

На правах рукописи



**Пашинская Татьяна Юрьевна**

**УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫМИ  
ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ  
ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Томск – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет».

### **Официальные оппоненты:**

**Васильев Вячеслав Артурович**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор

**Добровидов Александр Викторович**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, лаборатория № 38 «Управления по неполным данным», ведущий научный сотрудник

**Пакшин Павел Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева», кафедра прикладной математики Арзамасского политехнического института (филиала) НГТУ, заведующий кафедрой

**Мицель Артур Александрович**, Мицель Артур Александрович, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», кафедра автоматизированных систем управления, профессор

Защита состоится 06 октября 2021 г. в 10 ч. 35 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.05.01», созданного на базе Института прикладной математики и компьютерных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 212Б).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» [www.tsu.ru](http://www.tsu.ru).

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/e8a01f9f-69ca-48f5-b510-b31d7c70801e>

Автореферат разослан «\_\_\_» июля 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, доцент



Нежелская  
Людмила Алексеевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** Модели систем со случайными параметрами широко используются во многих реальных приложениях, таких как робототехника, экономика, вычислительные сети, сети связи, отказоустойчивое управление, системы управления полетом, автономные движущиеся экипажи, солнечные тепловые приемники, атомные энергетические установки; летательные аппараты с изменяемыми режимами полета; системы наведения на объект, уклоняющийся от встречи; процессы теплопереноса и многих других. Важной областью приложений стохастической теории управления является финансовая инженерия, в частности, задача управления инвестиционным портфелем (ИП). Финансовый рынок представляет собой сложную стохастическую систему, и задача управления портфелем включает в себя все основные проблемы, связанные с управлением динамическими стохастическими системами.

В связи с этим в настоящее время активно развивается направление, рассматривающее проблемы управления системами со случайными параметрами (структурой). Как правило, выделяют два класса таких систем:

1. Системы, параметры которых меняются непрерывно и представляют собой некоторый случайный процесс или последовательность.

Модели таких систем описывают многие реальные инженерно-технические процессы. Это обусловлено тем, что реальные системы часто подвержены воздействию так называемых экзогенных возмущений (стохастических шумов, случайных параметров), вызванных определенными типами случайных процессов. Для многих реальных объектов, таких как радар с синтезированной апертурой, медицинские ультразвуковые или оптические когерентные томографы, случайные шумы входят в динамику системы мультипликативно по переменным состояния и входа. Такие системы называются стохастическими системами с мультипликативными шумами. В отличие от систем с аддитивными возмущениями, анализ и синтез стратегий управления для систем с мультипликативными шумами значительно сложнее.

2. Системы, динамика которых описывается разностными (в дискретном времени) или дифференциальными (в непрерывном времени) уравнениями, в то время как структура системы (параметры) изменяется в соответствии с эволюцией переменных, принимающих дискретный набор значений из некоторого множества (так называемые, гибридные системы, или системы непрерывно-дискретной природы). Обычно в моделях таких систем предполагается, что они состоят из конечного набора подсистем (состояний), при этом переключение между подсистемами (смена структуры) происходит в соответствии с эволюцией наблюдаемой или скрытой цепи Маркова.

Модели с марковскими переключениями представляют специальный класс адаптивных систем, которые широко используются в технологиях автоматического распознавания речи, распознавания подписей, машинного зрения, компьютерной и сетевой безопасности, оптического распознавания символов, при анализе ДНК и белковых соединений в биологии и

биоинформатике. Теоретические и эмпирические исследования показывают, что такие модели способны описывать поведение сложных нелинейных нестационарных реальных процессов. В частности, в области финансовой инженерии модели с марковскими скачками и/или мультипликативными шумами используются для описания эволюции ИП на финансовом рынке с переключающимися режимами, когда параметры рискованных активов (доходности и волатильности) изменяются в соответствии со сменой режимов рынка.

Задачами управления для систем первого класса занимались многие исследователи, среди которых следует отметить работы Н. Н. Красовского, П. В. Пакшина, Ю. И. Параева, В. В. Домбровского, M. Ait Rami, A. Beghi, M. Cannon, X. Chen, D. D'Alessandro, J. Fisher, B. Kouvaritakis, A. Lim, P. J. McLane, J. A. Primbs и др. Системам второго класса посвящены работы следующих авторов: А. В. Борисова, П. В. Пакшина, В. И. Смагина, Е. К. Boukas, O. L. V. Costa, V. Dragan, R. J. Elliott, W. E. Hopkins, T. Morozan, B. Oksendal, W. L. Paulo, D. D. Sworder и др.

В большинстве работ, как правило, рассматриваются задачи управления линейными системами без ограничений на переменные состояния и управления. Основным методом синтеза стратегий управления – это применение метода динамического программирования Беллмана, принципа максимума Понтрягина, либо сведение задачи к решению системы линейных матричных неравенств.

Решение задачи управления с учетом ограничений, используя традиционные подходы, приводит к значительным аналитическим и вычислительным трудностям (так называемому «проклятию размерности») и к практически нереализуемым стратегиям управления. Однако во многих реальных задачах необходимо учитывать ограничения на переменные состояния и управления.

Эффективным подходом к синтезу систем управления с ограничениями, получившим широкое признание и применение в практике управления сложными технологическими процессами, является метод управления с прогнозирующей моделью (управление с прогнозированием, Model Predictive Control). При этом, как правило, получается стратегия управления с обратной связью, но удается избежать «проклятия размерности». Задачам управления с прогнозирующей моделью посвящены работы многих исследователей, таких как В. И. Смагина, В. В. Домбровского, T. Alamo, do Val JBR T. Basar, A. Bemporad, F. Borrelli, G. C. Calafiore, E. F. Camacho, M. Cannon, B. L. Cooley, J. A. De Dona, M. Farina, J. B. Froisy, G. C. Goodwin, L. Grüne, M. A. Hernandez-Medjias, B. Kouvaritakis, W. H. Kwon, J. H. Lee, D. Limon, D. Q. Mayne, M. Morari, J. Pannek, B. G. Park, P. Patrinos, D. M. Pena, J. A. Primbs, C. V. Rao, J. B. Rawlings, R. Scatollini, P. O. M. Scokaert, M. M. Seron, P. Soparasakis, C. H. Sung, J. Tonne. В настоящее время управление с прогнозирующей моделью является подходом, по существу, не имеющим альтернатив при управлении сложными стохастическими системами при ограничениях. Трудно назвать практическую область, где бы не применялись методы управления с прогнозированием.

Различают робастный (или детерминированный) метод управления с прогнозированием и стохастический метод прогнозирующего управления. Робастный метод направлен на синтез стратегий управления детерминированными системами, в то время как стохастический метод посвящен управлению системами со случайными параметрами и/или структурой. В то время как детерминированные и робастные версии метода прогнозирующего управления в значительной степени стандартизованы и хорошо изучены, стохастические версии все еще не имеют всеобъемлющего, унифицированного и систематического подхода. Это обусловлено тем, что технические аспекты, связанные с прогнозирующим управлением стохастическими системами, значительно сложнее, чем при управлении детерминированными системами.

Прогнозирующее управление системами со случайными непрерывными параметрами и/или мультипликативными шумами рассматривается в работах В. В. Домбровского, A. Bemporad, G. C. Calafiore, M. Cannon, G. C. Goodwin, T. A. N. Heirung, B. Kouvaritakis, A. Mesbah, P. K. Mishra, J. A. Primbs, M. M. Seron, R. Tempo и др. Стохастическим системам с марковскими скачками (переменной структуры) посвящены работы do Val JBR T. Basar, A. Bektasov, L. Blackmore, M. A. Hernandez-Medjias, W. H. Known, M. Ono, B. G. Park, P. Patrinos, A. Sala, P. Soparasakis, J. Tonne, A. N. Vargas, B. C. Williams и др. Обзор литературы показывает, что большинство опубликованных в настоящее время работ посвящено управлению линейными системами, в то время как многие реальные процессы описываются уравнениями, содержащими нелинейные компоненты.

Важный класс нелинейных систем представляют билинейные системы. Такие системы, как правило, содержат нелинейную составляющую в виде произведения состояний и управлений. Однако к данному классу также часто относят системы со случайным параметрическим возбуждением и линейные системы с мультипликативными шумами, зависящими от состояний и/или управлений. В последние десятилетия изучению стохастических билинейных систем уделяется значительное внимание из-за широкого применения этих систем в моделировании динамики численности населения, макроэкономике, при управлении химическими реакторами, распределении времени и случайных ошибках округления в работе компьютера и других областях. Многие проблемы для этих систем, такие как анализ устойчивости, оптимальное управление, проектирование наблюдателей и т. д. в настоящее время активно исследуются в литературе.

На сегодняшний день лишь ограниченное число результатов получено в области управления нелинейными и билинейными системами со случайными параметрами при ограничениях, в частности, можно отметить работы T. Alamo, J. M. Bravo, A. Bemporad, H. H. J. Bloemen, E. F. Camacho, M. Cannon, T. A. N. Heirung, L. V. Hien, N. Kantas, B. Kouvaritakis, J. M. Maciejowski, A. Mesbah, P. Patrinos, J. A. Paulson, P. Sopasakis, J. A. Yaz. При этом рассматриваются, в основном, задачи управления при ограничениях на

математические ожидания переменных состояния и/или управления или при вероятностных ограничениях, кроме того, предполагается, что случайные параметры представляют собой последовательности независимых случайных величин.

Проведенный анализ литературы показал, что практически отсутствуют результаты для нелинейных стохастических систем с непрерывными коррелированными случайными параметрами в условиях «жестких» ограничений, а также для гибридных нелинейных систем непрерывно-дискретной природы, параметры которых изменяются скачкообразно в соответствии с эволюцией наблюдаемой или скрытой марковской цепи.

**Объект исследования.** Управляемые нелинейные стохастические системы со случайными параметрами и мультипликативными шумами.

**Предмет исследования.** Алгоритмы синтеза стратегий управления с прогнозированием при ограничениях на управляющие переменные.

**Целью** диссертационной работы является разработка методов управления с прогнозирующей моделью нелинейными стохастическими системами при ограничениях для систем с коррелированными случайными параметрами и гибридных систем с марковскими скачками и их применение.

В рамках указанной цели были поставлены следующие основные **задачи исследования**:

1. Синтезировать вычислительно эффективные стратегии управления с прогнозированием для дискретных нелинейных систем со случайными сериально коррелированными параметрами при явных ограничениях на управляющие переменные по различным критериям качества.

2. Разработать метод синтеза стратегий управления с прогнозированием для дискретных нелинейных систем с марковскими скачками и мультипликативными шумами при ограничениях по различным критериям качества.

3. Разработать оптимальные стратегии прогнозирующего управления взаимосвязанными гибридными системами с марковскими скачками и мультипликативными шумами при явных ограничениях на управляющие переменные.

4. Синтезировать стратегии прогнозирующего управления для класса билинейных стохастических систем с марковскими скачками и мультипликативным шумом, описываем различными векторными регрессионными моделями с марковским переключением режимов.

5. Применить полученные методы управления для решения новых актуальных задач финансовой инженерии, в частности для задач оптимизации структуры инвестиционного портфеля с учетом ограничений на объемы торговых операций и транзакционных издержек. Разработать адаптивные алгоритмы численной реализации предложенных стратегий управления, основанные на данных, с использованием реальных данных различных финансовых рынков.

**Методы исследования.** При выполнении диссертационной работы использовались понятия и методы теории автоматического управления (методология управления с прогнозированием), теории случайных процессов, методы оптимизации, методы матричной алгебры, методы теории вероятностей и математической статистики, численные методы и методы компьютерного моделирования.

**Научная новизна** полученных результатов заключается в следующем.

1. Разработан метод синтеза стратегий прогнозирующего управления при явных ограничениях на управляющие воздействия для класса дискретных нелинейных стохастических систем с сериально коррелированными параметрами. Получены уравнения синтеза стратегий управления по обобщенному критерию, из которого, как частные случаи, получаются стратегии управления по квадратичному и «mean-variance» критериям. Метод позволяет преобразовать сложную динамическую оптимизационную задачу к решению последовательности вычислительно эффективных задач квадратичного программирования. Для определения оптимальной стратегии достаточно только существование условных первых и вторых моментов распределения вектора случайных параметров.

2. Разработан метод синтеза стратегий прогнозирующего управления при явных ограничениях на управляющие воздействия для класса дискретных нелинейных систем с марковскими скачками, состоящих из совокупности нелинейных стохастических подсистем, где нелинейность задается статистическими характеристиками. Рассматриваемый класс систем включает в себя множество специальных случаев сложных нелинейных систем, имеющих отдельный теоретический интерес и практическую важность. Рассмотрены случаи наблюдаемой и скрытой цепи Маркова.

3. Разработан метод оптимизации стратегий управления с прогнозированием сложной многокомпонентной системой с марковскими скачками и мультипликативными шумами, состоящей из взаимосвязанных подсистем, с учетом ограничений на управляющие переменные. Предполагается, что параметры каждой из подсистем изменяются в соответствии с эволюцией марковских цепей, состояния которых взаимосвязаны между собой.

4. Синтезированы стратегии управления по обобщенному критерию при ограничениях для класса билинейных стохастических систем с марковскими скачками в матрицах системы и входов и регрессионным мультипликативным шумом, динамика которого описывается многомерными регрессионными и/или векторными авторегрессионными моделями с переключением режимов. Рассмотрены случаи наблюдаемой и скрытой цепей Маркова.

5. На основе полученных результатов решены новые актуальные задачи управления сложной стохастической системой – инвестиционным портфелем по различным критериям качества: а) слежение за эталонным портфелем, б) управление по критерию «mean-variance»:

– управление ИП на финансовом рынке с сериально коррелированными доходностями при ограничениях на объемы вложений и займов с учетом влияния

объемов операций на рыночную цену активов. При этом не требуется знание закона распределения вектора доходностей, а достаточно только знание условных первых и вторых моментов;

- динамическая задача управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов с учетом ограничений и явных транзакционных издержек (в виде брокерских комиссий), когда динамика рискованных активов описывается моделью геометрического броуновского движения с параметрами, зависящими от состояния цепи Маркова;

- управление ИП на финансовом рынке с переключающимися режимами при ограничениях с учетом эффекта ценового «проскальзывания»;

- управление совокупностью взаимосвязанных инвестиционных портфелей на финансовом рынке с переключающимися режимами;

- динамическая задача управления ИП на финансовом рынке с переключающимися режимами при ограничениях, когда динамика рискованных активов описывается векторными авторегрессионными моделями с марковским переключением режимов.

6. Разработаны эффективные вычислительные алгоритмы адаптивной реализации разработанных стратегий управления, основанные на данных. Приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского и американского фондовых рынков. Предложенные стратегии управления могут быть использованы для алгоритмической торговли, где требуется обновление структуры портфеля с учетом актуальных данных.

**Теоретическая значимость** диссертационного исследования состоит в развитии теории прогнозирующего управления сложными нелинейными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами при ограничениях на управляющие переменные.

**Практическая ценность** данной работы состоит в возможности применения полученных результатов для управления сложными реальными объектами: а) объектами, динамика которых зависит от параметров, представляющих собой случайные коррелированные последовательности; б) объектами случайной структуры, динамика которых зависит от скачкообразных параметров. В диссертационной работе результаты применены к задачам управления ИП на рынке с переключающимися режимами и на рынке с коррелированными доходностями рискованных активов с учетом ограничений. Результаты работы используются в учебном процессе в Институте прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается строгими аналитическими выкладками и доказательствами, а также результатами численного моделирования с использованием реальных данных.

В работе приведены результаты численного моделирования на примере управления ИП с использованием реальных данных о доходностях акций, торгуемых на Московской фондовой бирже и Нью-Йоркской фондовой бирже.

Численные эксперименты подтверждают эффективность предложенных подходов к управлению ИП, как примеров управления сложной стохастической системой.

**Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.** Автор лично участвовала в получении всех результатов, изложенных в диссертации. Доказательство и обоснование изложенных результатов, математические выкладки, численное моделирование выполнены лично автором.

**На защиту выносятся:**

1. Метод синтеза стратегий управления с прогнозированием для стохастических нелинейных систем со случайными сериально коррелированными параметрами при ограничениях на управляющие переменные по обобщенному критерию управления.

2. Метод синтеза стратегий управления с прогнозированием для класса стохастических систем с марковскими скачками в матрице динамики и управления и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений, при ограничениях.

3. Метод синтеза стратегий управления с прогнозированием для класса нелинейных стохастических систем с наблюдаемыми или скрытыми марковскими переключениями при ограничениях на управляющие переменные.

4. Уравнения синтеза стратегий управления с прогнозирующей моделью для взаимосвязанных гибридных систем с мультипликативными шумами с учетом явных ограничений на управляющие переменные.

5. Стратегии прогнозирующего управления стохастическими билинейными системами с марковскими скачками в матрицах системы и входов и регрессионным мультипликативным шумом, зависящим от состояния наблюдаемой или скрытой цепи Маркова, по обобщенному критерию.

6. Результаты применения методов к решению новых актуальных задач управления ИП по различным критериям качества (слежение за эталонным портфелем и управление по критерию «среднее-вариация») при ограничениях на объемы торговых операций:

а) управление ИП в условиях сериальной коррелированности доходностей рискованных финансовых активов с учетом влияния объемов операций на рыночную цену активов;

б) управление ИП на финансовом рынке с переключающимися режимами с учетом явных транзакционных издержек в форме брокерских комиссий;

в) управление ИП на рынке с переключающимися режимами, с учетом эффекта ценового «проскальзывания»;

г) управление взаимосвязанными инвестиционными портфелями на рынке с переключением режимов;

д) управление ИП на рынке с переключающимися режимами, когда динамика доходностей активов описывается векторными авторегрессионными моделями с переключением режимов.

7. Адаптивные алгоритмы численной реализации предложенных стратегий управления и результаты численного моделирования и тестирования стратегий управления на примере управления ИП с использованием реальных данных.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: «Робастная статистика и финансовая математика» (Томск, 04–06 июля 2019 г.; 03–05 июля 2017 г.; 09–11 июля 2018 г.); European Control Conference (ECC) (Linz, Austria, July 15–17, 2015); «Робастная статистика и финансовая математика» (Томск, 01–02 июля 2015 г.); XIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук» (Томск, 25–28 апреля 2017 г.); 16th International Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems (MAMECTIS '14) (Lisbon, Portugal, October 30 – November 01, 2014); Девятая Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Томск, 04–08 июня 2012 г.); Восьмая Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (Томск, 05–08 октября 2010 г.); Всероссийская научная конференция молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» (Новосибирск, 02–04 декабря 2011 г.); VI Всероссийский форум студентов, аспирантов и молодых ученых в Томском государственном университете «Инновации в экономике» (Томск, 23–7 мая 2011 г.); V Всероссийский экономический форум с международным участием студентов, аспирантов и молодых ученых «Инновации в экономике» (Томск, 17–20 мая 2010 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 29 печатных работ, в том числе в журналах из списка ВАК – 21 статей [1–21].

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, основного текста, заключения и списка литературы. Основной текст разбит на 4 главы и содержит 56 рисунков. Список литературы включает 232 наименования. Общий объем работы 317 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** проведен обзор существующих подходов к синтезу стратегий управления нелинейными системами со случайными параметрами, обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, изложена ее научная новизна, раскрыты теоретическое значение и практическая ценность полученных результатов, кратко излагается содержание работы.

**В первой главе** диссертации рассматривается задача синтеза стратегий прогнозирующего управления для дискретных нелинейных систем со случайными сериально коррелированными параметрами в присутствии явных ограничений на управляющие воздействия. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Получены стратегии управления по обобщенному критерию, представляющему

собой линейную комбинацию а) ожидаемых значений квадратичных форм по состоянию и управлению; б) квадратичной формы ожидаемых значений состояний системы; с) линейной части – ожидаемого значения состояния системы. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: а) квадратичный критерий, б) критерий «mean-variance».

**В параграфе 1.1** синтезированы стратегии управления по обобщенному критерию для класса билинейных систем с сериально коррелированными параметрами, аддитивными и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений.

Пусть объект управления описывается уравнением:

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \left( A_0(k+1) + \sum_{i=1}^n A_i(k+1)v_i(k+1) \right) x(k) + \\ & + \left( B_0[\eta(k+1), k+1] + \sum_{i=1}^n B_i[\eta(k+1), k+1]v_i(k+1) \right) u(k) + D[\eta(k+1), k+1]w(k+1), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – вектор состояния,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – вектор управления,  $\eta(k) \in \mathbb{R}^q$  – последовательность случайных векторов;  $A_i(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_i[\eta(k), k] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $(i = \overline{0, n})$ ,  $D[\eta(k), k] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ ; элементы матриц  $B_i[\eta(k), k]$ ,  $D[\eta(k), k]$  зависят от  $\eta(k)$  линейно. Аддитивные и мультипликативные шумы  $v(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  – векторы белых шумов, причем  $E\{w(k)v^T(s)\} = 0$ ,  $E\{\eta(k)v^T(s)\} = 0$ ,  $E\{\eta(k)w^T(s)\} = 0$  для всех  $k, s$ .

Пусть  $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k \geq 1}$  – поток  $\sigma$ -алгебр, где каждая из  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{F}_k$  порождается последовательностью  $\{\eta(s): s = 0, 1, 2, \dots, k\}$  и интерпретируется как доступная информация до момента времени  $k$  включительно. Для процесса  $\eta(k)$  предполагаются известными условные моменты распределений:

$$E\{\eta(k+i) | \mathfrak{F}_k\} = \bar{\eta}(k+i | k), \quad (2)$$

$$E\{\eta(k+i)\eta^T(k+j) | \mathfrak{F}_k\} = \Theta_{ij}(k | k), k = 0, 1, 2, \dots; i, j = 0, 1, 2, \dots, d, \quad (3)$$

где  $E\{a|b\}$  – оператор условного математического ожидания  $a$  при условии  $b$ .

На управляющие воздействия накладываются ограничения:

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \quad (4)$$

где  $S(k) \in \mathbb{R}^{p \times n_u}$ ;  $u_{\min}(k), u_{\max}(k) \in \mathbb{R}^p$ .

Для управления системой (1) при ограничениях (4) используем методологию управления с прогнозирующей моделью. На каждом шаге  $k$  минимизируем обобщенный критерий со скользящим горизонтом управления:

$$\begin{aligned} J(k+m | k) = & \sum_{i=1}^m E\{x^T(k+i | k)R_1(k+i)x(k+i | k) | x(k), \mathfrak{F}_k\} - \\ & - \sum_{i=1}^m E\{x^T(k+i | k) | x(k), \mathfrak{F}_k\} R_2(k+i) E\{x(k+i | k) | x(k), \mathfrak{F}_k\} - \end{aligned} \quad (5)$$

$$-\sum_{i=1}^m R_3(k+i)E\{x(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\{u^T(k+i|k)R(k+i)u(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\}$$

по последовательности прогнозирующих управлений  $u(k|k), \dots, u(k+m-1|k)$ , зависящих от состояния системы  $x(k)$  и  $\mathfrak{F}_k$ , где  $R_1(k+i) \geq 0$ ,  $R_2(k+i) \geq 0$ ,  $R(k+i-1) > 0$  – симметричные весовые матрицы,  $R_3(k+i)$  – весовой вектор,  $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ ;  $x(k+i|k)$  обозначает состояние системы в момент времени  $k+i$  при известном  $x(k)$ , описываемое уравнением (1). В качестве управления в момент времени  $k$  берем  $u(k)=u(k|k)$ . Тем самым получаем управление  $u(k)$  как функцию  $\mathfrak{F}_k$  и  $x(k)$ , т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление  $u(k+1)$  на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента  $k+1$  и т.д.

Изменяя весовые матрицы  $R_1(k+i)$ ,  $R_2(k+i)$  и  $R_3(k+i)$  в критерии (5), можно получить различные критерии управления.

**Задача 1.** Полагая  $R_2(k+i)=0$  ( $i=\overline{1,m}$ ), имеем задачу управления по квадратичному критерию:

$$J(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E\{x^T(k+i|k)R_1(k+i)x(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\} - \quad (6)$$

$$-\sum_{i=1}^m R_3(k+i)E\{x(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\{u^T(k+i|k)R(k+i)u(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\}.$$

При  $R_3(k+i)=0$  имеем классический квадратичный критерий.

**Задача 2.** Пусть скалярный выход системы (1)

$$y(k)=c(k)x(k),$$

где  $c(k)$  – вектор-строка соответствующей размерности. Полагая

$$R_1(k+i)=R_2(k+i)=\rho_1(k+i)c^T(k+i)c(k+i), R_3(k+i)=\rho_2(k+i)c(k+i), i=\overline{1,m},$$

где  $\rho_1(k+i) \geq 0$ ,  $\rho_2(k+i) \geq 0$  – скалярные величины, имеем задачу управления по многопериодному критерию «mean-variance»:

$$J(k+m|k) = \sum_{i=1}^m \rho_1(k+i)E\left\{\left(y(k+i|k) - E\{y(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\}\right)^2 | x(k), \mathfrak{F}_k\right\} - \quad (7)$$

$$-\sum_{i=1}^m \rho_2(k+i)E\{y(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\{u^T(k+i|k)R(k+i)u(k+i|k)|x(k), \mathfrak{F}_k\}.$$

В диссертации сформулирована и доказана теорема 1.1 об оптимальных стратегиях. Синтез стратегий управления сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования, каждую из которых можно решить эффективными численными методами оптимизации.

**В параграфе 1.2** предложен метод прогнозирующего управления по обобщенному критерию для класса нелинейных систем с сериально коррелированными параметрами при ограничениях, где нелинейное слагаемое зависит от векторов состояний, управлений и последовательности независимых случайных шумов и описывается своими статистическими характеристиками.

Пусть объект управления описывается уравнением:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k) + f(x(k), u(k), w(k+1)), \quad (8)$$

где  $x(k)$  –  $n_x$ -мерный вектор состояния,  $u(k)$  –  $n_u$ -мерный вектор управления,  $w(k)$  – вектор белых шумов размерности  $n_w$ ,  $\eta(k)$  – последовательность  $q$ -мерных сериально коррелированных случайных векторов, для которых известны условные моменты распределений (2)–(3); элементы матрицы  $B[\eta(k), k]$  зависят от  $\eta(k)$  линейно.

Характер нелинейной зависимости в функции  $f$  таков, что для любых  $x(k)$  справедливы соотношения:

$$E \{ f(x(k), u(k), w(k+1)) | x(k) \} = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E \{ f(x(k), u(k), w(k+1)) f^T(x(k), u(k), w(k+1)) | x(k) \} = \\ = T_0(k) + \sum_{i=1}^r T_i(k) \left( x^T(k) W_i(k) x(k) + u^T(k) M_i(k) u(k) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $T_0(k)$ ,  $T_j(k)$ ,  $W_j(k)$ ,  $M_j(k)$  ( $j = \overline{1, r}$ ) – неотрицательно определенные симметричные матрицы. В дальнейшем не будем указывать явную зависимость матриц  $T_0$ ,  $T_j$ ,  $W_j$ ,  $M_j$  от времени.

Рассматриваемый класс нелинейных систем вида (8), в которых нелинейное слагаемое удовлетворяет условиям (9)–(10), является достаточно общим и включает в себя значительное число специальных форм нелинейных систем, которые могут оказаться полезными моделями при решении практических задач. Примеры таких системы приведены в главе 1 диссертации.

На управляющие воздействия наложены ограничения вида (4). На каждом шаге  $k$  минимизируем обобщенный критерий со скользящим горизонтом управления (5). Представим критерий (5) в следующем виде:

$$J(k+m|k) = J^{(1)}(k+m|k) - J^{(2)}(k+m|k),$$

где

$$\begin{aligned} J^{(1)}(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \{ x^T(k+i|k) R_1(k+i) x(k+i|k) - R_3(k+i) x(k+i|k) + \\ + u^T(k+i-1|k) R(k+i-1) u(k+i-1|k) | x(k), \mathfrak{F}_k \}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$J^{(2)}(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \{ x^T(k+i|k) | x(k), \mathfrak{F}_k \} R_2(k+i) E \{ x(k+i|k) | x(k), \mathfrak{F}_k \}. \quad (12)$$

**Лемма 1.1.** Выражение (11) может быть представлено в виде:

$$J^{(1)}(k+m|k) = C^{(1)}[x(k), k] + [2x^T(k)G^{(1)}(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H^{(1)}(k)U(k),$$

где

$$C^{(1)}[x(k), k] = x^T(k)A^T[Q(m) - R_1(k)]Ax(k) - Q_2(m-1)Ax(k) + \sum_{i=1}^m tr \{ Q(i-1)T_0 \},$$

$H^{(1)}(k) = [H_{ff}^{(1)}(k)]$ ,  $G^{(1)}(k) = [G_t^{(1)}(k)]$ ,  $F(k) = [F_t(k)]$  ( $t, f = \overline{1, m}$ ) – блочные матрицы, блоки которых удовлетворяют уравнениям:

$$H_{tt}^{(1)}(k) = E \left\{ B^T [\eta(k+t), k+t] Q(m-t) B [\eta(k+t), k+t] | \mathfrak{F}_k \right\} + \\ + \sum_{j=1}^r \text{tr} \left\{ Q(m-t) T_j \right\} M_j + R(k+t-1), \quad (13)$$

$$H_{tf}^{(1)}(k) = E \left\{ B^T [\eta(k+t), k+t] \left( A^T \right)^{f-t} Q(m-f) B [\eta(k+f), k+f] | \mathfrak{F}_k \right\}, t < f, \quad (14)$$

$$H_{tf}^{(1)}(k) = \left( H_{ft}^{(1)}(k) \right)^T, t > f, \quad (15)$$

$$G_t^{(1)}(k) = \left( A^t \right)^T Q(m-t) \bar{B}(k+t), \quad (16)$$

$$F_t(k) = Q_3(m-t) \bar{B}(k+t), t, f = \overline{1, m}, \quad (17)$$

где

$$Q(t) = A^T Q(t-1) A + \sum_{j=1}^r \text{tr} \left\{ Q(t-1) T_j \right\} W_j + R_1(k+m-t), Q(0) = R_1(k+m),$$

$$Q_3(t) = Q_3(t-1) A + R_3(k+m-t), Q_3(0) = R_3(k+m).$$

**Лемма 1.2.** Выражение (12) может быть представлено в виде:

$$J^{(2)}(k+m|k) = C^{(2)}[x(k), k] + 2x^T(k)G^{(2)}(k)U(k) + U^T(k)H^{(2)}(k)U(k),$$

где

$$C^{(2)}[x(k), k] = x^T(k)A^T Q_2(m-1)Ax(k),$$

$H^{(2)}(k) = [H_{tf}^{(2)}(k)], G^{(2)}(k) = [G_t^{(2)}(k)] \quad (t, f = \overline{1, m})$  – блочные матрицы, блоки которых удовлетворяют уравнениям:

$$H_{tt}^{(2)}(k) = \bar{B}^T(k+t)Q_2(m-t)\bar{B}(k+t), \quad (18)$$

$$H_{tf}^{(2)}(k) = \bar{B}^T(k+t)A^{f-t}Q_2(m-f)\bar{B}(k+f), t < f, \quad (19)$$

$$H_{tf}^{(2)}(k) = \left( H_{ft}^{(2)}(k) \right)^T, t > f, \quad (20)$$

$$G_t^{(2)}(k) = A^t Q_2(m-t) \bar{B}(k+t), t = \overline{1, m}, \quad (21)$$

$$Q_2(t) = R_2(k+m-t) + A^T Q_2(t-1)A, t = \overline{1, m}, Q_2(0) = R_2(k+m).$$

**Теорема 1.3.** Стратегия прогнозирующего управления системой (8) со скользящим горизонтом  $m$ , минимизирующая критерий (5) при ограничениях (4), на каждом шаге  $k$  определяется уравнением:

$$u(k) = \begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \dots & 0_{n_u} \end{bmatrix} U(k),$$

где  $I_{n_u}$  – единичная матрица размерности  $n_u$ ,  $0_{n_u}$  – квадратная нулевая матрица размерности  $n_u$ ;  $U(k) = [u^T(k|k), \dots, u^T(k+m-1|k)]^T$  – последовательность прогнозирующих управлений, которая определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Z(k+m|k) = \begin{bmatrix} 2x^T(k)G(k) - F(k) \end{bmatrix} U(k) + U^T(k)H(k)U(k), \quad (22)$$

при ограничениях:

$$U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k), \quad (23)$$

где  $G(k) = G^{(1)}(k) - G^{(2)}(k)$ ,  $H(k) = H^{(1)}(k) - H^{(2)}(k)$ , блоки матриц  $G^{(1)}(k)$ ,  $G^{(2)}(k)$  определяются уравнениями (16), (21) соответственно, блоки матриц  $H^{(1)}(k)$ ,  $H^{(2)}(k)$  определяются уравнениями (13)–(15), (18)–(20) соответственно, блоки матрицы  $F(k)$  определяются уравнением (17),  $\bar{S}(k) = \text{diag}\{S(k), \dots, S(k+m-1)\}$ ,

$$U_{\min}(k) = [u_{\min}^T(k), \dots, u_{\min}^T(k+m-1)]^T, U_{\max}(k) = [u_{\max}^T(k), \dots, u_{\max}^T(k+m-1)]^T.$$

**Замечание.** (Существование и единственность решения). Условия  $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$  и  $R(k+i) > 0$  гарантируют, что критерий (22) также выпуклый, так как данный критерий получен посредством выпуклого преобразования критерия (5). Следовательно, решение задачи квадратичного программирования с критерием (22) существует и единственное, если ограничения (23) совместны.

**Во второй главе** диссертации рассматривается задача прогнозирующего управления дискретными нелинейными стохастическими системами с марковским переключением режимов. Получены уравнения синтеза стратегий управления с учетом ограничений на управляющие воздействия по обобщенному критерию. Приведены условия существования и единственности решения. Произведено обобщение для случай многокомпонентной системы, состоящей из подсистем, зависящих от взаимосвязанных цепей Маркова. Рассмотрены случаи наблюдаемой и скрытой цепи Маркова.

**В параграфе 2.1** решена задача управления с прогнозированием для дискретных систем с марковскими скачками в матрице динамики и управления и мультипликативными шумами, зависящими от состояний и управлений.

Пусть объект управления описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \left[ A_0[\theta(k+1), k+1] + \sum_{j=1}^n A_j[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1) \right] x(k) + \\ & + \left[ B_0[\theta(k+1), k+1] + \sum_{j=1}^n B_j[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1) \right] u(k), \end{aligned} \quad (24)$$

$$A_j[\theta(k+1), k+1] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1) A_j^{(i)}(k+1), A_j^{(i)}(k+1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (25)$$

$$B_j[\theta(k+1), k+1] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1) B_j^{(i)}(k+1), B_j^{(i)}(k+1) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}, \quad (26)$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – вектор состояния,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – вектор управления,  $w_j(k)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) – независимые белые шумы;  $\theta_i(k+1)$  ( $i=1, \dots, v$ ) – компоненты вектора  $\theta(k+1)$ ,  $\theta(k) = [\delta(\alpha(k), 1), \dots, \delta(\alpha(k), v)]^T$ ,  $\delta(\alpha(k), j)$  – функция Кронекера;  $\alpha(k)$  – однородная дискретная цепь Маркова, принимающая значения из конечного множества  $\{1, 2, \dots, v\}$ , с известной матрицей переходных вероятностей  $P = [P_{ij}]$ .

Предполагается, что состояние цепи в момент времени  $k$  доступно наблюдению. Последовательности  $\theta(k)$  и  $w_j(k)$  независимы.

На управляющие воздействия накладываются ограничения вида (4).

Вектор  $\theta(k)$  допускает представление в пространстве состояний:

$$\theta(k+1) = P\theta(k) + v(k+1), \quad (27)$$

где  $\{v(k)\}$  – последовательность мартингал-разностей.

Для управления системой (24)–(26) на каждом шаге  $k$  минимизируем обобщенный критерий со скользящим горизонтом управления:

$$\begin{aligned} J(k+m|k) = & \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i|k) R_1(k+i) x(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\} - \\ & - \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\} R_2(k+i) E \left\{ x(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\} - \\ & - \sum_{i=1}^m R_3(k+i) E \left\{ x(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\} + \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ u^T(k+i|k) R(k+i) u(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

по последовательности прогнозирующих управлений  $u(k|k), \dots, u(k+m-1|k)$ , зависящих от состояний  $x(k)$  и  $\theta(k)$  в момент времени  $k$ ; где  $x(k+i|k)$  обозначает состояние системы в момент времени  $k+i$  при известном  $x(k)$ , описываемое уравнениями (24)–(26);  $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ . Изменяя коэффициенты  $R_1(k+i)$ ,  $R_2(k+i)$  и  $R_3(k+i)$ , можно получить различные критерии управления системой (24)–(26). Для решения задачи использована методология управления с прогнозирующей моделью. Доказана теорема 2.1 об оптимальных стратегиях.

**В параграфе 2.2** рассматривается задача управления с прогнозирующей моделью для класса дискретных нелинейных систем со скачкообразно меняющимися параметрами. Предполагается, что в динамике системы нелинейное слагаемое зависит от состояния, управления и последовательности независимых шумов, и описывается статистическими характеристиками. Приведено обобщение результатов на случай, когда нелинейное слагаемое зависит от управляющих переменных и состояния цепи Маркова с запаздыванием.

Пусть объект управления описывается уравнением:

$$\begin{aligned} x(k+1) = & A[\theta(k+1), k+1]x(k) + B[\theta(k+1), k+1]u(k) + \\ & + f(x(k), u(k), w(k+1), \theta(k+1)), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  – вектор белых шумов. Функция  $f(x(k), u(k), w(k+1), \theta(k+1))$  может принимать одно из значений –  $f^{(i)}(x(k), u(k), w(k+1)) \in \mathbb{R}^{n_x}$  ( $i = \overline{1, \nu}$ ). Характер нелинейной зависимости в функции  $f^{(i)}$  таков, что:

$$\begin{aligned} E \left\{ f^{(i)}(x(k), u(k), w(k+1)) \mid x(k) \right\} &= 0, \\ E \left\{ f^{(i)}(x(k), u(k), w(k+1)) \left[ f^{(i)}(x(k), u(k), w(k+1)) \right]^T \mid x(k) \right\} &= T_0^{(i)} + \\ &+ \sum_{j=1}^r T_j^{(i)} \left( x^T(k) W_j^{(i)} x(k) + u^T(k) M_j^{(i)} u(k) \right), \end{aligned}$$

где  $T_0^{(i)}$ ,  $T_j^{(i)}$ ,  $W_j^{(i)}$ ,  $M_j^{(i)}$  ( $j = \overline{1, r}$ ,  $i = \overline{1, \nu}$ ) – неотрицательно определенные симметричные матрицы.

На управляющие воздействия наложены ограничения вида (4).

На каждом шаге  $k$  минимизируем обобщенный критерий со скользящим горизонтом управления вида (28), который может быть представлен в виде:

$$J(k+m|k) = J^{(1)}(k+m|k) - J^{(2)}(k+m|k),$$

где

$$J^{(1)}(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i|k) R_1(k+i) x(k+i|k) - R_3(k+i) x(k+i|k) + \right. \\ \left. + u^T(k+i-1|k) R(k+i-1) u(k+i-1|k) \mid x(k), \theta(k) \right\}, \quad (30)$$

$$J^{(2)}(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\} R_2(k+i) E \left\{ x(k+i|k) \mid x(k), \theta(k) \right\}. \quad (31)$$

**Лемма 2.3.** Выражение (30) может быть представлено в виде:

$$J^{(1)}(k+m|k) = C^{(1)}[x(k), k] + [2x^T(k)G^{(1)}(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H^{(1)}(k)U(k),$$

где

$$C^{(1)}[x(k), k] = \sum_{t=1}^m \sum_{i_t=1}^v \text{tr} \left\{ Q^{(i_t)}(k) T_0^{(i_t)} \right\} + x^T(k) \sum_{i_1=1}^v \left[ \left( A^{(i_1)}(k+1) \right)^T Q^{(i_1)}(k) A^{(i_1)}(k+1) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^r \text{tr} \left\{ Q^{(i_1)}(k) T_j^{(i_1)} \right\} W_j^{(i_1)} \right] x(k) - \sum_{i_1=1}^v Q_2^{(i_1)}(k) A^{(i_1)}(k+1) x(k),$$

блоки матриц  $H^{(1)}(k), G^{(1)}(k), F(k)$  удовлетворяют уравнениям:

$$H_{tt}^{(1)}(k) = R(k+t-1) + \sum_{i_t=1}^v \left\{ \left( B^{(i_t)}(k+t) \right)^T Q^{(i_t)}(k) B^{(i_t)}(k+t) + \sum_{j=1}^r \text{tr} \left\{ Q^{(i_t)}(k) T_j^{(i_t)} \right\} M_j^{(i_t)} \right\}, \\ H_{ts}^{(1)}(k) = \sum_{i_s=1}^v \dots \sum_{i_{t+1}=1}^v \sum_{i_t=1}^v \left( B^{(i_t)}(k+t) \right)^T \left( A^{(i_{t+1})}(k+t+1) \right)^T \times \\ \times \dots \times \left( A^{(i_s)}(k+s) \right)^T Q^{(i_t, \dots, i_s)}(k) B^{(i_s)}(k+s), s > t, \quad H_{ts}^{(1)}(k) = (H_{st}^{(1)})^T, s < t, \\ G_t^{(1)}(k) = \sum_{i_t=1}^v \dots \sum_{i_1=1}^v \left( A^{(i_1)}(k+1) \right)^T \dots \left( A^{(i_t)}(k+t) \right)^T Q^{(i_1, \dots, i_t)}(k) B^{(i_t)}(k+t), t = \overline{1, m}, \\ F_t(k) = \sum_{i_t=1}^v Q_2^{(i_t)}(k) B^{(i_t)}(k+t), t = \overline{1, m}.$$

Последовательность матриц  $Q^{(i_t)}(k), Q^{(i_t, \dots, i_s)}(k)$  ( $s, t = \overline{1, m}$ ) определяется рекуррентными уравнениями:

$$Q^{(i_t)}(k) = e_{i_t} P^t \theta(k) R_1(k+t) + \sum_{i_{t+1}=1}^v \left( A^{(i_{t+1})}(k+t+1) \right)^T Q^{(i_t, i_{t+1})}(k) A^{(i_{t+1})}(k+t+1) + \\ + \sum_{i_{t+1}=1}^v \sum_{j=1}^r \text{tr} \left\{ Q^{(i_t, i_{t+1})}(k) T_j^{(i_{t+1})} \right\} W_j^{(i_{t+1})}, t = \overline{1, m-1}, \\ Q^{(i_t, \dots, i_s)}(k) = \Theta^{(i_t, \dots, i_s)}(k) R_1(k+s) + \sum_{i_{s+1}=1}^v \left( A^{(i_{s+1})}(k+s+1) \right)^T Q^{(i_t, \dots, i_{s+1})}(k) A^{(i_{s+1})}(k+s+1) + \\ + \sum_{i_{s+1}=1}^v \sum_{j=1}^r \text{tr} \left\{ Q^{(i_t, \dots, i_{s+1})}(k) T_j^{(i_{s+1})} \right\} W_j^{(i_{s+1})}, t = \overline{1, m-2}, t < s < m,$$

с граничными условиями:

$$Q^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_1(k+m), \quad Q^{(i_t, \dots, i_m)}(k) = \Theta_{i_t, \dots, i_m} R_1(k+m), t = \overline{1, m-1},$$

где

$$\Theta_{i_t, \dots, i_s}(k) = P_{i_s, i_{s-1}} P_{i_{s-1}, i_{s-2}} \dots P_{i_{t+1}, i_t} \theta_{i_t}(k+t | k), t = \overline{1, m-1}, s > t,$$

$\theta_{i_t}(k+t | k)$  – компонента вектора прогноза состояния цепи Маркова

$$\theta(k+t | k) = E \{ \theta(k+t) | \theta(k) \} = P^t \theta(k), \quad e_{i_t} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]_{1 \times v}, i_t = \overline{1, v}, t = \overline{1, m}.$$

Последовательность матриц  $Q_2^{(i_t)}(k)$  определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} Q_2^{(i_t)}(k) &= e_{i_t} P^t \theta(k) R_3(k+t) + \sum_{i_{t+1}=1}^v Q_2^{(i_t, i_{t+1})}(k) A^{(i_{t+1})}(k+t+1), t = \overline{1, m-1}, \\ Q_2^{(i_t, \dots, i_s)}(k) &= \Theta_{(i_t, \dots, i_s)}(k) R_3(k+s) + \\ &+ \sum_{i_{s+1}=1}^v Q_2^{(i_t, \dots, i_{s+1})}(k) A^{(i_{s+1})}(k+s+1), t = \overline{1, m-2}, t < s < m, \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$Q_2^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_2(k+m), \quad Q_2^{(i_t, \dots, i_m)}(k) = \Theta_{(i_t, \dots, i_m)}(k) R_2(k+m), \quad t = \overline{1, m-1}.$$

**Лемма 2.4.** Выражение (31) может быть представлено в виде:

$$J^{(2)}(k+m | k) = C^{(2)}[x(k), k] + 2x^T(k)G^{(2)}(k)U(k) + U^T(k)H^{(2)}(k)U(k),$$

где

$$\begin{aligned} C^{(2)}[x(k), k] &= x^T(k) \Psi^T(k) \Delta(k+1) \Psi(k) x(k), \quad \Delta(k+1) = \text{diag} \{ R_2(k+1), \dots, R_2(k+m) \}, \\ G^{(2)}(k) &= \Psi^T(k) \Delta(k+1) \Phi(k), \quad H^{(2)}(k) = \Phi^T(k) \Delta(k+1) \Phi(k), \end{aligned}$$

блоки матриц  $\Phi(k), \Psi(k)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt}(k) &= \sum_{i_t=1}^v B^{(i_t)}(k+t) \Theta^{(i_t)}(k), t = \overline{1, m}, \quad \Phi_{st}(k) = 0, s < t, \\ \Phi_{st}(k) &= \sum_{i_t=1}^v \sum_{i_{t+1}=1}^v \dots \sum_{i_s=1}^v A^{(i_s)}(k+s) \dots A^{(i_{t+1})}(k+t+1) B^{(i_t)}(k+t) \Theta^{(i_t, \dots, i_s)}(k), s > t, \\ \Psi_t(k) &= \sum_{i_1=1}^v \sum_{i_2=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v A^{(i_t)}(k+t) \dots A^{(i_1)}(k+1) \Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k), t = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

На основе лемм 2.1 и 2.2 доказана теорема о том, что задача минимизации критерия (28) при ограничениях (4) на траекториях системы (29) сводится к задаче выпуклого квадратичного программирования.

**В параграфе 2.3** произведено обобщение результатов для случай многокомпонентной системы, состоящей из подсистем, зависящих от взаимосвязанных цепей Маркова. Пусть система состоит из совокупности подсистем, состояния которых описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} x^{(q)}(k+1) &= A^{(q)}[x^{(q)}(k+1), k+1] x^{(q)}(k) + B_0^{(q)}[x^{(q)}(k+1), k+1] u^{(q)}(k) + \\ &+ \sum_{j=1}^n B_j^{(q)}[x^{(q)}(k+1), k+1] w_j^{(q)}(k+1) u^{(q)}(k), q = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $x^{(q)}(k)$  –  $n_x^{(q)}$ -мерный вектор состояния  $q$ -й подсистемой,  $u^{(q)}(k)$  –  $n_u^{(q)}$ -мерный вектор управления  $q$ -й подсистемой;  $w_j^{(q)}(k)$  – последовательность белых шумов;  $\alpha^{(q)}(k)$  – однородная цепь Маркова с конечным множеством состояний  $\{1, 2, \dots, v_q\}$ . Таким образом, каждая из подсистем может находиться в  $v_q$  состояниях, определяемых скалярным случайным процессом с дискретным множеством значений. Предполагается, что состояние цепей в момент времени  $k$  доступно наблюдению.

Между подсистемами существует взаимосвязь: состояние цепи  $\alpha^{(q)}(k)$   $q$ -й подсистемы в  $k$ -й момент времени зависит от состояний цепей  $\alpha^{(r)}(k-1)$  ( $q, r=1, 2, \dots, s$ ) в момент времени  $k-1$ . Таким образом, динамика системы в целом зависит от векторного случайного процесса  $\alpha(k)=[\alpha^{(1)}(k), \alpha^{(2)}(k), \dots, \alpha^{(s)}(k)]^T$  с конечным множеством состояний  $\{q, j_q\}$  ( $q=1, 2, \dots, s; j_q=1, 2, \dots, v_q$ ).

Для векторной цепи вероятности перехода определяются в виде:

$$P_{i_1, \dots, i_s; j_1, \dots, j_s} = P\{\alpha_1(k+1) = j_1, \dots, \alpha_s(k+1) = j_s | \alpha_1(k) = i_1, \dots, \alpha_s(k) = i_s\},$$

$$\sum_{j_1, \dots, j_s} P_{i_1, \dots, i_s; j_1, \dots, j_s} = 1.$$

На управляющие воздействия каждой из подсистем накладываются ограничения:

$$u_{\min}^{(q)}(k) \leq S^{(q)}(k)u^{(q)}(k) \leq u_{\max}^{(q)}(k), \quad q = \overline{1, s}. \quad (33)$$

В диссертации сформулирована и доказана теорема 2.4 об оптимальных стратегиях управления системой, состоящей из подсистем вида (32), при ограничениях (33) по обобщенному критерию со скользящим горизонтом управления:

$$J(k+m|k) = \sum_{q=1}^s \sum_{i=1}^m E \left\{ \left( x^{(q)}(k+i|k) \right)^T R_1^{(q)}(k+i) x^{(q)}(k+i|k) \middle| x^{(q)}(k), \alpha(k) \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^m E \left\{ \left( x^{(q)}(k+i|k) \right)^T \middle| x^{(q)}(k), \alpha(k) \right\} R_2^{(q)}(k+i) E \left\{ x^{(q)}(k+i|k) \middle| x^{(q)}(k), \alpha(k) \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^m R_3^{(q)}(k+i) E \left\{ x^{(q)}(k+i|k) \middle| x^{(q)}(k), \alpha(k) \right\} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ \left( u^{(q)}(k+i|k) \right)^T R^{(q)}(k+i) u^{(q)}(k+i|k) \middle| x^{(q)}(k), \alpha(k) \right\},$$

где  $u^{(q)}(k+l|k)$  ( $l = \overline{0, m-1}$ ) – последовательность прогнозирующих управлений  $q$ -й подсистемой,  $u^{(q)}(k) = u^{(q)}(k|k)$ ;  $R_1^{(q)}(k+i) \geq 0$ ,  $R_2^{(q)}(k+i) \geq 0$ ,  $R^{(q)}(k+i) > 0$  – весовые матрицы,  $R_1^{(q)}(k+i) \geq R_2^{(q)}(k+i)$ ;  $R_3^{(q)}(k+i)$  – весовой вектор.

**В параграфе 2.4** рассматривается задача синтеза стратегий управления с прогнозированием для дискретных систем с марковскими скачками и сериально коррелированными параметрами, для которых известны только первые и вторые моменты распределений. Получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления по обобщенному критерию при ограничениях.

Во многих практических задачах процесс Маркова является скрытым. **В**

**параграфе 2.5** показано, как обобщить стратегии управления, предложенные в параграфах 2.1–2.4, на случай ненаблюдаемой цепи Маркова, используя алгоритмы оценки моделей со скрытыми марковскими переключениями.

**Третья глава** посвящена управлению классом билинейных стохастических систем с марковскими скачками в матрицах системы и входов и мультипликативным шумом, описываемым различными многомерными регрессионными моделями с марковским переключением режимов.

**В параграфе 3.1** система представлена в виде двух подсистем, одна из которых включает билинейное слагаемое по переменной состояния второй системы и входу, а вторая подсистема описывается векторной авторегрессионной моделью порядка  $p$  без свободного члена с параметрами, зависящими от состояния цепи Маркова MSAH VAR( $p$ ) (Markov Switching Autoregression/Heteroscedasticity), представленной в виде процесса первого порядка MSAH VAR(1) посредством матричных обозначений, а именно:

$$x(k+1) = A[\theta(k+1)]x(k) + B[\theta(k+1), y(k+1)]u(k) + D[\theta(k+1)]u(k), \quad (34)$$

$$Y(k+1) = \gamma[\theta(k+1)]Y(k) + \sigma[\theta(k+1)]W(k+1), \quad (35)$$

где

$$Y(k) = [y^T(k), y^T(k-1), \dots, y^T(k-p+1)]^T_{n_y p \times 1}, y(k) \in \mathbb{R}^{n_y},$$

$$W(k) = [w^T(k), 0, 0, \dots, 0]^T_{n_y p \times 1}, w(k) \in \mathbb{R}^{n_y},$$

$$A[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1)A^{(i)}, A^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, D[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1)D^{(i)}, D^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u},$$

$$\sigma[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1)\sigma^{(i)}, \sigma^{(i)} = \text{diag}\{\varphi^{(i)}, 0, \dots, 0\}_{n_y p \times n_y p}, \varphi^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y},$$

$$\gamma[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1)\gamma^{(i)}, \gamma^{(i)} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(i)} & \gamma_2^{(i)} & \dots & \gamma_{p-1}^{(i)} & \gamma_p^{(i)} \\ I_{n_y} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_y} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix}_{n_y p \times n_y p}, \gamma_j^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y},$$

$$B[\theta(k+1), Y(k+1)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k+1) \left( B^{(i)}[\gamma^{(i)}Y(k)] + B^{(i)}[\sigma^{(i)}W(k+1)] \right),$$

$w(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  – вектор белых шумов; матрица  $B[\theta(k+1), Y(k+1)]$  зависит от  $Y(k+1)$  линейно;  $\theta(k) = [\delta(\alpha(k), 1), \dots, \delta(\alpha(k), v)]^T$ ,  $\alpha(k)$  – цепь Маркова, принимающая значения из множества  $\{1, 2, \dots, v\}$ , с матрицей переходных вероятностей  $P = [P_{ij}]$ .

Состояние цепи в момент времени  $k$  доступно наблюдению.

Для управления системой (34)–(35) при ограничениях (4) на каждом шаге минимизируем обобщенный критерий со скользящим горизонтом управления:

$$\begin{aligned}
J(k+m|k) = & \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i|k) R_1(k+i) x(k+i|k) \middle| x(k), Y(k), \theta(k) \right\} - \\
& - \sum_{i=1}^m E \left\{ x^T(k+i|k) \middle| x(k), Y(k), \theta(k) \right\} R_2(k+i) E \left\{ x(k+i|k) \middle| x(k), Y(k), \theta(k) \right\} - \\
& - \sum_{i=1}^m R_3(k+i) E \left\{ x(k+i|k) \middle| x(k), Y(k), \theta(k) \right\} + \\
& + \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ u^T(k+i|k) R(k+i) u(k+i|k) \middle| x(k), Y(k), \theta(k) \right\}
\end{aligned} \quad (36)$$

по последовательности прогнозирующих управлений  $u(k|k), \dots, u(k+m-1|k)$ . В диссертации сформулированы и доказана теорема 3.1 об оптимальных стратегиях прогнозирующего управления. Показано, что задача минимизации критерия (36) сводится к задаче квадратичного программирования, которая может быть решена эффективными численными методами.

**В параграфе 3.2** мультипликативный шум описывается векторной авторегрессионной моделью со свободным членом MSIAH VAR( $p$ ) (Markov Switching Intercept/Autoregression/Heteroscedasticity).

**В параграфе 3.3** рассматривается класс дискретных стохастических систем с марковскими скачками, динамика которых зависит от случайного процесса, описываемого уравнением множественной регрессии с экзогенными факторами и параметрами, зависящими от состояния цепи Маркова. Динамика экзогенных факторов описывается векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов порядка  $p$  MSAH VAR( $p$ ).

Объект управления описывается уравнениями:

$$x(k+1) = A[\theta(k+1)]x(k) + B[\theta(k+1), \eta(k+1)]u(k),$$

$$\eta(k+1) = \beta_1[\theta(k+1)]y(k) + \dots + \beta_p[\theta(k+1)]y(k-p+1) + \lambda[\theta(k+1)]\omega(k+1), \quad (37)$$

$$y(k+1) = \gamma_1[\theta(k+1)]y(k) + \dots + \gamma_p[\theta(k+1)]y(k-p+1) + \phi[\theta(k+1)]w(k+1), \quad (38)$$

где  $\eta(k) \in \mathbb{R}^{n_\eta}$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  – векторы случайных параметров с динамикой (37)–(38),  $\omega(k) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ ,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  – векторы белых шумов; матрица  $B[\theta(k), \eta(k)]$  зависит от  $\eta(k)$  линейно. В диссертации доказана теорема 3.2 об оптимальных стратегиях управления, приведены условия существования и единственности решения.

В параграфах 3.1–3.3 предполагается, что состояние цепи Маркова доступно прямому наблюдению в момент времени  $k$ . Однако, во многих практических задачах процесс Маркова является скрытым. **В параграфе 3.4** показано, как синтезировать стратегии управления для рассматриваемого класса билинейных систем в условиях скрытой цепи Маркова.

**В четвертой главе** результаты, полученные в главах 1–3, применяются к решению новых актуальных задач управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с коррелированными доходностями и на рынке с переключением режимов при ограничениях на объемы торговых операций.

Рассмотрены два подхода к управлению ИП: а) слежение за эталонным портфелем по квадратичному критерию; б) управление по критерию «mean-variance». Приведены результаты численного моделирования. Инвестиционные портфели формировались из наборов наиболее ликвидных акций, торгуемых на российской фондовой бирже Moscow Exchange (MOEX) и американской бирже New York Stock Exchange (NYSE).

**В параграфе 4.1** рассматривается задача управления ИП на финансовом рынке с сериально коррелированными доходностями рискованных активов с учетом различных ставок кредитования и заимствования, влияния объемов сделки на цену активов и ограничений на объемы торговых операций.

Рассматривается ИП, состоящий из  $n$  видов рискованных активов (обыкновенных акций) и одного безрискового актива (банковский счет или надежные облигации). Динамика капитала ИП определяется уравнением

$$V(k+1) = [1 + r_1(k+1)]V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r_1(k+1)]u_i(k) - [r_2(k+1) - r_1(k+1)]u_{n+1}(k), \quad (39)$$

где  $u_i(k)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – капитал, помещенный в  $i$ -й рискованный актив;  $u_{n+1}(k) \geq 0$  – объем безрискового займа,  $u_0(k) = V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k)$  – капитал, помещенный в безрисковый актив;  $\eta_i(k+1)$  – ставка доходности рискованных вложений на интервале  $[k, k+1]$ ,  $r_1(k)$  – доходность безрискового актива,  $r_2(k)$  – ставка по займу безрискового актива. Значение  $u_i(k) < 0$  означает участие в операции «продажа без покрытия» на сумму  $|u_i(k)|$ .

Пусть  $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k \geq 1}$  – поток  $\sigma$ -алгебр, где каждая из  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{F}_k$  интерпретируется как доступная инвестору информация (рыночные данные) до момента времени  $k$  включительно. Будем полагать, что доходности рискованных активов  $\eta(k)$  представляют собой последовательность случайных коррелированных величин, для которых известны условные первые и вторые моменты распределений относительно  $\mathfrak{F}_k$  вида (2)–(3).

При управлении портфелем накладываются ограничения на размер вложения в рискованные финансовые активы:

$$u_i^{\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k), \quad (40)$$

на размер займа:

$$0 \leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k), \quad (41)$$

на размер вложения в безрисковый актив:

$$0 \leq V(k) - \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}(k). \quad (42)$$

Если нижняя граница  $u_i^{\min}(k) < 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то для акций  $i$ -го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не более, чем  $|u_i^{\min}(k)|$ ; при  $u_i^{\min}(k) \geq 0$  операции «продажи без покрытия» запрещены;  $u_i^{\max}(k) \geq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в акции  $i$ -

го вида;  $u_0^{\max}(k)$  определяет максимальный объем капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив;  $u_{n+1}^{\max}(k) \geq 0$  определяет максимальный размер займа безрискового актива. Отметим, что величины  $u_i^{\max}(k)$  и  $u_i^{\min}(k)$  ( $i = \overline{0, n+1}$ ) на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив  $u_i^{\min}(k) = \gamma_i' V(k)$ ,  $u_i^{\max}(k) = \gamma_i'' V(k)$ , где  $\gamma_i'$  и  $\gamma_i''$  – постоянные коэффициенты.

При совершении операции большого объема инвестор несет транзакционные издержки, возникающие в результате влияния на рыночную цену актива (market impact costs). Распространённое предположение в литературе состоит в том, что влияние на цену прямо пропорционально объему операции, следовательно, издержки являются квадратичными. Для управления ИП с учетом влияния объема сделки на рыночные цены активов на каждом шаге  $k$  будем минимизировать следующий обобщенный критерий:

$$\begin{aligned} J(k+m|k) = & \sum_{i=1}^m \left[ R_1(k+i) E \{ V^2(k+i|k) | V(k), \mathfrak{F}_k \} - \right. \\ & \left. - R_2(k+i) E \{ V(k+i|k) | V(k), \mathfrak{F}_k \}^2 - R_3(k+i) E \{ V(k+i|k) | V(k), \mathfrak{F}_k \} \right] + \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ [u(k+i|k) - C[\eta(k+i), k+i] u(k+i-1|k)]^T R(k+i) \times \right. \\ & \left. \times [u(k+i|k) - C[\eta(k+i), k+i] u(k+i-1|k)] | V(k), \mathfrak{F}_k \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $V(k+i|k)$  – прогнозное значение капитала ИП согласно уравнению (39),  $u(k+i|k) = [u_1(k+i|k), \dots, u_{n+1}(k+i|k)]^T$  – вектор прогнозирующих управлений,  $u(k-1|k) = u(k-1)$  – оптимальный вектор, полученный на предыдущем шаге;  $u(-1|0) = 0$ ;  $R_1(k+i) \geq 0$ ,  $R_2(k+i) \geq 0$ ,  $R_3(k+i)$  – весовые коэффициенты (скалярные величины);  $R_1(k+i) \geq R_2(k+i)$ ;  $R(k+i) > 0$  – симметричная матрица размерности  $(n+1) \times (n+1)$ , задающая уровень транзакционных издержек;

$$C[\eta(k+i), k+i] = \text{diag} \{ 1 + \eta_1(k+i), 1 + \eta_2(k+i), \dots, 1 + \eta_n(k+i), 0 \}.$$

Третье слагаемое в критерии (43) накладывает «штраф» за большие транзакционные издержки, понесенные в торговой операции на сумму  $|u_j(k+i|k) - [1 + \eta_j(k+i)] u_j(k+i-1|k)|$ .

Изменяя коэффициенты  $R_1(k+i)$ ,  $R_2(k+i)$  и  $R_3(k+i)$ , можно получить различные стратегии управления ИП.

**Стратегия 1.** Необходимо определить стратегию управления портфелем путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с минимально возможными отклонениями следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля с желаемой доходностью  $\mu_0$ , эволюция которого описывается уравнением:

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0] V^0(k), V^0(0) = V(0). \quad (44)$$

Критерий качества управления (функция риска) имеет вид:

$$J(k+m|k) = \sum_{i=1}^m E \left\{ \rho_1(k+i) V^2(k+i|k) - \right. \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ 2V^0(k+i)\rho_1(k+i) + \rho_2(k+i) \right] V(k+i|k) \Big| V(k), \mathfrak{F}_k \Big\} + \\
& + \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ \left[ u(k+i|k) - C[\eta(k+i), k+i] u(k+i-1|k) \right]^T R(k+i) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[ u(k+i|k) - C[\eta(k+i), k+i] u(k+i-1|k) \right] \Big| V(k), \mathfrak{F}_k \right\},
\end{aligned}$$

где  $\rho_1(k+i) \geq 0, \rho_2(k+i) \geq 0$  – весовые коэффициенты (скалярные величины).

Критерий (45) может быть записан в виде (43), положив

$$R_1(k) = \rho_1(k), R_2(k) = 0, R_3(k) = 2\rho_1(k)V^0(k) + \rho_2(k).$$

**Стратегия 2.** В качестве меры риска используем многопериодный «mean-variance» критерий со скользящим горизонтом управления следующего вида:

$$\begin{aligned}
J(k+m|k) = & \sum_{i=1}^m \rho_1(k+i) E \left\{ \left( V(k+i|k) - E \{ V(k+i|k) | V(k), \mathfrak{F}_k \} \right)^2 \Big| V(k), \mathfrak{F}_k \right\} - \quad (46) \\
& - \sum_{i=1}^m \rho_2(k+i) E \{ V(k+i|k) | V(k), \mathfrak{F}_k \} + \\
& + \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ \left[ u(k+i|k) - C[\eta(k+i), k+i] u(k+i-1|k) \right]^T R(k+i) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[ u(k+i|k) - C[\eta(k+i), k+i] u(k+i-1|k) \right] \Big| V(k), \mathfrak{F}_k \right\},
\end{aligned}$$

где  $\rho_1(k+i) \geq 0, \rho_2(k+i) \geq 0$  – весовые коэффициенты (скалярные величины), характеризующие склонность инвестора к риску и задающие соотношение между ожидаемым значением капитала ИП и соответствующим риском (вариацией) в момент времени  $k$ . Критерий (46) может быть записан в виде (43), положив

$$R_1(k) = R_2(k) = \rho_1(k), \quad R_3(k) = \rho_2(k).$$

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (43) по последовательности прогнозирующих управлений  $u(k+i|k)$  ( $i=0,1,\dots,m-1$ ), когда динамика системы (капитал ИП) описывается уравнением (39) при ограничениях (40)–(42). Решение задачи дается теоремой 1.2. В диссертационной работе приведены результаты численного моделирования стратегий управления по квадратичному критерию и «mean-variance» критерию с использованием реальных данных российского и американского фондовых рынков.

**В параграфе 4.2** рассматривается задача управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов с учетом «проскальзывания» цен рискованных активов, влияния объемов сделки на рыночную цену активов и ограничений на объемы вложений и займов. На практике при совершении операций купли-продажи активов инвестор сталкивается с эффектом так называемого ценового «проскальзывания», который проявляется в том, что при исполнении заявки на покупку или продажу актива, сделка может произойти по цене хуже, чем цена в момент выставления заявки. Динамика капитала ИП с учетом «проскальзывания» имеет вид:

$$V(k+1) = [1 + r(k+1)]V(k) + \sum_{i=1}^n [\eta_i(k+1) - r(k+1)]u_i(k) + \quad (47)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \xi_i(k+1) |u_i(k) - [1 + \eta_i(k)] u_i(k-1)|,$$

где третье слагаемое определяет издержки, понесенные вследствие «проскальзывания» цен,  $\xi_i(k+1)$  – случайная величина с характеристиками:

$$E\{\xi_i(k+1)\} = 0, E\{\xi_i^2(k+1)\} = d_{\xi_i}^2, E\{\xi_i(k+1)\xi_j(k+1)\} = 0, i \neq j; i, j = \overline{1, n},$$

определяющая долю «проскальзывания» от объема купли/продажи актива  $i$ -го вида на интервале  $[k, k+1]$  на сумму  $|u_i(k) - [1 + \eta_i(k)] u_i(k-1)|$ .

При управлении ИП учитываются ограничения на объемы вложений в рискованные и безрисковые активы. Предполагается, что доходности рискованных активов описываются уравнениями

$$\eta_i[\theta(k), k] = \mu_i[\theta(k), k] + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}[\theta(k), k] w_j(k), \quad (48)$$

где  $\theta(k) = [\delta(\alpha(k), 1), \dots, \delta(\alpha(k), v)]^T$ ,  $\delta(\alpha(k), j)$  – функция Кронекера;  $\alpha(k)$  – цепь Маркова, принимающая значения из множества  $\{1, 2, \dots, v\}$ , с матрицей переходных вероятностей  $P = [P_{ij}]$ ;  $\mu_i[\theta(k), k]$  – ожидаемая доходность  $i$ -го рискованного вложения;  $\sigma[\theta(k), k] = \{\sigma_{ij}[\theta(k), k]\}_{i,j=1,\dots,n}$  – матрица волатильностей,  $\{w_j(k); k=0, 1, \dots; j=1, \dots, n\}$  – независимые дискретные белые шумы;

$$\mu_i[\theta(k), k] = \mu_i^{(j)}, \sigma[\theta(k), k] = \sigma^{(j)} \text{ при } \alpha(k) = j.$$

Марковская цепь  $\theta(k)$  определяет состояние (режим) рынка, например, рынок в состоянии высокой или низкой волатильности и/или рынок в состоянии восходящего или нисходящего тренда.

С учетом (48) уравнение (47) может быть записано в виде:

$$V(k+1) = A[\theta(k+1), k+1]V(k) + B_0[\theta(k+1), k+1]u(k) + \sum_{j=1}^n B_j[\theta(k+1), k+1]w_j(k+1)u(k) + \xi(k+1)|u(k) - C[\theta(k), k]u(k-1)|, \quad (49)$$

где  $u(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ \dots \ u_n(k)]^T$  – вектор управляющих переменных; обозначение  $|X|$  – вектор, составленный из абсолютных значений компонент вектора  $X$ ;

$$A[\theta(k), k] = 1 + r[\theta(k), k], C[\theta(k), k] = D_0[\theta(k), k] + \sum_{j=1}^n D_j[\theta(k), k]w_j(k),$$

$$B_0[\theta(k), k] = [\mu_1[\theta(k), k] - r[\theta(k), k] \ \dots \ \mu_n[\theta(k), k] - r[\theta(k), k]],$$

$$B_j[\theta(k), k] = [\sigma_{1j}[\theta(k), k] \ \dots \ \sigma_{nj}[\theta(k), k]], \xi(k) = [\xi_1(k), \xi_2(k), \dots, \xi_n(k)],$$

$$D_0[\theta(k), k] = \text{diag}\{1 + \mu_1[\theta(k), k] \ \dots \ 1 + \mu_n[\theta(k), k]\},$$

$$D_j[\theta(k), k] = \text{diag}\{\sigma_{1j}[\theta(k), k] \ \dots \ \sigma_{nj}[\theta(k), k]\}.$$

При управлении ИП учитываются транзакционные издержки, связанные с влиянием объема торговой операции на рыночную цену рискованных активов. Рассматривается следующий критерий:

$$\begin{aligned}
J(k+m|k) = & \sum_{i=1}^m R_1(k+i) E \left\{ V^2(k+i|k) | V(k), \theta(k) \right\} - \\
& - \sum_{i=1}^m R_2(k+i) E \left\{ V(k+i|k) | V(k), \theta(k) \right\}^2 - \sum_{i=1}^m R_3(k+i) E \left\{ V(k+i|k) | V(k), \theta(k) \right\} + \\
& + \sum_{i=0}^{m-1} E \left\{ \left[ u(k+i|k) - C[\theta(k+i), k+i] u(k+i-1|k) \right]^T R(k+i) \times \right. \\
& \times \left. \left[ u(k+i|k) - C[\theta(k+i), k+i] u(k+i-1|k) \right] | V(k), \theta(k) \right\},
\end{aligned} \tag{50}$$

где  $V(k+i|k)$  – прогнозное значение капитала ИП согласно уравнению динамики (49),  $u(k+i|k)$  – вектор прогнозирующих управлений;  $u(k-1|k)=u(k-1)$  – оптимальный вектор, полученный на предыдущем шаге;  $u(-1|0)=0$ ;  $R_1(k+i) \geq R_2(k+i) \geq 0$ ,  $R_3(k+i)$  – весовые коэффициенты (скалярные величины);  $R(k+i) > 0$  – симметричная матрица размерности  $n \times n$ , задающая уровень транзакционных издержек;  $C[\theta(k+i), k+i] = \text{diag} \{1 + \eta_1[\theta(k+i), k+i], \dots, 1 + \eta_n[\theta(k+i), k+i]\}$ .

Для синтеза стратегий управления ИП с динамикой (49) по критерию (50) при ограничениях использовались результаты, полученные в параграфе 2.2.

Проведено численное моделирование с использованием реальных данных российского и американского фондовых рынков в условиях наблюдаемой и скрытой цепи Маркова. Для моделирования рассматривались ИП, состоящие из нескольких рискованных активов и одного безрискового актива. Под сменой режимов рынка понимался переход из состояния с низкой в состояние с высокой волатильностью, и наоборот. Смена режимов рынка описывалась марковской цепью с двумя состояниями. В качестве индикаторов состояния рынка использовались финансовые индексы: на российском рынке ценных бумаг – индекс Мосбиржи (IMOEX), на американском рынке – индекс Доу Джонса (DJI). Если выборочная оценка волатильности доходности индекса, полученная по выборке значений доходности до текущего момента времени включительно, не превышала пороговое значение то считалось, что рынок находился в состоянии с низкой волатильностью, в противном случае – с высокой. Пороговое значение определялось исходя из анализа поведения реального рынка. Оценка матрицы переходных вероятностей осуществлялась по методу максимального правдоподобия по выборке значений индикатора за период, предшествующий периоду инвестирования. Оценки средней доходности на каждом  $k$ -м шаге производились методом простой скользящей средней с периодом, зависящим от состояния цепи Маркова. Предполагалось, что в состоянии низкой волатильности, на рынке наблюдается долгосрочный тренд, следовательно, применялась скользящая средняя с более длинным периодом.

Численно были реализованы две стратегии управления ИП по обобщенному критерию (50): 1) слежение за эталонным ИП с доходностью  $\mu_0$ ; 2) управление по критерию «mean-variance». Задача квадратичного программирования решалась численно с использованием пакета прикладных программ MATLAB. Горизонт прогноза  $m = 5$ . Капитал реального ИП вычислялся с учетом «проскальзывания» по формуле (47). Предполагалось, что операции «продажи без покрытия»

запрещены, и размер банковского займа не может превышать величину  $3V(k)$ . Весовые коэффициенты  $R = \text{diag}\{10^{-5}, \dots, 10^{-5}\}$ ,  $\rho_1(k+i)=1$ . Для стратегии слежения за эталонным ИП желаемая доходность  $\mu_0=0.0015$  (0.15% в день),  $\rho_2(k+i)=0.3$ ; для стратегии управления по критерию «mean-variance»  $\rho_2(k+i)=0.6$ .

Типичные результаты моделирования для портфеля, составленного из рискованных активов ПАО «Сбербанк России» (SBER), ЛКОН, ПАО «Газпром» (GAZP), ПАО «Сбербанк России» (SBER), ПАО «НК «Роснефть» (ROSN), ПАО «ГМК «Норильский никель» (GMKN), представлены на рис. 1–3. Период инвестирования: с 10.08.2010 г. по 16.08.2018 г. (2016 торговых сессий).

На рис. 1 показана динамика капиталов эталонного портфеля  $V^0(k)$  и управляемых портфелей  $V(k)$  для стратегии слежения за эталонной траекторией и для стратегии «mean-variance». Рис. 2 иллюстрируют доходность индекса и оценку состояния рыночного режима. Динамика вложений капитала в акции ЛКОН приведена на рис. 3–4: на рис. 3 – для стратегии слежения за эталонной траекторией; на рис. 4 – для стратегии управления по критерию «mean-variance».

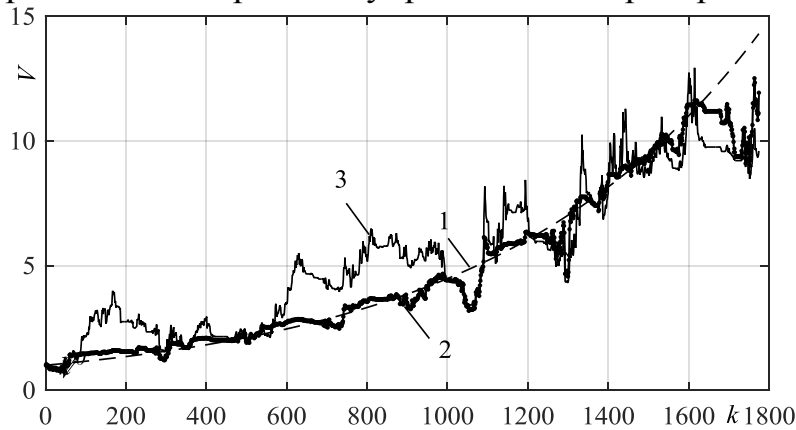


Рисунок 1 – Динамика капиталов эталонного ИП (линия 1) и управляемых ИП (линия 2 – задача слежения, линия 3 – управление по «mean-variance» критерию)

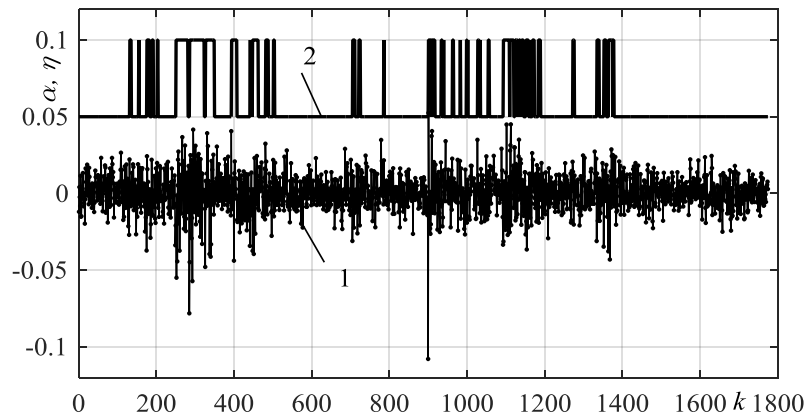


Рисунок 2 – Динамика доходности индекса ІМОЕХ (линия 1) и оценка состояния цепи (линия 2)

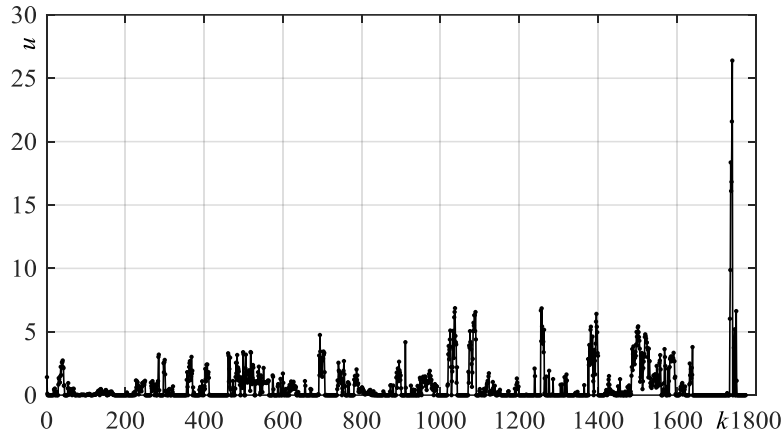


Рисунок 3 – Динамика вложений в акции LKON для стратегии слежения

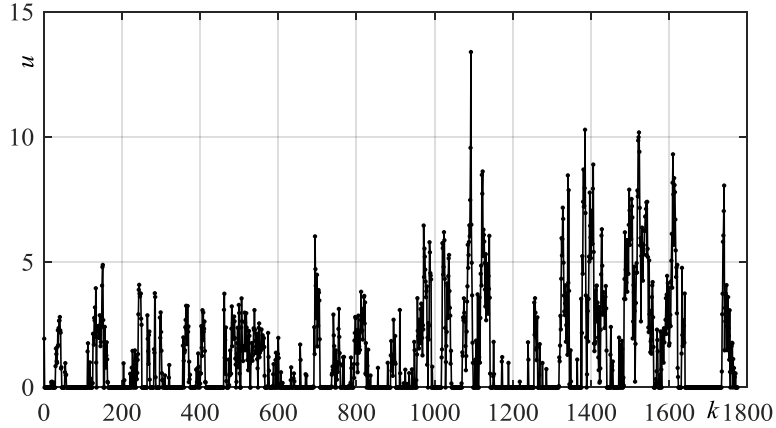


Рисунок 4 – Динамика вложений в акции LKON для стратегии «mean-variance»

**В параграфе 4.3** решена новая задача управления многокомпонентным ИП на рынке с переключением режимов, который состоит из нескольких портфелей, содержащих активы различных видов и банковского счета. Портфели взаимосвязаны посредством цепей Маркова. Для решения задачи используются результаты параграфа 2.3. Приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных американского фондового рынка.

**В параграфе 4.4** приведены результаты решения задачи управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов, когда динамика доходностей рискованных активов описывается векторной авторегрессионной моделью с переключением режимов вида:

$$\eta(k+1) = \mu[\theta(k+1)] + y(k+1), \quad (51)$$

где  $\mu[\theta(k)] = [\mu_1[\theta(k)], \mu_2[\theta(k)], \dots, \mu_n[\theta(k)]]^T$  – вектор ожидаемых доходностей рискованных активов; вектор  $y(k) \in \mathbb{R}^n$  описывается моделью MSAH VAR(p):

$$y(k+1) = \gamma_1[\theta(k+1)]y(k) + \dots + \gamma_p[\theta(k+1)]y(k-p+1) + \phi[\theta(k+1)]w(k+1), \quad (52)$$

$w(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор белых шумов,  $\theta(k)$  – однородная дискретная цепь Маркова.

С учетом (51) и (52), динамика капитала ИП имеет вид:

$$V(k+1) = A[\theta(k+1)]V(k) + B[y(k+1)]u(k) + D[\theta(k+1)]u(k),$$

$$A[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^V \theta_i(k+1)A^{(i)}, A^{(i)} = 1 + r^{(i)}, D[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^V \theta_i(k+1)D^{(i)},$$

$$D^{(i)} = \begin{bmatrix} \mu_1^{(i)} - r^{(i)} & \dots & \mu_n^{(i)} - r^{(i)} \end{bmatrix}, B[y(k+1)] = y^T(k+1).$$

Для управления ИП на каждом шаге минимизируется обобщенный

критерий со скользящим горизонтом управления. Для решения задачи используются результаты параграфов 3.1 и 3.4. Приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского и американского фондового рынков для случаев наблюдаемой и скрытой цепей Маркова. В условиях скрытой цепи для оценки состояния и параметров модели MSAH VAR( $p$ ) используется ЕМ-алгоритм.

**В параграфе 4.5** рассматривается динамическая задача управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов с учетом явных транзакционных издержек в форме брокерских комиссий и ограничений на объемы вложений и займов. Рассматривается ИП, состоящий из  $n$  рискованных вложений и безрискового финансового актива. Допускается возможность займа по безрисковой ставке и участие в операциях «продажи без покрытия». Предполагается, что транзакционные издержки при покупке и продаже рискованных активов удерживаются из банковского счета (безрискового вложения). Для описания эволюции доходностей рискованных активов используется модель вида (48). Капитал ИП  $V(k)$  описывается уравнением:

$$V(k) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k) - x_{n+2}(k), \quad (53)$$

где  $x_i(k)$  – объем вложений в  $i$ -й рискованный актив;  $x_{n+1}(k) \geq 0$  – объем вложений в безрисковый актив; если  $x_i(k) < 0$ , то это означает участие в операции «продажа без покрытия» на сумму  $|x_i(k)|$ ;  $x_{n+2}(k) \geq 0$  – объем займа безрискового актива;

$$x_i(k+1) = [1 + \mu_i [\theta(k+1), k+1] + \quad (54)$$

$$+ \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} [\theta(k+1), k+1] w_j(k+1)] [x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k)],$$

$$x_{n+1}(k+1) = [1 + r_1(k+1)] [x_{n+1}(k) + v(k) - (1 + \lambda^+) \sum_{i=1}^n u_i^+(k) + (1 - \lambda^-) \sum_{i=1}^n u_i^-(k)], \quad (55)$$

$$x_{n+2}(k+1) = [1 + r_2(k+1)] [x_{n+2}(k) + v(k)], \quad (56)$$

$u_i^+(k) \geq 0$  – объем капитала, переведенного с банковского счета в  $i$ -й рискованный актив в  $k$ -м периоде;  $u_i^-(k) \geq 0$  – объем капитала, переведенного с  $i$ -го рискованного актива на банковский счет;  $r_1(k+1)$  – ставка доходности безрискового актива;  $\lambda^{+/-}$  – доля капитала  $u_i^{+/-}(k)$ , идущая на уплату транзакционных издержек при покупке/продаже рискованного актива  $i$ -го вида;  $v(k)$  – объем заемного капитала, перераспределяемого между банковским и кредитным счетами в  $k$ -м периоде:  $v(k) > 0$  означает заем в размере  $v(k)$ ,  $v(k) < 0$  означает возврат кредита в размере  $|v(k)|$ ;  $r_2(k+1)$  – ставка займа безрискового актива,  $r_1(k+1) < r_2(k+1)$ .

Поскольку  $x_{n+1}(k+1) \geq 0$ ,  $x_{n+2}(k+1) \geq 0$ , то справедливы неравенства:

$$x_{n+1}(k) + v(k) - (1 + \lambda^+) \sum_{i=1}^n u_i^+(k) + (1 - \lambda^-) \sum_{i=1}^n u_i^-(k) \geq 0, \quad (57)$$

$$x_{n+2}(k) + v(k) \geq 0. \quad (58)$$

Объем операций «продажа без покрытия» по активу  $i$ -го вида ограничен величиной  $d_i(k) \geq 0$ , объем заемных средств ограничен величиной  $d_0(k) \geq 0$ ,

следовательно, справедливы неравенства:

$$x_i(k) + u_i^+(k) - u_i^-(k) \geq -d_i(k), i = \overline{1, n}, \quad (59)$$

$$x_{n+2}(k) + v(k) \leq d_0(k). \quad (60)$$

Кроме того, учитываются ограничения

$$u_i^+(k) \geq 0, u_i^-(k) \geq 0. \quad (61)$$

С учетом (48) уравнения (55), (56), (54) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \left[ A_0[\theta(k+1), k+1] + \sum_{i=1}^n A_j[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1) \right] x(k) + \\ & + \left[ B_0[\theta(k+1), k+1] + \sum_{i=1}^n B_j[\theta(k+1), k+1] w_j(k+1) \right] u(k), \end{aligned} \quad (62)$$

где  $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{n+2}(k)]^T$ ,  $u(k) = [v(k), u_1^+(k), \dots, u_n^+(k), u_1^-(k), \dots, u_n^-(k)]^T$ ,

$$A_0[\theta(k), k] = \text{diag} \{ b_0[\theta(k), k], 1+r_1(k), 1+r_2(k) \},$$

$$A_j[\theta(k), k] = \text{diag} \{ \sigma_{1j}[\theta(k), k], \dots, \sigma_{nj}[\theta(k), k], 0, 0 \},$$

$$B_0[\theta(k), k] = \begin{bmatrix} 0_n^T & b_0[\theta(k), k] & -b_0[\theta(k), k] \\ 1+r_1(k) & -(1+\lambda^+)b_1(k) & (1-\lambda^-)b_1(k) \\ 1+r_2(k) & 0_n & 0_n \end{bmatrix},$$

$$B_j[\theta(k), k] = \begin{bmatrix} 0_n^T & \bar{b}_j[\theta(k), k] & -\bar{b}_j[\theta(k), k] \\ 0 & 0_n & 0_n \\ 0 & 0_n & 0_n \end{bmatrix}, (j = \overline{1, n}),$$

$$b_0[\theta(k), k] = \text{diag} \{ 1 + \mu_1[\theta(k), k], \dots, 1 + \mu_n[\theta(k), k] \}, b_1(k) = [1 + r_1(k)] \mathbb{1}_n,$$

$$\bar{b}_j[\theta(k), k] = \text{diag} \{ \sigma_{1j}[\theta(k), k], \dots, \sigma_{nj}[\theta(k), k] \}, (j = \overline{1, n}), 0_n = [0, \dots, 0]_n, 1_n = [1, \dots, 1]_n.$$

Для управления ИП минимизируем обобщенный критерий:

$$\begin{aligned} J(k+m|k) = & \sum_{i=1}^m \left[ R_1(k+i) E \{ V^2(k+i|k) | V(k), \theta(k) \} - \right. \\ & - R_2(k+i) E \{ V(k+i|k) | V(k), \theta(k) \}^2 - R_3(k+i) E \{ V(k+i|k) | V(k), \theta(k) \} \Big] + \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} E \{ u^T(k+i|k) R(k+i) u(k+i|k) | V(k), \theta(k) \}, \end{aligned} \quad (63)$$

где  $V(k+i|k)$  – прогнозное значение капитала ИП согласно уравнениям динамики (53) и (62),  $u(k+i|k)$  – вектор прогнозирующих управлений;  $R_1(k+i) \geq R_2(k+i) \geq 0$ ,  $R_3(k+i)$  – весовые коэффициенты;  $R(k+i) > 0$  – симметричная матрица размерности  $(2n+1) \times (2n+1)$ . Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (63) по последовательности прогнозирующих управлений  $u(k+i|k)$  ( $i=0, 1, \dots, m-1$ ), когда динамика системы описывается уравнением (62) при ограничениях (57)–(61). Решение данной задачи дается теоремой 2.1.

В диссертации приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского рынка для случаев наблюдаемой и

скрытой цепей Маркова. В условиях скрытой цепи для оценки состояния используется адаптивный ЕМ-алгоритм. Типичные результаты моделирования для случая наблюдаемой цепи представлены на рисунках 5–7. Портфель составлен из рисков активов LKOH, GAZP, SBER, ROSN, GMKN. Период инвестирования: 27.05.2010 – 17.06.2016 (1520 торговых дней).

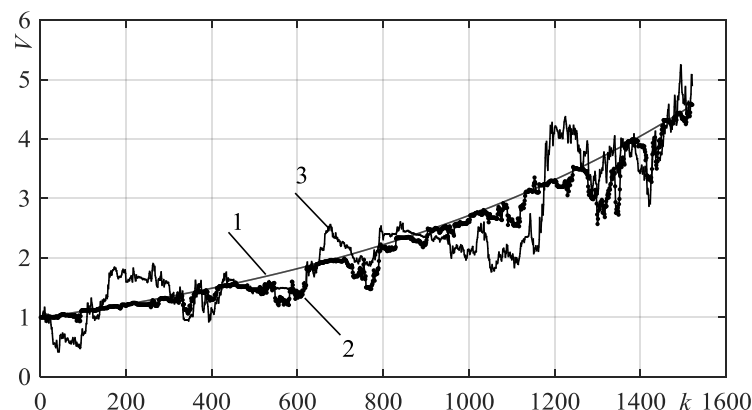


Рисунок 5 – Динамика капиталов эталонного ИП (линия 1) и управляемых ИП для многомерной модели ИП и случая наблюдаемой цепи (линия 2 – задача слежения, линия 3 – управление по «mean-variance» критерию)

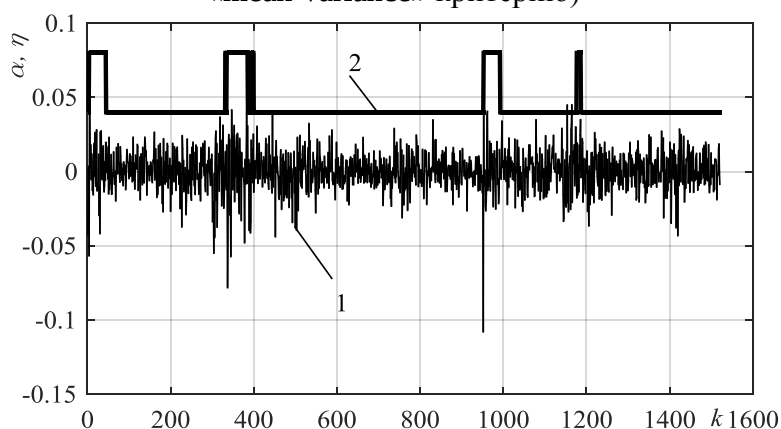


Рисунок 6 – Динамика доходности индекса IMOEX (линия 1) и оценка состояния цепи Маркова (линия 2) для многомерной модели ИП и случая наблюдаемой цепи

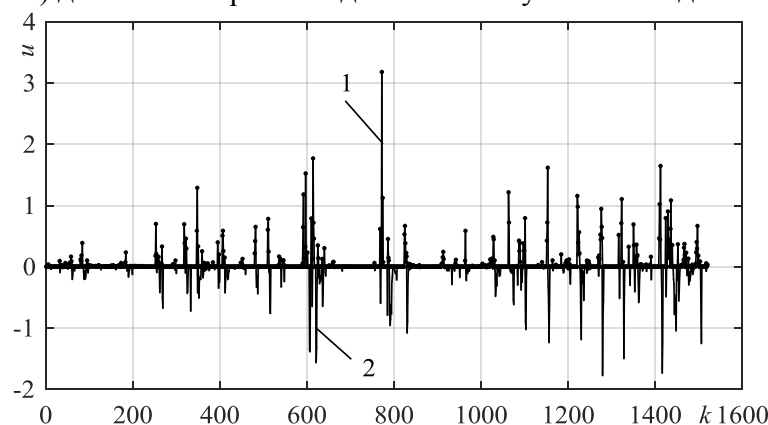


Рисунок 7 – Динамика вложений в акции ROSN для стратегии слежения (линия 1 –  $u^+$ , линия 2 –  $u^-$ ) для многомерной модели ИП и случая наблюдаемой цепи

Численные расчеты подтверждают работоспособность и эффективность предложенных подходов. Доходность портфелей и волатильность траекторий

зависят от значений параметра  $\mu_0$  – для задачи слежения, или от соотношения доходность-риск – при управлении по «mean-variance» критерию, а также от точности оценок параметров доходностей финансовых активов.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе диссертационной работы.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Публикации в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:*

1. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками и мультипликативными шумами при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3 (12). – С. 5–11. – 0,44 / 0,22 а.л.

2. Домбровский В. В. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с переключающимися режимами при ограничениях на объемы торговых операций / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 4 (13). – С. 5–14. – 0,63 / 0,31 а.л.

3. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 5. – С. 96–112. – 1,52 / 0,76 а.л.

*в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:*

Dombrovskii V. V. Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Ob'edko (Pashinskaya)** // Automation and Remote Control. – 2011. – Vol. 72, is. 5. – P. 989–1003. – DOI: 10.1134/S0005117911050079.

4. Dombrovskii V. V. Model predictive control of constrained with non linear stochastic parameters systems / V. V. Dombrovskii, **T. U. Obyedko (Pashinskaya)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 3 (16). – С. 5–12. – 0,50 / 0,25 а.л.

5. Dombrovskii V. V. Portfolio optimization in the financial market with serially dependent returns under constraints / V. V. Dombrovskii, **T. U. Obyedko (Pashinskaya)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 2 (19). – С. 5–13. – 0,56 / 0,28 а.л.

6. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием взаимосвязанными гибридными системами с марковскими скачками при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Вестник Томского

государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 3 (20). – С. 5–12. – 0,50 / 0,25 а.л.

7. Домбровский В. В. Управление с прогнозирующей моделью системами с марковскими скачками по критерию «mean-variance» при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4 (21). – С. 5–13. – 0,56 / 0,28 а.л.

8. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием нелинейными стохастическими системами с марковскими скачками при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)**, М. В. Самородова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 14–22. – DOI: 10.17223/19988605/32/2. – 0,56 / 0,19 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Model Predictive Control for Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Jumps under Constraints / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Obyedko (Pashinskaya)**, M. V. Samorodova // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2015. – № 3 (32). – P. 14–22.

9. Домбровский В. В. Прогнозирующее управление с замкнутой обратной связью дискретными системами со случайными коррелированными параметрами / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)**, М. В. Самородова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 39. – С. 11–16. – DOI: 10.17223/19988605/39/2. – 0,38 / 0,13 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Model predictive control for stochastic systems with Markovian jumps and serially correlated parameters under constraints / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Obedko (Pashinskaya)** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2017. – № 39. – P. 11–16.

10. Домбровский В. В. Управление с прогнозирующей моделью стохастическими системами с марковскими скачками и сериально коррелированными параметрами при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 40. – С. 4–11. – DOI: 10.17223/19988605/40/1. – 0,50 / 0,25 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Model predictive control for stochastic systems with Markovian jumps and serially correlated parameters under constraints / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Obedko (Pashinskaya)** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2017. – № 40. – С. 4–11.

11. Домбровский В. В. Прогнозирующее управление стохастическими нелинейными системами с сериально коррелированными параметрами при

ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Пашинская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 42. – С. 4–11. – DOI: 10.17223/19988605/42/1. – 0,50 / 0,25 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Model predictive control for nonlinear stochastic systems with serially correlated parameters under constraints / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Pashinskaya** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2018. – № 42. – С. 4–11.

12. Домбровский В. В. Прогнозирующее управление системами с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с марковским переключением режимов / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Пашинская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 44. – С. 4–9. – DOI: 10.17223/19988605/44/1. – 0,38 / 0,19 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Predictive control for markov jump systems with markov switching autoregressive multiplicative noise / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Pashinskaya** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2018. – № 44. – Р. 4–9.

13. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием распределенными стохастическими гибридными системами с мультипликативными шумами при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Пашинская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 45. – С. 4–12. – DOI: 10.17223/19988605/45/1. – 0,56 / 0,28 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Model predictive control of distributed stochastic hybrid systems with multiplicative noises under constraints / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Pashinskaya** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2018. – № 45. – С. 4–12.

14. Домбровский В. В. Синтез прогнозирующих стратегий управления динамическими системами с коррелированными параметрами и мультипликативными и аддитивными шумами при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Пашинская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 47. – С. 4–11. – DOI: 10.17223/19988605/47/1. – 0,50 / 0,25 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Model predictive control for discrete-time systems with serially correlated parameters and multiplicative and additive noises under constraints / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Pashinskaya** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2019. – № 47. – Р. 4–11.

15. Домбровский В. В. Оптимальные стратегии прогнозирующего управления системами со случайными параметрами, описываемыми многомерной

регрессионной моделью с марковским переключением режимов / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Пашинская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 48. – С. 4–12. – DOI: 10.17223/19988605/48/1. – 0,56 / 0,28 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Optimal predictive control strategies for systems with random parameters described by multidimensional markov switching regression model / V. V. Dombrovskii, **T. Y. Pashinskaya** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2019. – № 48. – P. 4–12.

16. Домбровский В. В. Стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со скрытым переключением режимов / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Пашинская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 50. – С. 4–13. – DOI: 10.17223/19988605/50/1. – 0,63 / 0,31 а.л.

*Web of Science*: Dombrovskii V. V. Predictive control strategies for investment portfolio in the financial market with hidden regime switching/ V. V. Dombrovskii, **T. Y. Obyedko (Pashinskaya)** // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta-Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2020. – № 50. – P. 4–13.

17. Dombrovskii V. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization / V. Dombrovskii, **T. Obyedko (Pashinskaya)** // Automatica. – 2015. – Vol. 54. – P. 325–331. – DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021. – 1,23 / 0,62 а.л. (*Web of Science*).

18. Dombrovskii V. Feedback predictive control strategies for investment in the financial market with serially correlated returns subject to constraints and trading costs / V. Dombrovskii, **T. Obedko (Pashinskaya)** // Optimal Control Applications and Methods. – 2017. – Vol. 38, is. 6. – P. 908–921. – DOI: 10.1002/oca.2296. – 1,97 / 0,99 а.л. (*Web of Science*).

19. Dombrovskii V. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions / V. Dombrovskii, **T. Obyedko (Pashinskaya)**, M. Samorodova // Automatica. – 2018. – Vol. 87. – P. 61–68. – DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018. – 1,48 / 0,49 а.л. (*Web of Science*).

20. Dombrovskii V. Design of model predictive control for constrained Markov jump linear systems with multiplicative noises and online portfolio selection / V. Dombrovskii, **T. Pashinskaya** // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2019. – Vol. 30, is. 3. – P. 1050–1070. – DOI: 10.1002/rnc.4807. – 2,96 / 1,48 а.л. (*Web of Science*).

21. Dombrovskii V. Model predictive control design for constrained Markov jump bilinear stochastic systems with an application in finance / V. Dombrovskii, **T. Pashinskaya** // International Journal of Systems Science. – 2020. – Vol. 51, is. 16. – P. 3269–3284. – DOI: 10.1080/00207721.2020.1814892. – 1,88 / 0,94 а.л. (*Web of Science*).

*Статья в сборнике материалов конференции, представленном в издании, входящем в Scopus:*

22. Dombrovskii V. V. Portfolio Optimization in the financial market with Regime Switching under Constraints and Transaction Costs Using Model Predictive Control / V. Dombrovskii, **Т. Оbedko (Pashinskaya)** // 2015 European Control Conference (ECC) : proceedings paper. Linz, Austria, July 15–17, 2015. – 2015. – P. 3371–3376. – DOI: 10.1109/ECC.2015.7331055. – 0,38 / 0,19 а.л.

*Публикации в прочих научных изданиях:*

23. Обьедко Т. Ю. Модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с переключающимися режимами при ограничениях / **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Инновации в экономике : сборник материалов V Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 17–21 мая 2010 г. – Томск, 2010. – С. 223–225. – 0,19 / 0,09 а.л.

24. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками и мультипликативными шумами / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Восьмой Российской конференции с международным участием. Томск, 05–08 октября 2010 г. – Томск, 2010. – С. 73. – 0,06 / 0,03 а.л.

25. Домбровский В. В. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с переключающимися режимами при ограничениях на объемы торговых операций / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Восьмой Российской конференции с международным участием. Томск, 05–08 октября 2010 г. – Томск, 2010. – С. 118–119. – 0,13 / 0,06 а.л.

26. **Обьедко (Пашинская) Т. Ю.** Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными нелинейными параметрами при ограничениях / Т. Ю. Обьедко (Пашинская) // Наука. Технологии. Инновации (НТИ – 2011) : материалы Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Новосибирск, 01–04 декабря 2011 г. – Новосибирск, 2011. – С. 14–17. – 0,25 а.л.

27. Домбровский В. В. Управление с прогнозированием взаимосвязанными системами с марковскими скачками при ограничениях / В. В. Домбровский, **Т. Ю. Обьедко (Пашинская)** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы докладов Девятой Российской конференции с международным участием. Томск, 05–08 июня 2012 г. – Томск, 2012. – С. 112. – 0,06 / 0,03 а.л.

28. Самородова М. В. Управление с прогнозирующей моделью нелинейными системами с марковскими скачками / М. В. Самородова, **Т. Ю. Пашинская** // Перспективы развития фундаментальных наук : сборник научных трудов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 25–28 апреля 2017 г. – Т. 3: Математика. – Томск, 2017. – С. 86–88. – 0,19 / 0,09 а.л.

29. **Пашинская Т. Ю.** Прогнозирующее управление инвестиционным портфелем на финансовом рынке со скрытым переключением режимов и MS VAR моделью доходностей / Т. Ю. Пашинская, В. В. Домбровский // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 5. – С. 124–138. – DOI: 10.31857/S0005231021040081. – 0,75 / 0,38 а.л.

*в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:*

**Pashinskaya T. Yu.** Predictive Control of Investment Portfolio on the Financial Market with Hidden Regime Switching and MS VAR Model of Returns / T. Yu. Pashinskaya, V. V. Dombrovskii // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82. – P. 841–852. – DOI: 10.31857/S0005231021040081.

Издание подготовлено в авторской редакции.  
Отпечатано на участке цифровой печати  
Издательства Томского государственного университета  
Заказ № 4716 от «16» июля 2021 г. Тираж 100 экз.  
г. Томск Московский тр.8, тел. 53-15-28