

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/70/12

А.А. Черняев

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММНЫХ ПЛАСТИН В ЗАДАЧЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Рассмотрена задача свободных колебаний параллелограммных пластин, для решения которой исследована возможность использования приема геометрического моделирования формы пластин с помощью конформных радиусов. Показано, что изучение свободных колебаний параллелограммных пластин при изменении их геометрических параметров можно производить с использованием конформных радиусов, возникающих при конформном отображении области, ограниченной контуром пластины, на единичный круг. Рассмотрено использование данного приема для решения различных практических инженерных задач.

Ключевые слова: *геометрическое моделирование, параллелограммная пластина, свободные колебания, конформные радиусы.*

Параллелограммные пластины часто встречаются в качестве отдельных элементов конструкций, испытывающих различные виды нагрузок. Например колебания, возбужденные различными факторами, в частности свободные колебания от собственной массы. Так, в конструкциях обшивки крыла самолета, отличного от прямоугольного (треугольного, трапециевидного), неизбежно встречаются косугольные пластины (параллелограммные, трапециевидные, треугольные), испытывающие во время эксплуатации, наряду со всеми элементами, динамические нагрузки, возбуждающие колебания этих элементов. Важной задачей при проектировании крыла является изучение колебаний как конструкции крыла в целом, так и отдельных его элементов, для недопущения таких опасных явлений, как резонанс или флаттер.

Трудность изучения колебаний параллелограммных пластин обусловлена тем, что геометрическая фигура в форме параллелограмма является сложной. Под формой фигуры подразумеваем совокупность инвариантов этой фигуры относительно группы подобий. Под сложной фигурой согласно [1] будем понимать фигуру, форма которой задается двумя и более независимыми геометрическими параметрами. Для параллелограмма это, например, острый угол при основании и отношение основания к высоте (два независимых параметра). А простой – фигуру, форма которой задается лишь одним геометрическим параметром. Это, например, прямоугольник, форму которого можно задать только соотношением сторон или ромб, форму которого можно задать одним внутренним углом между сторонами, или правильный многоугольник, форму которого можно задать количеством сторон и т.д.

Само по себе решение прямой задачи по определению частот и (или) форм колебаний параллелограммной пластины с заданными геометрическими параметрами и граничными условиями, в том числе сложными, в настоящее время не представляет большой сложности. Для ее решения можно воспользоваться различными

ми как аналитическими [2] так и численными методами [3]. Однако, как известно [3], использование численных методов лишает задачу физического смысла и возможности качественной оценки результатов, а для их количественной оценки, например, при изменении геометрической формы пластины, и вовсе требуется выполнять полностью перерасчет задачи. Решения, получаемые отдельными аналитическими методами применительно к пластинам сложной формы, могут быть значительно трудоемкими, а получаемые результаты – сильно громоздкими и неудобными для качественной оценки задачи.

Геометрические методы лишены недостатков численных методов и значительно проще известных аналитических методов. Здесь под геометрическими методами понимается решения задач по определению различных физических и механических параметров, например частот колебаний, а также параметров напряженно-деформированного состояния, основанных на анализе только геометрической формы и использовании некоторых известных решений. Термин «геометрический метод» в широком использовании введен В.И. Коробко и А.В. Коробко при решении различных двумерных задач механики твердого тела, строительной механики, теории упругости, пластин и оболочек [4 – 6]. Кратко с геометрическими методами можно ознакомиться в обзорной статье [7]. Более подробно можно ознакомиться в указанных выше работах. Разработанные методы и приемы В.И. Коробко и А.В. Коробко, в широком смысле называемые «геометрическими», появились на основе развития известных изопериметрических неравенств и изопериметрических теорем [8], в которых геометрическую форму плоской области (пластины, мембраны, сечения) предложено характеризовать с помощью изопериметрического частного

$$\frac{4\pi A}{L^2}, \quad (1)$$

где A – площадь фигуры; L – ее периметр.

В этой же работе [8] при исследовании отдельных задач математической физики и теории упругости в качестве параметров были выбраны внутренний и внешний конформные радиусы плоской области (пластины), возникающие при конформном отображении внутренности и внешности области на единичный круг [9]. Причем конформные радиусы использовались как два независимых параметра, что повлекло существенные ограничения такого подхода. Первое ограничение – это невозможность изучать изменение исследуемых параметров при переходе одной фигуры в другую. Так, невозможно будет выяснить, как будет меняться какой-то параметр, например частота колебаний косоугольной пластины, когда при геометрическом преобразовании сдвига вершин ее форма будет меняться от треугольника до четырехугольника и квадрата, так как формулы по определению конформных радиусов различны для различных фигур. Второе ограничение следует из первого и заключается в том, что нельзя будет сравнить изучаемые параметры, скажем, для треугольной пластины и прямоугольной, так как это фигуры различных классов форм. Третий недостаток – это необходимость учитывать геометрические размеры (масштаб) пластины, так как конформные радиусы – размерные величины.

Для преодоления этих недостатков и развития геометрических методов в предыдущих работах [10 – 14] и др. в качестве параметра, определяющего форму плоской области (пластины, мембраны, поперечного сечения стержня), было предложено использовать отношение внутреннего и внешнего конформных радиусов,

представляющее собой уже безразмерную величину, тем самым снимая указанные выше недостатки. Такой подход позволяет установить ряд изопериметрических свойств и закономерностей этого отношения, заменить решения математически сложных задач решениями простых геометрических задач. Также в [10] было установлено, что такая геометрическая характеристика формы имеет ряд преимуществ по сравнению с другими характеристика геометрической формы и является более перспективной к ее развитию.

Целью данной работы является изучение предлагаемого приема геометрического моделирования формы пластин с помощью отношения конформных радиусов в решении ряда задач свободных колебаний параллелограммных пластин.

Конформные радиусы и их отношение

Внутренний радиус плоской области относительно точки $a - r_a$, точка a берется внутри области. Отображаем конформно внутреннюю часть области на внутреннюю часть круга так, чтобы точке a соответствовал центр круга, а линейное растяжение в точке a равнялось единице. Радиус полученного таким образом круга будет равен r_a . Величина r_a изменяется в зависимости от точки a . При определенном положении точки a внутренний радиус достигает своего максимального значения, который обозначается $\dot{r}$.

Внешний радиус плоской области – $\bar{r}$. Отображаем конформно внешнюю область на внешнюю область круга так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу, а линейное растяжение на бесконечности равнялось единице. Радиус полученного таким образом круга будет равен $\bar{r}$ [8, 15].

В научной литературе [8, 16] приводятся формулы по определению конформных радиусов для ряда односвязных областей. Приведем формулы для областей, которые будем использовать в работе:

- для ромбов с углом α

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L; \quad (2)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, L – периметр;

- для прямоугольников со сторонами a и b ($a \geq b$)

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \quad \begin{cases} \frac{a}{\dot{r}} = \pi \cos^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)!k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \frac{b}{\bar{r}} = \pi \sin^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)!k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \quad (3)$$

где $q = e^{-\pi a/b}$; α – аргумент одного из прообразов вершин, расположенных симметрично; $(-1)!! = 1$.

В табл. 1 и 2 приводятся значения конформных радиусов и их отношения, полученные по формулам (2) и (3).

На рис. 1 показаны графики изменения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ и сами области.

Таблица 1

Значения внутреннего $\dot{r}$, внешнего $\bar{r}$ конформных радиусов
и их отношения $\dot{r}/\bar{r}$ для ромбов

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\dot{r}/a$	0.1066	0.2036	0.2898	0.3643	0.4264	0.4754	0.5108	0.5322	0.5394
$\bar{r}/a$	0.5183	0.5348	0.5492	0.5616	0.5718	0.5798	0.5855	0.5890	0.5902
$\dot{r}/\bar{r}$	0.2057	0.3807	0.5277	0.6487	0.7457	0.8199	0.8724	0.9036	0.9139

Примечания: α – острый угол ромба; a – сторона ромба.

Таблица 2

Значения внутреннего $\dot{r}$, внешнего $\bar{r}$ конформных радиусов
и их отношения $\dot{r}/\bar{r}$ для прямоугольников

a/b	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	$\rightarrow \infty$
$\dot{r}/a$	0.5394	0.4096	0.3159	0.2543	0.2121	0.1592	0.1273	0.0637	$2b/\pi$
$\bar{r}/a$	0.5902	0.4898	0.4374	0.4049	0.3826	0.3539	0.3361	0.2981	$a/4$
$\dot{r}/\bar{r}$	0.9139	0.8363	0.7222	0.6281	0.5544	0.4498	0.3788	0.2137	0

Примечание: a и b – стороны прямоугольника ($a \geq b$).

Для параллелограммов общих формул по определению конформных радиусов в научной литературе не приводится. Для их численного определения ранее [17] была использована формула Кристоффеля – Шварца [9] и приемы, предложенные в работе [18]. Численные значения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ для различных геометрических параметров приведены в табл. 3, в графической форме – на рис. 1, с.

Таблица 3

Значения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ для параллелограммов

α a/h	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1.0	–	–	–	–	–	–	–	–	0.9139
1.25	–	–	–	–	–	0.8191	0.8610	0.8822	0.8885
1.5	–	–	–	–	0.7415	0.7914	0.8185	0.8321	0.8363
1.75	–	–	–	0.6482	0.7136	0.7474	0.7658	0.7751	0.7779
2.0	–	–	0.5277	0.6302	0.6766	0.7007	0.7137	0.7203	0.7222
2.5	–	–	0.5185	0.5761	0.6022	0.6157	0.6231	0.6268	0.6281
3.0	–	0.3825	0.4861	0.5220	0.5383	0.5468	0.5514	0.5537	0.5544
4.0	–	0.3682	0.4173	0.4344	0.4421	0.4461	0.4482	0.4494	0.4498
5.0	–	0.3335	0.3609	0.3703	0.3747	0.3769	0.3781	0.3787	0.3788

Примечания: a/h – отношение большей стороны параллелограмма к меньшей высоте ($a/h \geq 1$); α – острый угол параллелограмма; прочерк «–» означает, что такой параллелограмм уже есть в таблице.

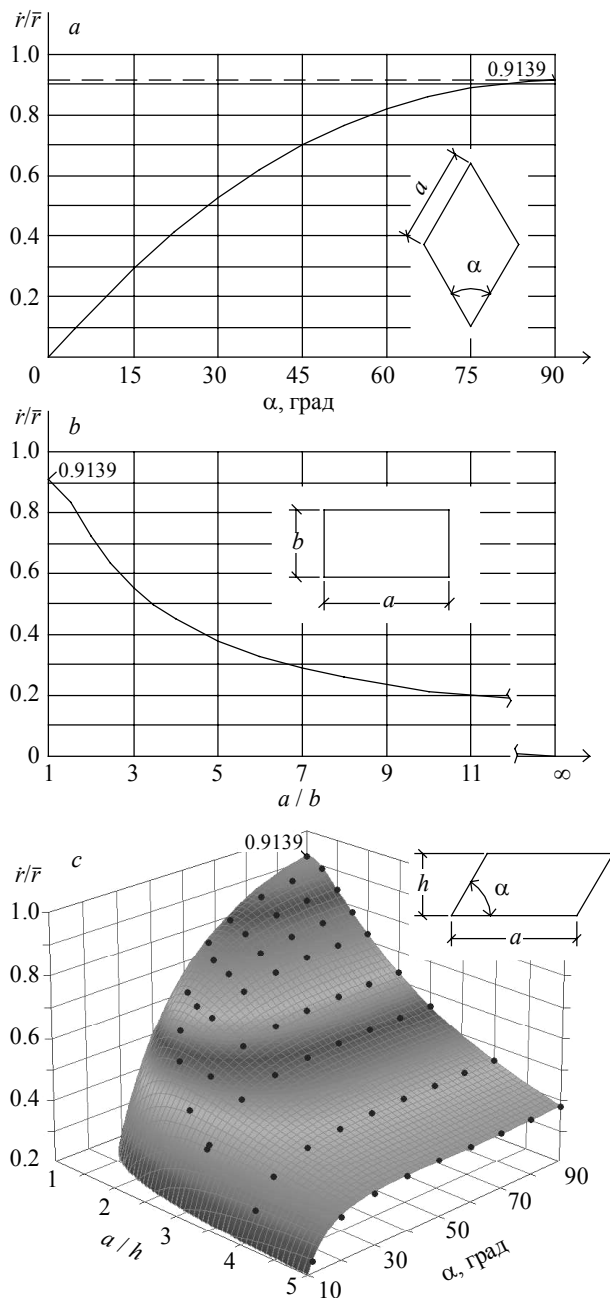


Рис. 1. Графики изменения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ для рассматриваемых областей: *a* – для ромбов, *b* – для прямоугольников, *c* – для параллелограммов

Fig. 1. Graphical variation of the conformal radii ratio $\dot{r}/\bar{r}$ for the considered domains: (*a*) rhombus, (*b*) rectangle, and (*c*) parallelogram

По полученным табличным данным (табл. 1 – 3) с помощью программы Table Curve были получены аппроксимирующие функции по определению отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$:

- для ромбов

$$\dot{r}/\bar{r} = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4, \quad (4)$$

где $a = 7.0709 \cdot 10^{-5}$; $b = 0.022191$; $c = -0.00016784$; $d = 5.2896 \cdot 10^{-7}$; $e = -1.6694 \cdot 10^{-9}$ (погрешность функции не превышает 0.1%);

- для прямоугольников

$$\dot{r}/\bar{r} = p + j(a/b)^{-1} + c(a/b)^{-2} + d(a/b)^{-3} + e(a/b)^{-4} + f(a/b)^{-5} + g(a/b)^{-6}, \quad (5)$$

где $p = -1.3099 \cdot 10^{-5}$; $j = 2.5514$; $c = -2.6183$; $d = 2.4652$; $e = -2.682$; $f = 1.6828$; $g = -0.39913$ (погрешность функции не превышает 0.1%);

- для параллелограммов

$$\begin{aligned} \dot{r}/\bar{r} = & k + b(a/h)^{-1} + c(\ln \alpha) + d(a/h)^{-2} + e(\ln \alpha)^2 + f(\ln \alpha)(a/h)^{-1} + \\ & + g(a/h)^{-3} + j(\ln \alpha)^3 + i(\ln \alpha)^2(a/h)^{-1} + p(\ln \alpha)(a/h)^{-2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k = -0.35747$; $b = -8.0875$; $c = 0.87769$; $d = -4.2622$; $e = -0.36236$; $f = 5.0926$; $g = 0.048766$; $j = 0.041774$; $i = -0.64312$; $p = 0.72539$ (погрешность функции не превышает 1.7%).

Взаимосвязь частоты колебаний пластин с отношением конформных радиусов

В предыдущих работах [10, 19] с помощью вариационного представления собственного значения дифференциального уравнения свободных колебаний мембраны и конформного представления внутренности ее области при отображении на единичный круг, а также на основе известной аналогии задач колебаний шарнирно опертых полигональных пластин и мембран [2] была получена следующая оценка сверху основной частоты колебаний пластин ω_0 с отношением конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ в виде неравенства

$$\omega_0 \leq k \left(\frac{\dot{r}}{\bar{r}} \right)^{-1} \frac{\sqrt{D/m}}{A}, \quad (7)$$

где k – числовая константа, зависящая от вида граничных условий и обращающая неравенство (7) в равенство для круглой пластины; m – масса единицы площади пластины; A – площадь пластины; D – цилиндрическая жесткость пластины,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (8)$$

где E – модуль упругости материала первого рода (модуль Юнга); t – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона.

В случае жесткого защемления по контуру в неравенстве (7) $k = 32.08$. В случае шарнирного опирания по контуру значение k можно указать лишь для конкретного материала пластины, поскольку при переходе правильной n -угольной пластины в круглую с шарнирным опиранием возникает известный парадокс [20], согласно которому величина частоты колебаний будет зависеть от коэффициента Пуассона. Для такого случая граничных условий укажем, для сравнения, значение

$k = 17.8$, соответствующее пластине в форме правильного 16-угольника, по форме достаточно близкой к кругу.

Как показали исследования [19], завышенность оценки частоты ω_0 сверху, получаемой по выражению (7) при вытягивании формы пластины от круглой до «иглы», монотонно возрастает и достигает больших значений для сильно вытянутых пластин. Поэтому вместо числовой константы k были определены «подправляющие» функции вида $k_\omega = f(\dot{r}/\bar{r})$ для всех простых форм пластин и получены соответствующие графики и функции. Приведем выборку [19] из этих графиков на рис. 2 для ромбовидных и прямоугольных пластин, которые будем использовать в работе. На рис. 2 значения k_ω основной частоты колебаний для удобства представлены в обратном виде.

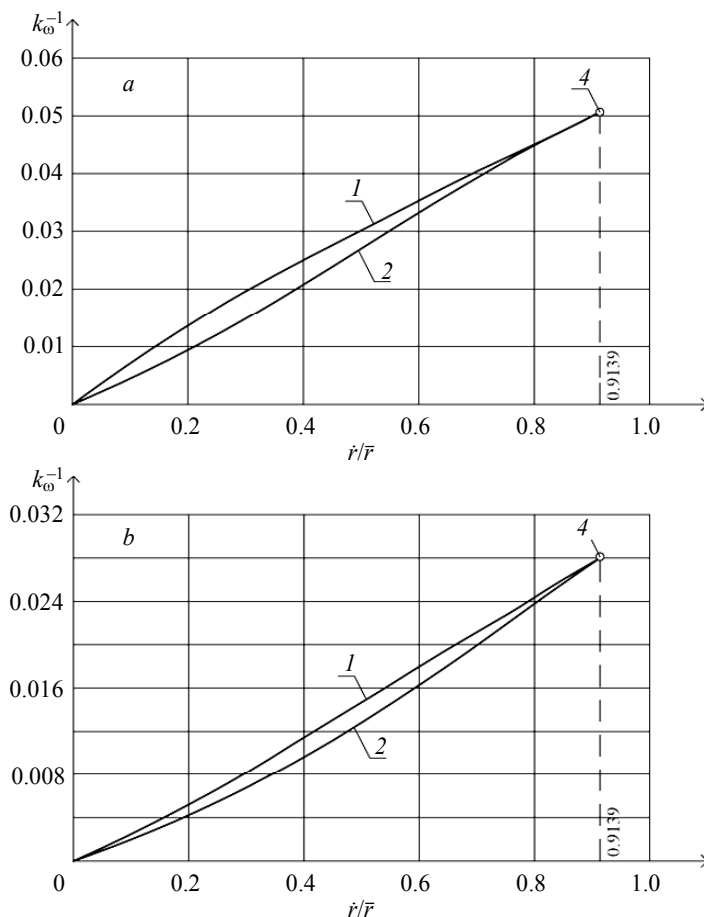


Рис. 2. Графики взаимосвязи частоты колебаний пластин с отношением конформных радиусов: *a* – шарнирное опирание, *b* – жесткое защемление; 1 – для ромбовидных, 2 – для прямоугольных, 4 – квадратная пластина

Fig. 2. Frequency of vibrations of plates as a function of conformal radii ratio: (a) hinged fixing and (b) rigid fixing; 1, rhombus plates; 2, rectangle plates; and 4, a square plate

Приведем полученные в [19] функции, описывающие эти кривые.

При шарнирном опирании:

- для ромбовидных пластин

$$k_{\omega} = \frac{1 + 10.5197(\dot{r}/\bar{r})^2 - 0.25437(\dot{r}/\bar{r})^4}{0.38104(\dot{r}/\bar{r})^2 + 0.24668(\dot{r}/\bar{r})^4}; \quad (9)$$

- для прямоугольных пластин

$$k_{\omega} = \frac{1}{0.03740(\dot{r}/\bar{r}) + 0.04951(\dot{r}/\bar{r})^2 - 0.03260(\dot{r}/\bar{r})^3}. \quad (10)$$

При жестком защемлении:

- для ромбовидных пластин

$$k_{\omega} = \frac{1 + 5.0032(\dot{r}/\bar{r})^2 - 1.2123(\dot{r}/\bar{r})^4}{0.1241(\dot{r}/\bar{r})^2 + 0.0254(\dot{r}/\bar{r})^4}; \quad (11)$$

- для прямоугольных пластин

$$k_{\omega} = \frac{1 - 0.7171(\dot{r}/\bar{r}) + 0.2996(\dot{r}/\bar{r})^2}{0.0182(\dot{r}/\bar{r})}. \quad (12)$$

Приведенные аппроксимирующие функции (9), (11) для ромбовидных пластин построены по известным из [2] приближенным решениям, полученным методом конечных элементов, для прямоугольных – (10) по известному точному решению и (12) – по решениям, полученным с помощью метода Галеркина [2].

В предыдущих работах [10, 19] было доказано, что значения основной частоты колебаний для всех параллелограммных пластин, представленные в зависимости от отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$, будут лежать внутри этих двух кривых и ограничены сверху значениями для прямоугольных пластин, снизу – для ромбовидных. Это важное свойство, построенные выше графики и функции для двух простых форм пластин (ромбовидных и прямоугольных), позволяет решать другие поставленные задачи для всех параллелограммных пластин, используя различные приемы геометрического моделирования формы. Варьирование форм невелико – это позволяет ожидать, что получаемые результаты будут достаточно точными.

Использование приемов геометрического моделирования формы в решении задач

Покажем на наглядном примере сущность геометрических методов с использованием отношения конформных радиусов. Требуется определить основную частоту колебаний шарнирно опертой параллелограммной пластины при следующих исходных данных: основание $a = 1$ м, высота $h = 0.5$ м, угол $\alpha = 60^\circ$ (см. рис. 1, с), толщина пластины $t = 5$ мм; материал пластины сталь: модуль упругости $E = 2.06 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7850$ кг/м³.

Частота колебаний для заданной параллелограммной пластины может быть получена на основе значений для ромбовидных и прямоугольных. Сначала получим для частоты колебаний ω_0 оценки сверху и снизу.

Определяем значение отношения $\dot{r}/\bar{r}$ для заданной параллелограммной пластины по табл. 3 или функции (6) $\dot{r}/\bar{r} = 0.7007$. Графически по рис. 2, а или с по-

мощью функций (9), (10) при $\dot{r}/\bar{r} = 0.7007$ определяем значение основной частоты колебаний в общем виде (7): для ромбовидной $k_{\omega} = 24.776$ ($k_{\omega}^{-1} = 0.04036$) и прямоугольной $k_{\omega} = 25.472$ ($k_{\omega}^{-1} = 0.03925$) пластин. Таким образом, значение основной частоты колебаний заданной параллелограммной пластины будет лежать между полученными двумя значениями:

$$24.776 \cdot \frac{\sqrt{D/m}}{A} < \omega_0 < 25.472 \cdot \frac{\sqrt{D/m}}{A}. \quad (13)$$

Заметим, что полученный интервал получился достаточно узким.

Определим значение цилиндрической жесткости по (8):

$$D = \frac{2.06 \cdot 10^{11} \cdot 0.005^3 \cdot 10^{-3}}{12(1 - 0.3^2)} = 2.358 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

массу единицы площади пластины, переведенную в кН (вес)

$$m = \rho \cdot t = 78.5 \cdot 0.005 = 0.3925 \text{ кН}.$$

и площадь пластины

$$A = a \cdot h = 1 \cdot 0.5 = 0.5 \text{ м}^2.$$

Тогда по (13), абсолютное значение основной частоты колебаний заданной параллелограммной пластины будет находиться между значениями

$$24.776 \cdot \frac{\sqrt{2.358/0.3925}}{0.5} < \omega_0 < 25.472 \cdot \frac{\sqrt{2.358/0.3925}}{0.5},$$

$$121.4 < \omega_0 < 124.8 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь получим приближенное значение для ω_0 . Выберем два «опорных» решения, одно для ромбовидной пластины, другое для прямоугольной таким образом чтобы заданная параллелограммная и «опорные» две пластины были связаны некоторым геометрическим преобразованием. В монографии [6] приводится ряд возможных геометрических преобразований, которые могут быть дополнены самостоятельно. Ограничимся рассмотрением трех наиболее наглядных преобразований, показанных на рис. 3.

Каждое геометрическое преобразование заданной параллелограммной пластины в пределе с одной стороны приводит к прямоугольной с (конкретным) геометрическим параметром a/b , определяющим ее форму, с другой – к ромбовидной с параметром α_1 . Как видно из рис. 3, «опорные» прямоугольные и ромбовидные пластины получаются различными и это будет влиять на результат (точность) решения. Запишем полученные геометрические параметры «опорных» пластин для трех рассматриваемых преобразований. Для преобразования на рис. 3, a соотношение $a/b = 2.0$ для прямоугольной пластины, угол $\alpha_1 = 30^\circ$ для ромбовидной пластины. Для преобразования на рис. 3, b соотношение $a/b = 2.909$ для прямоугольной пластины, угол $\alpha_1 = 46.76^\circ$ для ромбовидной пластины. Для преобразования на рис. 3, c соотношение $a/b = 1.7778$ для прямоугольной пластины, угол $\alpha_1 = 18.9^\circ$ для ромбовидной пластины. Геометрические параметры и все геометрические преобразования формы удобно выполнять и вычислять в любых современных компьютерных программах 2D-черчения.

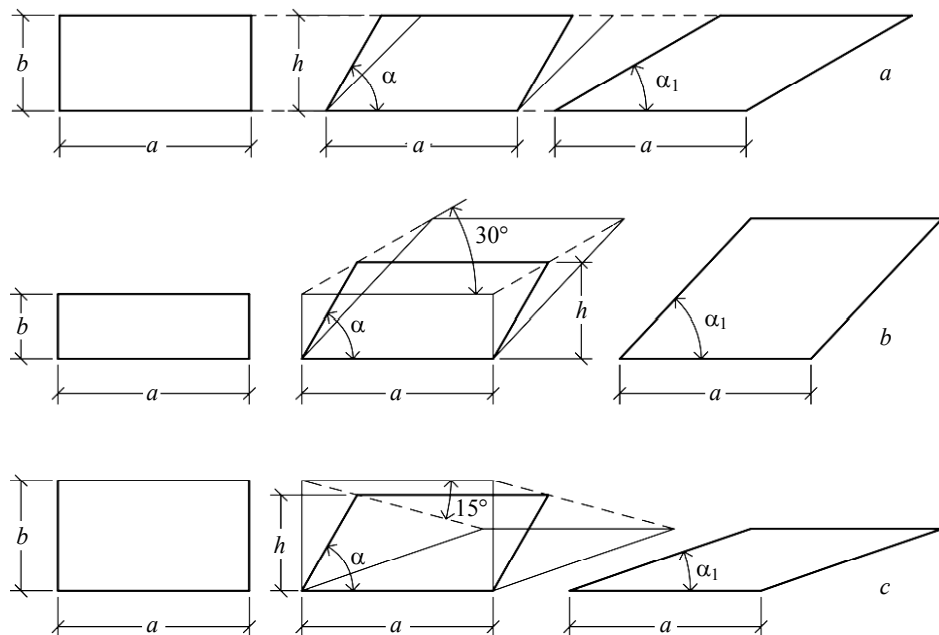


Рис. 3. Рассматриваемые геометрические преобразования: *a* – аффинный сдвиг, *b* – аффинный сдвиг с растяжением под углом 30° , *c* – аффинный сдвиг с сжатием под углом 15°

Fig. 3. Considered geometrical transformations: (*a*) affine shift, (*b*) affine shift with stretching at an angle of 30° , and (*c*) affine shift with compression at an angle of 15°

Отметим, что геометрические параметры, которые мы используем для нахождения и анализа решений, – это параметры, которые характеризуют лишь форму пластин. Масштаб (размеры, площадь) заданной пластины вводится в расчет лишь на последнем этапе, когда вычисляется абсолютное значение искомой величины (основной частоты колебаний). До этого момента все вычисления и анализ строились лишь на параметрах, характеризующих только форму заданной и «опорных» пластин, и решение рассматривалось в общем виде (7).

Вычислим по полученным геометрическим параметрам «опорных» пластин значения отношения $\dot{r}/\bar{r}$ по табл. 1, 2 или функциям (4), (5), а через него – значения основной частоты колебаний в общем виде (7) по рис. 2, *a* или с помощью функций (9), (10). Для преобразования на рис. 3, *a*: для ромбовидной $\dot{r}/\bar{r} = 0.5277$, $k_\omega = 31.218$ ($k_\omega^{-1} = 0.03203$) и прямоугольной $\dot{r}/\bar{r} = 0.7222$, $k_\omega = 24.665$ ($k_\omega^{-1} = 0.04054$). Для преобразования на рис. 3, *b*: для ромбовидной $\dot{r}/\bar{r} = 0.7168$, $k_\omega = 24.292$ ($k_\omega^{-1} = 0.04116$) и прямоугольной $\dot{r}/\bar{r} = 0.5664$, $k_\omega = 32.11$ ($k_\omega^{-1} = 0.03114$). Для преобразования на рис. 3, *c*: для ромбовидной $\dot{r}/\bar{r} = 0.3628$, $k_\omega = 43.732$ ($k_\omega^{-1} = 0.02286$) и прямоугольной $\dot{r}/\bar{r} = 0.7715$, $k_\omega = 23.066$ ($k_\omega^{-1} = 0.04335$). Покажем на рис. 4 полученные точки 1, 2 для «опорных» пластин и кривую 3 для всех параллелограммных пластин, объединенных соответствующим геометрическим преобразованием.

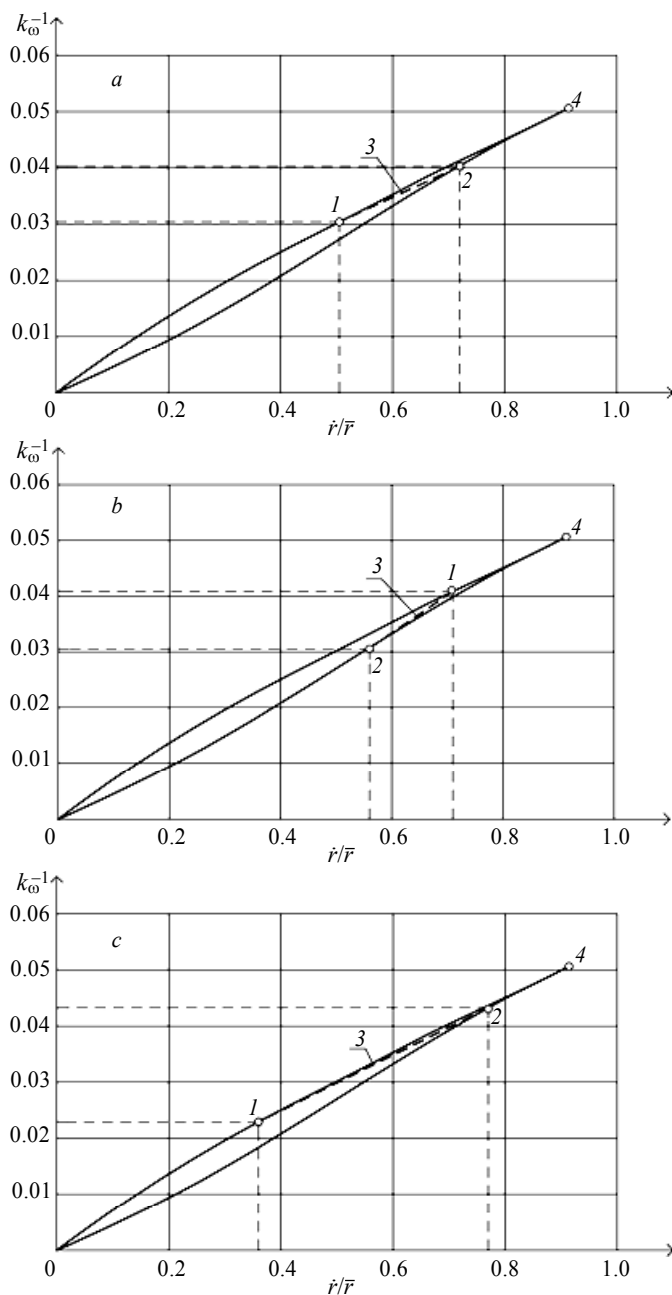


Рис. 4. Кривые, соответствующие рассматриваемым геометрическим преобразованиям: *a* – рис. 3, *a*; *b* – рис. 3, *b*; *c* – рис. 3, *c*: 1 – ромбовидная пластина, 2 – прямоугольная пластина, 3 – параллелограммные пластины

Fig. 4. Curves corresponding to the considered geometrical transformations: (*a*) fig. 3, *a*; (*b*) fig. 3, *b*; and (*c*) fig. 3, *c*: 1, a rhombus plate; 2, a rectangle plate; and 3, parallelogram plates

Искомое решение для заданной параллелограммной пластины k_{ω} будет лежать на некоторой неизвестной кривой 3, для приближенного описания которой в работе [6] были предложены и в работе [17] были апробированы две простые интерполирующие (аппроксимирующие) функции:

- линейная (через две точки 1 и 2)

$$k_{\omega} = k_{\omega 1} + \frac{\dot{r}/\bar{r} - (\dot{r}/\bar{r})_1}{(\dot{r}/\bar{r})_2 - (\dot{r}/\bar{r})_1} (k_{\omega 2} - k_{\omega 1}); \quad (14)$$

- и степенная (через три точки 0, 1 и 2 или 1, 2 и 4), запишем вид функции для первого случая

$$k_{\omega} = k_{\omega 1} \left(\frac{\dot{r}/\bar{r}}{(\dot{r}/\bar{r})_1} \right)^n, \quad n = \frac{\ln(k_{\omega 2}/k_{\omega 1})}{\ln((\dot{r}/\bar{r})_2/(\dot{r}/\bar{r})_1)}. \quad (15)$$

Вопрос выбора линейной (14) или степенной (15) функции рассмотрен в работе [21], где приводятся рекомендации в каких случаях какую функцию использовать для получения результата с большей точностью. Также возможно применение и более сложных функций [6]. Ограничимся рассмотрением более простой функции (14) и посчитаем результаты для трех преобразований:

- для преобразования на рис. 3, а

$$k_{\omega} = 31.218 + \frac{0.7007 - 0.5277}{0.7222 - 0.5277} (24.665 - 31.218) = 25.389;$$

- для преобразования на рис. 3, b (нумерация индексов 1 и 2 при этом меняется местами)

$$k_{\omega} = 32.11 + \frac{0.7007 - 0.5664}{0.7168 - 0.5664} (24.292 - 32.11) = 25.128;$$

- для преобразования на рис. 3, с

$$k_{\omega} = 43.732 + \frac{0.7007 - 0.3628}{0.7715 - 0.3628} (23.066 - 43.732) = 26.646.$$

Первые два результата находятся в интервале (13), полученном ранее, и их можно дальше рассматривать и оценивать. Третий выпадает из интервала (13), поэтому уже на этом этапе его можно не рассматривать. Получилось это из-за того, что при геометрическом преобразовании по рис. 3, с «опорные» решения оказались сильно удалены друг от друга, поэтому вычисленный для этого преобразования результат является достаточно грубым приближением. Отсюда следует основная рекомендация при выборе преобразований: для того чтобы результат был наиболее точным, геометрические преобразования следует подбирать таким образом, чтобы «опорные» решения отстояли друг от друга на как можно меньшем расстоянии друг от друга, чтобы интерполяция (линейная или степенная) осуществлялась на наименьшем интервале.

Точного решения для заданной параллелограммной пластины нет. Поэтому, чтобы оценить полученные результаты, воспользуемся решением, полученным методом конечного элемента с использованием программного комплекса SCAD Office [22] в работе [21] с числом конечных элементов 992 и треугольной сеткой, полученным в общем виде (7) $k_{\omega} = 25.5$, абсолютное значение $\omega_0 = 125.0 \text{ с}^{-1}$.

Как видим, первое геометрическое преобразованием по рис. 3, а дает более близкий результат к численному, с отклонением всего -0.43% .

Рассмотренный в работе прием геометрического моделирования формы с помощью безразмерного параметра в виде отношения $i/\bar{r}$ позволяет решать различные задачи как по нахождению непосредственно значения основной частоты колебаний для заданной конкретной пластины с конкретными геометрическими размерами и граничными условиями закрепления, так и более сложные и интересные для приложений задачи, связанные с отслеживанием изменения исследуемого параметра (основной частоты колебаний) при различном изменении геометрии параллелограммной пластины, а также поиску оптимальной геометрии по данным для двух «опорных» пластин простой формы (в форме ромба и прямоугольника).

Программная реализация предложенного приема

Рассмотренный в работе прием геометрического моделирования формы реализован в специально разработанной программе для ЭВМ, посвященной исследованию задачи на колебания пластин различной геометрии с использованием отношения $i/\bar{r}$. На рис. 5 показана отдельная вкладка, посвященная параллелограммным пластинам.

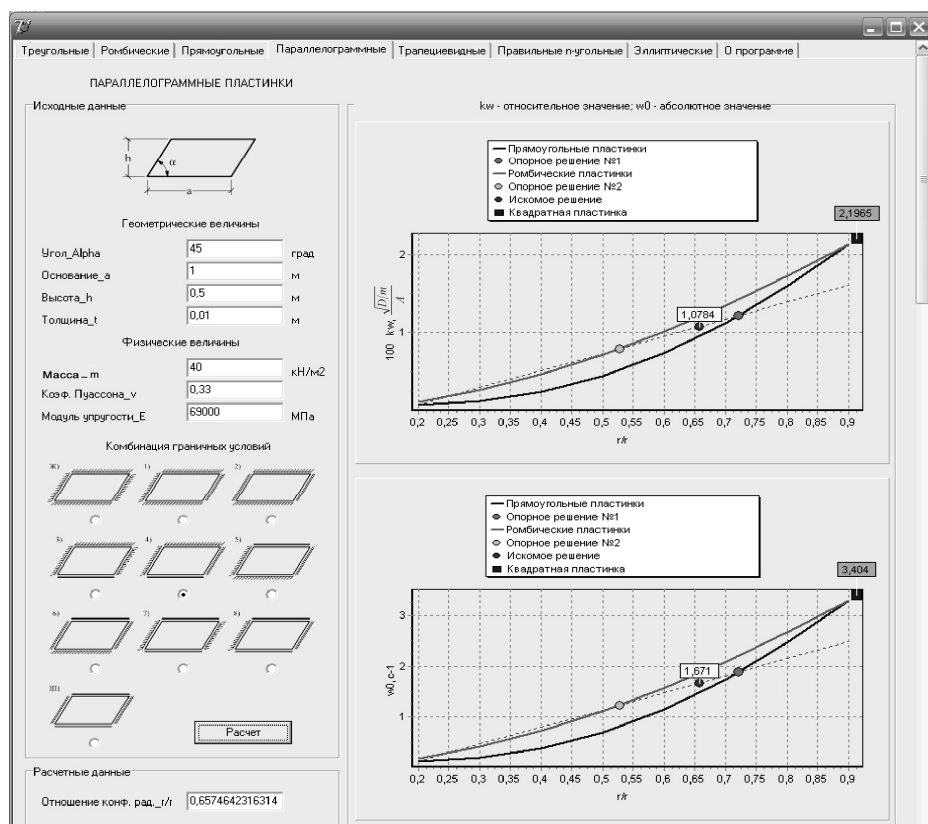


Рис. 5. Окно компьютерной программы для геометрического моделирования формы параллелограммных пластин

Fig. 5. Window of the computer program implementing geometric modeling of parallelogram plates

В программе добавлены граничные условия свободного края и также предусмотрен самостоятельный выбор закрепления сторон пластины, в том числе любые их комбинации. Возможен самостоятельный или автоматический выбор «опорных» пластин и геометрических преобразований из различного множества, встроенного в программу, с учетом отслеживания «непригодных» преобразований, дающих результаты «выпадающие» из границ (области значений). Возможен самостоятельный или автоматический выбор интерполирующих (аппроксимирующих) функций. Программа позволяет подобрать геометрию на заданную частоту колебаний, а также наглядно в «онлайн» режиме отследить ее изменение при изменении геометрических параметров. Результаты всех вычислений выводятся одновременно как в общем виде (7), когда производится анализ только геометрии пластин независимо от материала, так и в абсолютном значении с учетом всех характеристик материала и толщины пластины.

Заключение

Рассмотрено использование приема геометрического моделирования формы пластин с помощью отношения конформных радиусов в исследовании задачи по определению основной частоты колебаний на основе геометрических преобразований для параллелограммных пластин. Показано, что изучение свободных колебаний параллелограммных пластин при изменении ее геометрических параметров можно производить с использованием отношения конформных радиусов и ряда полученных ранее результатов для пластин в форме прямоугольника и ромба, не прибегая при этом к каким-либо дополнительным методам, а получая решения путем анализа лишь геометрической формы пластин и различных геометрических преобразований. Приводится краткое описание и общий вид разработанной программы для ЭВМ, реализующей предложенный прием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробко В.И., Коробко А.В. Количественная оценка симметрии. М.: Изд-во АСВ, 2008. 128 с.
2. Коробко В.И., Коробко А.В. Строительная механика пластинок: Техническая теория. М.: Спектр, 2010. 410 с.
3. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: СПбГПУ, 1998. 260 с.
4. Коробко А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния косоугольных пластинок, мембран и сечений геометрическими методами: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Днепропетровск, 1993. 153 с.
5. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. М.: Изд-во АСВ, 1997. 390 с.
6. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М.: Изд-во АСВ, 1999. 320 с.
7. Коробко В.И., Коробко А.В., Савин С.Ю., Черняев А.А. Основные этапы развития геометрических методов решения двумерных задач теории упругости и строительной механики пластинок // Научное обозрение. Технические науки. 2016. № 3. С. 54–69.
8. Полюа Г., Седе Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: КомКнига, 2006. 336 с.
9. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz – Christoffel Mapping. Cambridge University Press, 2002. 149 p.
10. Коробко В.И., Черняев А.А. Отношение конформных радиусов – новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач теории упругости // Вестник отделения строительных наук РААСН. 2012. № 16. Т. 1. С. 149–161.

11. Korobko A., Chernyaev A., Korobko V. Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique // *Procedia Engineering*. 2017. V. 206. P. 25–30. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.432.
12. Chernyaev A.A. Isoperimetric solution to problem of prismatic bar torsion // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2017. V. 87. P. 082009. DOI: 10.1088/1755-1315/87/8/082009.
13. Korobko V.I., Korobko A. V., Savin S.Y., Chernyaev A.A. Solving the transverse bending problem of thin elastic orthotropic plates with form factor interpolation method // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2016. V. 10. No. 2. P. 9–17. DOI: 10.5937/jsscm1602009K.
14. Черняев А.А. Развитие метода интерполяции по отношению конформных радиусов для решения задач поперечного изгиба пластинок: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Орел, 2013. 211 с.
15. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 324 с.
16. Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // *Вестник Красноярского государственного университета. Серия: физико-математические науки*. 2005. № 1. С. 32–38.
17. Коробко А.В., Черняев А.А. Определение максимального прогиба при поперечном изгибе параллелограммных пластинок с использованием отношения конформных радиусов // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2013. № 2. С. 19–22.
18. Власов В.И., Пальцев А.Б. Аналитико-численный метод конформного отображения сложных областей // *Доклады Академии наук*. 2009. Т. 429. № 1. С. 12–14.
19. Коробко А.В., Черняев А.А. Определение основной частоты свободных колебаний пластинок с использованием конформных радиусов // *Строительство и реконструкция*. 2011. № 1. С. 12–8.
20. Мазья В. Г., Назаров С. А. Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными // *Известия академии наук СССР. Серия математическая*. 1986. Т. 50. № 6. С. 1156–1177.
21. Chernyaev A. Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration // *Procedia Engineering*. 2017. V. 206. P. 31–34. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.433.
22. SCAD Office. Официальный сайт разработчиков. URL: <http://scadsoft.com/> (дата обращения: 02.09.2019).

Статья поступила 10.09.2019

Chernyaev A.A. (2021) GEOMETRIC MODELING OF A SHAPE OF PARALLELOGRAM PLATES IN A PROBLEM OF FREE VIBRATIONS USING CONFORMAL RADII. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 143–159

DOI 10.17223/19988621/70/12

Keywords: geometric modeling, parallelogram plates, free vibrations, conformal radii.

The paper considers a method of geometric modeling applied when solving basic two-dimensional problems of the theory of elasticity and structural mechanics, in particular the applied problems of engineering. The subject of this study is vibrations of thin elastic parallelogram plates of constant thickness. To determine a basic frequency of vibrations, the interpolation method based on the geometric characteristic of the shape of plates (membrane, cross sections of a rod) is proposed. This characteristic represents a ratio of interior and exterior conformal radii of the plate. As is known from the theory of conformal mappings, conformal radii are those obtained by mapping of a plate onto the interior and exterior of a unit disk.

The paper presents basic terms, tables, and formulas related to the considered geometric method with a comparative analysis of the curve diagrams obtained using various interpolation formulas. The original computer program is also developed.

The main advantage of the proposed method of determining the basic frequency of plate vibrations is a graphic representation of results that allows one to accurately determine the required solution on the graph among the other solutions corresponding to the considered case of parallelogram plates. Although there are many known approximate approaches, which are used to solve the considered problems, only geometric modeling technique based on the conformal radii ratio gives such an opportunity.

Andrey A. CHERNYAEV (Candidate of Technical Sciences, Orel State University, Orel, Russian Federation). E-mail: chernyev87@yandex.ru

REFERENCES

1. Korobko V.I., Korobko A.V. (2008) *Kolichestvennaya otsenka simmetrii* [Quantitative evaluation of symmetry]. Moscow: ASV.
2. Korobko V.I., Korobko A.V. (2010) *Stroitel'naya mekhanika plastinok: Tekhnicheskaya teoriya* [Structural mechanics of plates: Technical theory]. Moscow: Spectr.
3. Rozin L.A. (1998) *Zadachi teorii uprugosti i chislennye metody ikh resheniya* [Problems of the theory of elasticity and numerical methods for their solving]. Saint Petersburg: SPbGPU.
4. Korobko A.V. (1993) *Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kosougol'nykh plastinok, membran i secheniy geometricheskimi metodami* [Investigation of the stress-strain state of oblique-angle plates, membranes, and sections by geometric methods]. Dissertation. Rostov-on-Don.
5. Korobko V.I. (1997) *Izoperimetricheskii metod v stroitel'noy mekhanike: Teoreticheskie osnovy izoperimetricheskogo metoda* [Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations of the isoperimetric method]. Moscow: ASV.
6. Korobko A.V. (1999) *Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti* [Geometric modeling of a domain shape in two-dimensional problems of the elasticity theory]. Moscow: ASV.
7. Korobko V.I., Korobko A.V., Savin S.Yu., Chernyaev A.A. (2016) Osnovnye etapy razvitiya geometricheskikh metodov resheniya dvumernykh zadach teorii uprugosti i stroitel'noy mekhaniki plastinok [The main stages of development of geometric methods for solving two-dimensional problems in the theory of elasticity and structural mechanics of plates]. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki – Scientific Review. Technical science*. 3. pp. 54–69.
8. Polia G., Sege G. (2006) *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoy fizike* [Isoperimetric inequalities in mathematical physics]. Moscow: KomKniga.
9. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) *Schwarz – Christoffel Mapping*. Cambridge University Press.
10. Korobko V.I., Chernyaev A.A. (2012) Otnoshenie konformnykh radiusov – novyy argument geometricheskikh metodov resheniya dvumernykh zadach teorii uprugosti [The ratio of conformal radii is a new point of geometric methods for solving two-dimensional problems of the elasticity theory]. *Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk RAASN*. 16(1). pp. 149–161.
11. Korobko A., Chernyaev A., Korobko V. (2017) Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique. *Procedia Engineering*. 206. pp. 25–30. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.432.
12. Chernyaev A.A. (2017) Isoperimetric solution to problem of prismatic bar torsion. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 87. Article 082009. DOI: 10.1088/1755-1315/87/8/082009.
13. Korobko V.I., Korobko A.V., Savin S.Yu., Chernyaev A.A. (2016) Solving the transverse bending problem of thin elastic orthotropic plates with form factor interpolation method. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 10(2). pp. 9–17. DOI: 10.5937/jsscm1602009K.

14. Chernyaev A.A. (2013) *Razvitie metoda interpolatsii po otnosheniyu konformnykh radiusov dlya resheniya zadach poperechnogo izgiba plastinok* [Development of an interpolation method with respect to conformal radii for solving problems on the transverse bending of plates]. Dissertation. Orel.
15. Ivanov V.I., Popov V.Yu. (2002) *Konformnye otobrazheniya i ikh prilozheniya* [Conformal mappings and their application]. Moscow: Editorial URSS.
16. Kazantsev V.P., Zolotov A.O., Dolgoplov M.V. (2005) Elektrostatika na ploskosti. Normirovka potentsiala. Yomkosti uedinennogo provodnika i linii otnositel'no tochki. Konformnye radiusy [Electrostatics on a plane. Normalization of potential. Capacity of the isolated conductor and the lines with respect to a point. Conformal radii]. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki*. 1. pp. 32–38.
17. Korobko A.V., Chernyaev A.A. (2013) Determination of maximum deflection in transverse bending of parallelogram plates using the conformal radiuses ratio. *Russian Aeronautics*. 2. pp. 19–22. DOI: 10.3103/S1068799813020049.
18. Vlasov V.I., Paltsev A.B. (2009) An analytical-numerical method for conformal mappings of complex-shaped domains. *Doklady Mathematics*. 80(3). pp. 790–792. DOI: 10.1134/S1064562409060027.
19. Korobko A.V., Chernyaev A.A. (2011) Opredelenie osnovnoy chastoty svobodnykh kolebaniy plastinok s ispol'zovaniem konformnykh radiusov [Determination of a basic frequency of free oscillations of plates using conformal radii]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya – Journal of Building and Reconstruction*. 1. pp. 12–8.
20. Maz'ya V.G., Nazarov S.A. (1986) Paradoksy predel'nogo perekhoda v resheniyakh kraevykh zadach pri approksimatsii gladkikh oblastey mnogougol'nymi [Paradoxes of limit transition in solutions of boundary value problems with approximation of smooth domains by polygons]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*. 50(6). pp. 1156–1177.
21. Chernyaev A. (2017) Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration. *Procedia Engineering*. 206. pp. 31–34. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.433.
22. SCAD Office. Official website of developers. URL: <http://scadsoft.com/>.

Received: September 10, 2019