\ \ \bar{V}_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}_{|\Gamma_{i,\nu}|}))\ , \tag{19}$$

$$\bar{V}_2(i,\nu) = (\bar{V}_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_1)\ \ ...\ \ \bar{V}_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})_{|L_{i,\nu}|}))\,. \tag{20}$$

II. а) Для всех $\nu \in \{1,...,\lambda_i\}$, $i \in \{1,...,S\}$ и

$$(n,c_1,c_2,c_3) \in [0,T(i,\nu)]\times[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$$

последовательность $\upsilon'_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ определяется по формуле

$$\upsilon'_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]=\begin{cases}\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3], \text{ если } (n,c_1,c_2,c_3)\in F(i,\nu)\times(\underset{\alpha=1}{\overset{3}{\times}} G_\alpha(i,\nu)),\\ 0, \text{ если } (n,c_1,c_2,c_3)\notin F(i,\nu)\times(\underset{\alpha=1}{\overset{3}{\times}} G_\alpha(i,\nu)),\end{cases} \quad (21)$$

где

$$F(i,\nu)=[N_1(i,\nu)-\tau(i,\nu),N_1(i,\nu)-\tau(i,\nu)+T(i,\nu)]\subset[0,T'],$$

$$G_\alpha(i,\nu)=[D_\alpha(i,\nu),D_\alpha(i,\nu)+A_\alpha(i,\nu)]\subset[0,C'_\alpha],\ \alpha=\overline{1,3},$$

$$\tau(i,\nu)=\begin{cases}\max\{m_{1,1,1},...,m_{1,1,\ell_3},m_{1,2,1},...,m_{1,2,\ell_3},...,m_{1,\ell_2,\ell_3},...,m_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}\}-1, \text{ если } N_1(i,\nu)>0,\\ 0, \text{ если } N_1(i,\nu)=0.\end{cases}$$

б) Для всех $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$ натуральные числа $N_1(i,\nu)$, $D_1(i,\nu)$, $D_2(i,\nu)$, $D_3(i,\nu)$ и область $[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]\times[0,C'_3]$ таковы, что для любых $\nu'\in\{1,...,\lambda_{i'}\}$, $i'\in\{1,...,S\}$, $\langle i,\nu\rangle\neq\langle i',\nu'\rangle$, выполняются соотношения $F(i,\nu)\cap F(i',\nu')=\varnothing$ или $G_\alpha(i,\nu)\cap G_\alpha(i',\nu')=\varnothing$, $\alpha=\overline{1,3}$.

III. Для всех $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$ последовательность $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ есть периодическое продолжение последовательности $\upsilon'_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ из области $[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]\times[0,C'_3]$ в остальные части области $[0,N]\times[0,C_1]\times[0,C_2]\times[0,C_3]$ с периодом $T(i,\nu)+1$, $A_1(i,\nu)+1$, $A_2(i,\nu)+1$ и $A_3(i,\nu)+1$ соответственно по аргументам n, c_1, c_2 и c_3. Тогда $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, есть ортогональные входные последовательности для 4*D*-НМДС (1).

С учетом условия (17) и $T(i,\nu)+1<N$, $A_\alpha(i,\nu)+1<C_\alpha$, $\alpha=\overline{1,3}$, для каждых $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$ вспомогательной последовательностью $\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ называются короткие вспомогательные ортогональные последовательности.

Условие I теоремы 3 есть условие независимости ортогональных входных последовательностей, условие II есть условие разделения ортогональных входных последовательностей друг от друга по временной области и пространственной области, а условие III – условие периодичности ортогональной входной последовательности.

Для построения ортогональных входных последовательностей $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, можем использовать методику построения ортогональных входных последовательностей, состоящую из следующих этапов:

1. Построение коротких ортогональных вспомогательных последовательностей $\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, в соответствие с условием I теоремы 3 в отдельности, т.е. независимо от $\bar{\upsilon}_{i',\nu'}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu'\in\{1,...,\lambda_{i'}\}$, $i'\in\{1,...,S\}$, $\langle i,\nu\rangle\neq\langle i',\nu'\rangle$;

2. В соответствии с условием II теоремы 3, разделяя область определения ортогональных последовательностей $\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, по аргументу *n*, или c_1, или c_2, или c_3, или по двум, или трем, или четырем аргументам, по формуле (21) строятся последовательности $\upsilon'_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, в области $[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]\times[0,C'_3]$, где

$$[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]\times[0,C'_3]\subset[0,N]\times[0,C_1]\times[0,C_2]\times[0,C_3];$$

3. В соответствии с условием III теоремы 3 с продолжением последовательностей $\upsilon'_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, из области $[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]\times[0,C'_3]$ с периодом $T'+1$, C'_1+1, C'_2+1 и C'_3+1 соответственно по аргументам *n*, c_1, c_2 и c_3 в остальных частях области $[0,N]\times[0,C_1]\times[0,C_2]\times[0,C_3]$ строятся соответственно ортогональные входные последовательности $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$.

Таким образом для построения ОВП $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, сначала нужно выполнить построение ортогональных последовательностей $\bar{\upsilon}_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$, $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$.

3. Условия ортогональности коротких вспомогательных последовательности

Легко можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть имеет место обозначение (18)–(20). Для того чтобы выполнялось условие ортогональности (17) необходимо и достаточно, чтобы:

а) для каждой четверки (n,c_1,c_2,c_3) в соответствующей ей строке в не более одной из матриц $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$, содержалось бы не более одного ненулевого элемента;

б) для каждых $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$ все столбцы матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$ содержали хотя бы один ненулевой элемент.

Через $\theta(i,\nu)$ обозначим количество ненулевых компонентов вектора

$$\bar{m}_{i,\nu}=(m_{1,1,1},...,m_{1,1,\ell_3},m_{1,2,1},...,m_{1,2,\ell_3},...,m_{1,\ell_2,\ell_3},...,m_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}).$$

Ясно, что $\theta(i,\nu)=\left|Q_{i,\nu}\right|$. Пусть последовательность ненулевых компонентов вектора $\bar{m}_{i,\nu}$ есть следующая последовательность:

$$\begin{gathered}m_{1,\xi_{1,1},\eta(1,\xi_{1,1},1)},...,m_{1,\xi_{1,1},\eta(1,\xi_{1,1},\pi(1,\xi_{1,1}))},...,m_{1,\xi_{1,\phi(1)},\eta(1,\xi_{1,\phi(1)},1)},...,m_{1,\xi_{1,\phi(1)},\eta(1,\xi_{1,\phi(1)},\pi(1,\xi_{1,\phi(1)}))},...\\ ...,m_{2,\xi_{2,1},\eta(2,\xi_{2,1},1)},...,m_{2,\xi_{2,1},\eta(2,\xi_{2,1},\pi(2,\xi_{2,1}))},...,m_{2,\xi_{2,\phi(2)},\eta(2,\xi_{2,\phi(2)},1)},...,m_{2,\xi_{2,\phi(2)},\eta(2,\xi_{2,\phi(2)},\pi(2,\xi_{2,\phi(2)}))},...\\ ...,m_{\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},1)},...,m_{\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\pi(\ell_1,\xi_{\ell_1,1}))},...,m_{\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},1)},...,m_{\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\pi(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)}))}.\end{gathered}\tag{22}$$

Здесь для каждого $\alpha\in\{1,...,\ell_1\}$ считается, что $\phi(\alpha)\le\ell_2$ и $1\le\xi_{\alpha,1}<...<\xi_{\alpha,\phi(\alpha)}\le\ell_2$, а для каждых $\alpha\in\{1,...,\ell_1\}$ и $\beta\in\{\xi_{\alpha,1},....\xi_{\alpha,\phi(\alpha)}\}$ считается, что $\pi(\alpha,\beta)\le\ell_3$ и $1\le\eta(\alpha,\beta,1)<...<\eta(\alpha,\beta,\pi(\alpha,\beta)\le\ell_3$.

Ясно, что $\sum_{\alpha=1}^{\ell_1}\sum_{\beta=1}^{\phi(\alpha)}\eta(\alpha,\beta,\pi(\alpha,\beta))=\theta(i,\nu)$.

Посмотрим следующие множества, построенные на основе первых, вторых и третих индексов элементов последовательности (22):

$$\begin{gathered}\Omega(i,\nu)=\{(1,\xi_{1,1},\eta(1,\xi_{1,1},1)),...,(1,\xi_{1,1},\eta(1,\xi_{1,1},\pi(1,\xi_{1,1}))),...,(1,\xi_{1,\phi(1)},\eta(1,\xi_{1,\phi(1)},1)),...\\ ...,(1,\xi_{1,\phi(1)},\eta(1,\xi_{1,\phi(1)},\pi(1,\xi_{1,\phi(1)}))),(2,\xi_{2,1},\eta(2,\xi_{2,1},1)),...,(2,\xi_{2,1},\eta(2,\xi_{2,1},\pi(2,\xi_{2,1}))),...\\ ...,(2,\xi_{2,\phi(2)},\eta(2,\xi_{2,\phi(2)},1)),...,(2,\xi_{2,\phi(2)},\eta(2,\xi_{2,\phi(2)},\pi(2,\xi_{2,\phi(2)}))),...\\ ...,(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},1)),...,(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\pi(\ell_1,\xi_{\ell_1,1}))),...\\ ...,(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},1)),...,(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\pi(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)})))\},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Omega_1(i,\nu)=\{(j_1,\sigma_{\xi_{1,1}},\rho_{\eta(1,\xi_{1,1},1)}),...,(j_1,\sigma_{\xi_{1,1}},\rho_{\eta(1,\xi_{1,1},\pi(1,\xi_{1,1}))}),...,(j_1,\sigma_{\xi_{1,\phi(1)}},\rho_{\eta(1,\xi_{1,\phi(1)},1)}),...\\ ...,(j_1,\sigma_{\xi_{1,\phi(1)}},\rho_{\eta(1,\xi_{1,\phi(1)},\pi(1,\xi_{1,\phi(1)}))}),(j_2,\sigma_{\xi_{2,1}},\rho_{\eta(2,\xi_{2,1},1)}),...,(j_2,\sigma_{\xi_{2,1}},\rho_{\eta(2,\xi_{2,1},\pi(2,\xi_{2,1}))}),...\\ ...,(j_2,\sigma_{\xi_{2,\phi(2)}},\rho_{\eta(2,\xi_{2,1},1)}),...,(j_2,\sigma_{\xi_{2,\phi(2)}},\rho_{\eta(2,\xi_{2,\phi(2)},\pi(2,\xi_{2,\phi(2)}))}),...,(j_{\ell_1},\sigma_{\xi_{\ell_1,1}},\rho_{\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},1)}),...\\ ...,(j_{\ell_1},\sigma_{\xi_{\ell_1,1}},\rho_{\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,1},\pi(\ell_1,\xi_{\ell_1,1}))}),...,(j_{\ell_1},\sigma_{\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)}},\rho_{\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},1)}),...,(j_{\ell_1},\sigma_{\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)}},\rho_{\eta(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)},\pi(\ell_1,\xi_{\ell_1,\phi(\ell_1)}))})\}.\end{gathered}$$

Пусть для фиксированных (i,ν) удовлетворяются:

1. $A_1(i,\nu),A_2(i,\nu)$ и $A_3(i,\nu)$ есть какие-либо натуральные числа и множества E, $M_1,...,M_{\theta(i,\nu)}$ образованы из элементов множества $[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$. Числа $A_1(i,\nu)$, $A_2(i,\nu)$ и $A_3(i,\nu)$ и эти множества таковы, что:

а) если какая-нибудь тройка (c_1,c_2,c_3), где $c_\alpha \in [0, A_\alpha(i,\nu)]$, $\alpha=\overline{1,3}$, входит в одно из множеств E, $M_1,...,M_{\theta(i,\nu)}$, тогда в то же множество входят любые элементы из множества

$$\{(c_1+k_1\cdot(A_1(i,\nu)+1), c_2+k_2\cdot(A_2(i,\nu)+1), c_3+k_3\cdot(A_3(i,\nu)+1)) \big| k_1=1,...,(A_2(i,\nu)+1)(A_3(i,\nu)+1),$$
$$k_2=1,...,(A_1(i,\nu)+1)(A_3(i,\nu)+1),\ k_3=1,...,(A_1(i,\nu)+1)(A_2(i,\nu)+1)\};$$

б) для любой тройки $(c_1,c_2,c_3)\in[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$ справедливо неравенство $\Lambda(i,\nu)\ \le \theta(i,\nu)$, где $\Lambda(i,\nu)\ = \left|(\{c_1+P_1\}\times\{c_2+P_2\}\times\{c_3+P_3\})\bigcap(\bigcup\limits_{\gamma=1}^{\theta(i,\nu)} M_\gamma)\right|$;

в) если для какой-либо тройки $(c_1,c_2,c_3)\in[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$ имеет место $\Lambda(i,\nu)\ =\theta(i,\nu)$, то найдется такая тройка $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$, при которой для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega(i,\nu)$ тройка $(c_1+p_1(j_\alpha), c_2+p_2(\sigma_\beta), c_3+p_3(\rho_\gamma))$ входит во множество M_μ, где

$$\mu=\sum_{\alpha_1=1}^{\alpha-1}\sum_{\beta_1=1}^{\phi(\alpha_1)}\eta(\alpha_1,\beta_1,\pi(\alpha_1,\beta))+\sum_{\beta_1=1}^{\beta-1}\eta(\alpha,\beta_1,\pi(\alpha,\beta))+\gamma,$$

а для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in(\{1,...,r_1\})\times\{1,...,r_2\}\times\{1,...,r_3\})\setminus\Omega_1(i,\nu)$ тройка $(c_1+p_1(\alpha), c_2+p_2(\beta), c_3+p_3(\gamma))$ входит в множество E;

г) для любых $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$ найдется такая тройка $(c_1,c_2,c_3)\in[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$, при которой для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega(i,\nu)$ тройка $(c_1+p_1(j_\alpha), c_2+p_2(\sigma_\beta), c_3+p_3(\rho_\gamma))$ входит во множество M_μ, где $\mu=\sum\limits_{\alpha_1=1}^{\alpha-1}\sum\limits_{\beta_1=1}^{\phi(\alpha_1)}\eta(\alpha_1,\beta_1,\pi(\alpha_1,\beta))+\sum\limits_{\beta_1=1}^{\beta-1}\eta(\alpha,\beta_1,\pi(\alpha,\beta))+\gamma$, а для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in(\{1,...,r_1\})\times$ $\times\{1,...,r_2\}\times\{1,...,r_3\})\setminus\Omega_1(i,\nu)$ тройка $(c_1+p_1(\alpha), c_2+p_2(\beta), c_3+p_3(\gamma))$ входит во множество E.

2. Для каждой $\mu\in\{1,...,\theta(i,\nu)\}$ двухзначная функция $z_\mu[n]$ есть функция с периодом $J_\mu+1$ и при $\sigma>J_\mu$ матрица

$$B_\mu(\sigma)=\left(\prod_{r=1}^{b_\mu} z_\mu[n-\chi_q(r)]\right), n=\overline{0,\sigma},\quad q=\overline{1,|\Lambda|}$$

удовлетворяет условиям ортогональности, где $(\chi_q(1),...,\chi_q(b_\mu))$ есть q-й элемент множества $\Lambda=\{(\chi_q(1),...,\chi_q(b_\mu))\}\big|0\le\chi_q(1)<...<\chi_q(b_\mu)\le n_0\}$ и $b_\mu=m_{\alpha,\xi_{\alpha,\beta},\eta(\xi_{\alpha,\beta},\gamma)}$, а между величинами μ, α, β и γ существует соотношение $\mu=\sum\limits_{\alpha_1=1}^{\alpha-1}\sum\limits_{\beta_1=1}^{\phi(\alpha_1)}\eta(\alpha_1,\beta_1,\pi(\alpha_1,\beta))+\sum\limits_{\beta_1=1}^{\beta-1}\eta(\alpha,\beta_1,\pi(\alpha,\beta))+\gamma$.

3. Для каждой $(n,c_1,c_2,c_3)\in[0,J(i,\nu)]\times[0,A_1(i,\nu]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$ последовательность $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$ определяется по формуле

$$\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]=\begin{cases}0, \text{ если } (c_1,c_2,c_3)\in E, \\ z_1[n], \text{ если } (c_1,c_2,c_3)\in M_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{\theta(i,\nu)}[n], \text{ если } (c_1,c_2,c_3)\in M_{\theta(i,\nu)},\end{cases}$$

где

$$J(i,\nu)=\left(\prod_{\mu=1}^{\theta(i,\nu)}(J_\mu+1)\right)-1.$$

Теорема 5. Пусть для фиксированных (i,ν) удовлетворяются условия (1)–(4) и $[0,J(i,\nu)]\times[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$ есть область определения последовательностей (функций) $\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]$. Если элементы множества $\{J_\mu+1 \mid \mu=1,...,\theta(i,\nu)\}$ взаимно простые числа, тогда матрица $\bar{V}_2(i,\nu)$, определяемая по (18)–(20), удовлетворяет условиям ортогональности (17).

Доказательство. Рассмотрим произвольное $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$. Согласно п. «г» из условия 1 существует такая тройка $(c_1,c_2,c_3)\in[0,A_1(i,\nu)]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$, при котором для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Omega(i,\nu)$ тройка $(c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma))$ входит во множество M_μ, где

$$\mu=\sum_{\alpha_1=1}^{\alpha-1}\sum_{\beta_1=1}^{\phi(\alpha_1)}\eta(\alpha_1,\beta_1,\pi(\alpha_1,\beta))+\sum_{\beta_1=1}^{\beta-1}\eta(\alpha,\beta_1,\pi(\alpha,\beta))+\gamma\,,$$

и для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in(\{1,...,r_1\})\times\{1,...,r_2\}\times\{1,...,r_3\})\setminus\Omega_1(i,\nu)$ тройка $(c_1+p_1(\alpha),c_2+p_2(\beta),c_3+p_3(\gamma))$ входит в множество E. Поскольку элементы множества $\{J_\mu+1 \mid \mu=1,...,\theta(i,\nu)\}$ – взаимно простые числа, то по лемме 3.6 [3. С. 59–60] матрица, образованная из строк $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, соответствующих набору (n,c_1,c_2,c_3), $n\in[0,\Pi(i,\nu)]$, ортогональна. Таким образом, все столбцы матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$ содержат не менее чем один ненулевой элемент.

Докажем, что любая строка матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$ содержит не более чем один ненулевой элемент. Для этого рассмотрим произвольные $(c_1,c_2,c_3)\in[0,A_1(i,\nu]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$. По п. «а» условия 1 возможно два случая:

1. $\Lambda(i,\nu)\le\theta(i,\nu)$. В этом случае для каждого $n\in[0,\Pi(i,\nu)]$ строка, соответствующая набору (n,c_1,c_2,c_3), содержит только нулевые элементы.

2. $\Lambda(i,\nu)=\theta(i,\nu)$. В этом случае, поскольку элементы множества $\{J_\mu+1 \mid \mu=1,...,\theta(i,\nu)\}$ взаимно простые числа, матрица, образованная из строк матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, соответствующих набору (n,c_1,c_2,c_3), $n\in[0,J(i,\nu)]$, ортогональна по лемме 3.6 [Там же]. Таким образом, любая строка матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$ содержит не более чем один ненулевой элемент.

Теперь докажем, что если строка, соответствующая какому-либо произвольному набору (n,c_1,c_2,c_3), в матрице $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$ содержит ненулевой элемент, то строка, соответствующая набору (n,c_1,c_2,c_3), в любой матрице из множества

$$\{\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}') \mid (\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')\in L_{i,\nu},\quad (\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')\ne(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\}$$

содержит только нулевые элементы. Предположим противное. Пусть существует такой набор $(n',c_1',c_2',c_3')\in[0,J(i,\nu)]\times[0,A_1(i,\nu]\times[0,A_2(i,\nu)]\times[0,A_3(i,\nu)]$ и тройки $(\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')$ и $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, для которых строки, соответствующие тройке (n',c_1',c_2',c_3') матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$ и матрицы $\bar{V}_1(i,\nu,\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')$, содержат ненулевые элементы, где $(\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')\ne(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$. Не умаляя общности, предположим, что $\bar{j}=\bar{j}'$, $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}'$, а $\bar{\rho}\ne\bar{\rho}'$. По определению $\bar{\rho}=(\rho_1,...,\rho_{\ell_3})$, $\bar{\rho}'=(\rho_1',...,\rho_{\ell_3}')$. Не умаляя общности, предположим, что существует такое $f\in\{1,...,\ell_3\}$, при котором $\rho_f\ne\rho_f'$ и $\rho_g=\rho_g'$, $g\ne f$.

Рассмотрим следующие множества с $\theta(i,\nu)$ элементом

$$\Sigma=\{(c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)) \mid (\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}\}\,,$$

$$\Sigma'=\{(c_1+p_1(j_\alpha'),c_2+p_2(\sigma_\beta'),c_3+p_3(\rho_\gamma')) \mid (\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}\}\,.$$

Все клетки (элементы) множества Σ и Σ' по одному входят в соответствующих множества во $M_1,...,M_{\theta(i,\nu)}$. Однако, кроме элементов $(c_1+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_f))$, $\alpha=\overline{1,\ell_1}$, $\beta=\overline{1,\ell_2}$, все остальные элементы множества Σ входят и в множество Σ'. А кроме элементов

$(c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho'_f))$, $\alpha = \overline{1, \ell_1}$, $\beta = \overline{1, \ell_2}$, все остальные элементы множества Σ' входят и в множество Σ. Поэтому количество клеток, входящих в множества $M_1, ..., M_{\theta(i,\nu)}$, больше, чем число $\theta(i,\nu)$. Отсюда вытекает, что $\Lambda(i,\nu) > \theta(i,\nu)$. А это противоречит п. «б» условия 2. Таким образом, полностью удовлетворяются условия теоремы 4. Поэтому матрица $\bar{V}_2(i,\nu)$, определяемая по (18)–(20), удовлетворяет условиям ортогональности (17). Теорема доказана.

Заключение

В работе для двоичных 4*D*-модулярных динамических систем, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры, приведено понятие ортогональной входной последовательности. Доказана теорема о необходимом и достаточном условиях ортогональности в совокупности входных последовательностей двоичных 4*D*-НМДС (1). Доказана теорема о необходимом и достаточном условиях собственной ортогональности каждой входной последовательности двоичных 4*D*-НМДС (1). Предложена методика построения ортогональной входной последовательности на базе коротких вспомогательных ортогональных последовательностей. Приведены достаточные условия ортогональности коротких вспомогательных последовательностей и формулы их определения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М. : Сов. радио, 1975. 248 с.
2. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
3. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку : Элм, 1996. 180 с.
4. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку : Элм, 2006. 234 с.
5. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки : пер. с англ.. М. : Мир, 1986. 576 с.
6. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления. Липецк : Липецкий эколого-гуманитар. ин-т, 2005. 124 с.
7. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd 71. P. 31–43.
8. Скобелев В.В. Автоматы на алгебраических структурах (обзор) // Известия Саратовского университета. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 58–66.
9. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Гусейнов И.Н. Критерии диагностируемости билинейных последовательностных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 361, № 5. С. 606–607.
10. Сперанский Д.В. Эксперименты с нечеткими автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 107–124.
11. Сперанский Д.В. Эксперименты с нестационарными билинейными автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 161–174.
12. Сперанский Д.В. Тестирование нечетких линейных автоматов // Известия Саратовского университета. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 233–240.
13. Haci Y. Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. V. 8, № 2. P. 263–269.
14. Haci Y., Özen K. Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, № 3. P. 625–633.
15. Haci Y., Candan M., Or A. On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. V. 6, № 1. P. 57–63.
16. Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С. Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. С. 37–47.
17. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. К задаче квадратичной оптимизации для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 104–119.
18. Ф.Г.Фейзиев, З.А.Самедова. Условия ортогональности для входных последовательностей двоичных 3*D*-нелинейных модулярных динамических систем // Известия НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. Информатика и проблемы управления. 2010. Т. 30, № 3. С. 115–124.
19. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции одного класса двоичных 4*D*-модулярных динамических систем // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (45). С. 46–54.

20. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Задача оптимального синтеза двоичных 4*D*-нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 53. С. 102–109.

Поступила в редакцию 23 декабря 2020 г.

Feyziyev F.G., Abayeva N.B. (2021) THE CONDITIONS OF ORTHOGONALITY OF THE INPUT SEQUENCES OF ONE CLASS OF BINARY 4*D*-NONLINEAR MODULAR DYNAMIC SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 55. pp. 80–90

DOI: 10.17223/19988605/55/10

Binary 4*D*-nonlinear modular dynamic system (4*D*-NMDS) with fixed memory n_0, limited connection $P_1 \times P_2 \times P_3$, with the degree *S*, described by two-valued analogue of Volterra's polynomial, is considered

$$y[n,c_1,c_2,c_3] = \sum_{i=1}^{S} \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} \sum_{(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}} \sum_{\bar{\bar{\tau}}\in\Gamma_{i,\nu}} h_{i,\nu}[\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}}]\times$$

$$\times \prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_{i,\nu}} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} \upsilon_{i,\nu}[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2). \quad (1)$$

Here $n \in [0,\mathrm{N}] \equiv \{0,1,...\mathrm{N}\}$, $c_\alpha \in [0,C_\alpha] \equiv \{0,1,...,C_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1,3}$; $P_\alpha = \{p_\alpha(1),..., p_\alpha(r_\alpha)\}$, $-\infty < p_\alpha(1) < ... < p_\alpha(r_\alpha) < \infty$, $p_\alpha(j) \in \{...,-1,0,1...\}$, $j = 1,...,r_\alpha$, $\alpha = \overline{1,3}$. On the base of binary input sequences

$$\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]: n\in[0,N], c_1\in[0,C_1], c_2\in[0,C_2], c_3\in[0,C_3]\},\quad \nu=1,...,\lambda_i,\quad i=1,...,S, \quad (2)$$

the matrices $V_0(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho},\bar{\bar{\tau}})$, $V_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $V_2(i,\nu)$, $V_3(i)$, *V* are constructed sequentially. Let a number of columns of this matrices be $R_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})$, $R_2(i,\nu)$, $R_3(i)$, *R* respectively. All these matrices have $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1)$ rows. Here $R = \sum_{i=1}^{S} C^{i}_{(n_0+1)r_1r_2r_3}$.

If sequences (2) are such, that satisfied the conditions $V^{\mathrm{T}}V = \mathrm{diag}\{d_{1,1},...,d_{R,R}\}$, $d_{\alpha,\alpha} > 0$, $\alpha = 1,...,R$, then sequences (2) are called the orthogonal input sequences for 4*D*-NMDS (1).

In order for the input sequence (2) to be an orthogonal input sequence for the 4*D*-LMDS (1), it is necessary and sufficient that for all $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$ the relations hold

$$V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i,\nu) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(2,i,\nu),...,d_{R_2(i,\nu),R_2(i,\nu)}(2,i,\nu)\},\ d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu) > 0,\ \gamma = 1,...,R_2(i,\nu), \quad (3)$$

where $d_{\gamma,\gamma}(2,i,\nu)$ are elements of matrix $V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i,\nu)$, and for all $\nu\in\{1,...,\lambda_i\}$, $i\in\{1,...,S\}$, $\nu'\in\{1,...,\lambda_{i'}\}$, $i'\in\{1,...,S\}$, $(i,\nu)\neq(i',\nu')$ the ratio $V_2(i,\nu)^{\mathrm{T}}V_2(i',\nu') = 0_{R_2(i,\nu)\times R_2(i',\nu')}$ was satisfied.

For own orthogonality of sequences $\{\upsilon_{i,\nu}[n,c_1,c_2,c_3]: n\in[0,N]\}$, $c_\alpha\in[0,C_\alpha]$, $\alpha=\overline{1,3}$, it is necessary and sufficient that for all $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$ the ratio

$$V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))^{\mathrm{T}}V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})) = \mathrm{diag}\{d_{1,1}(1),...,d_{R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})),R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))}(1)\},$$

$$d_{\alpha,\alpha}(1) > 0,\quad \alpha = 1,...,R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})),$$

hold, and for all $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\in L_{i,\nu}$, $(\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')\in L_{i,\nu}$, $(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})\neq(\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}')$ the ratio

$$V_1(i,\nu,\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho})^{\mathrm{T}}\cdot V_1(i,\nu,\bar{j}',\bar{\sigma}',\bar{\rho}') = 0_{R_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))\times V_1(i,\nu,(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}))}$$

was satisfied. The sufficient conditions for orthogonality of the input sequence for 4*D*-NMDS (1) are given. The technique to construct an orthogonal input sequences based on auxiliary orthogonal sequences is proposed. The sufficient conditions for orthogonality of short auxiliary sequences and formulas for their definition are given.

Keywords: 4*D*-nonlinear modular dynamic system; orthogonal input sequences; conditions of orthogonality..

FEYZIYEV Fikrat Gulali (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan).
E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

ABAYEVA Nigar Bahram (Dissertant of Ph.D in Mathematics , Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan).
E-mail: abayeveldar404@gmail.com

REFERENCES

1. Faradzhev, R.G. (1975) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Sovetskoe radio.
2. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1982) Lineynye kletochnye mashiny: podkhod prostranstva sostoyaniy (obzor) [Linear cellular machine: The approach of the state space (review)]. *Avtomatika i telemechanika–Automation and Remote Control*. 2. pp. 125–163.
3. Faradzhev, R.G. & Feyziev, F.G. (1996) *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadratichnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledovatel'nostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines]. Baku: Elm.
4. Feyziev, F.G. & Faradzheva, M.R. (2006) *Modulyarnye posledovatel'nostnye mashiny: osnovnye rezul'taty po teorii i prilozhe-niyu* [Modular sequential machine: The main results of the theory and application]. Baku: Elm.
5. Blahut, R. (1986) *Teoriya i praktika kodov, kontroliruyushchikh oshibki* [Theory and Practice of Error Control Codes]. Translated from English. Moscow: Mir.
6. Blyumin, S.L. & Korneev, A.M. (2005) *Diskretnoe modelirovanie sistem avtomatizatsii i upravleniya* [Discrete modeling automation and control systems]. Lipetsk: Lipetsk Ecological and Humanitarian Institute.
7. Nagiev, A.T. & Feyziyev, F.G. (2001) The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters. *Seminarberichte, Fachbereich Mathematic*. 71. pp. 31–43.
8. Skobelev, V.V. (2013) Automata on algebraic structures. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriyaya. Seriya Matematica. Mechanica. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 13(2-2). pp. 58–66. DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-58-66
9. Faradzhev, R.G., Nagiev, A.T. & Guseynov, I.N. (1998) Kriterii diagnostiruemosti bilineynykh posledovatel'nostnykh mashin [The criteria of diagnosability for bilinear sequential machines]. *Doklady RAN*. 361(5). pp. 606–607.
10. Speranskiy, D.V. (2015) Eksperimenty s nechetkimi avtomatami [Eksperiments with fuzzy finite state machines]. *Avtomatika i telemechanika–Automation and Remote Control*. 2. pp. 107–124.
11. Speranskii, D.V. (2015) Eksperimenty s nestatsionarnymi bilineynymi avtomatami [Eksperiments with nonstationary bilinear finite state machines]. *Avtomatika i telemechanika–Automation and Remote Control*. 9. pp. 161–174.
12. Speranskii, D.V. (2019) Fuzzy linear automata testing. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriyaya. Seriya Matematica. Mechanica. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 19(2). pp. 233–240. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-2-233-240
13. Haci, Y. (2009) Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system. *Applied and Computational Mathematics*. 8(2). pp. 263–269.
14. Haci, H. & Özen, K. (2009) Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multiparametric binary dynamical system. *Control and Cybernetics.* 38(3). pp. 625–633.
15. Haci, Y., Candan, M. & Or, A. (2016) On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System. *International Journal in Foundations of Computer Science and Technology*. 6(1). pp. 57–63. DOI: 10.5121/ijfcst.2016.6105. 57
16. Baybatshaev, M.Sh. & Popkov, Yu.S. (1978) Ob odnoy zadache kvadratichnoy optimizatsii dvoichnykh nelineynykh posledovatel'nostnykh mashin [On one quadratic optimization problem for binary nonlinear sequential machines]. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 12. pp. 37–47.
17. Faradzhev, R.G. & Feyziyev, F.G. (1996) K zadache kvadratichnoy optimizatsii dlya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledova-tel'nostno-kletochnykh mashin [To the quadratic optimization problem for binary many-dimensional nonlinear sequential cellular machines]. *Avtomatika i telemechanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 104–119.
18. Feyziyev, F.G. & Samedova, Z.A. (2010) Usloviya ortogonal'nosti dlya vkhodnykh posledovatel'nostey dvoichnykh 3D-nelineynykh modulyarnykh dinamicheskikh sistem [The conditions of orthogonality for input sequences for the binary 3D-nonlinear modular dynamical system]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. fiz.-tekhn. i mat. nauk. Informatika i problemy upravleniya.* 30(3). pp. 115–124.
19. Feyziyev, F.G. & Abaeva, N.B. (2019) The polynomial ratio for description of full reaction of one classes binary 4D-multidimensional modular dynamic systems. *Vestnik Permskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2(45). pp. 46–54. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-46-54
20. Feyziyev, F.G. & Abayeva, N.B. (2020) The problem of optimal synthesis of binary 4D- nonlinear modular dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 53. pp. 102–109. DOI: 10.17223/19988605/53/10