

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная
научная конференция
«Все грани математики и
механики»**

(24–28 апреля 2018 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2018

Особенности решения задач на десятичную позиционную запись натуральных чисел

Гриншпон Я. С., Лапатин А. Л.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, Томск
e-mail: lapatin.lesha@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена вопросу изучения десятичных позиционных систем счисления со школьниками 5-8 классов в рамках факультативного курса. Предполагается применение задачного подхода, для чего создается банк авторских задач по аналогии с известными задачами для десятичной записи. Результатом освоения данного курса должно стать расширение историко-математического кругозора учащихся; углубление понимания концепции натурального числа и его поразрядной записи; приобретение навыка решения сложных олимпиадных задач, связанных с позиционной записью числа; формирование предпосылок для изучения действий над многочленами от одной переменной.

Ключевые слова: натуральные числа, позиционные системы счисления, теоретико-числовые задачи.

Любая организованная деятельность человека обязательно сопряжена с понятием о количестве и, как следствие, с существованием какого-то счета. Трудно представить, что человек когда-то совсем не умел считать. Скорее всего, интуитивное понятие о числе заложено в нас с рождения, что подтверждается наблюдениями за маленькими детьми, еще не умеющими говорить. Но это, конечно же, не означает, что во все времена люди записывали данные о количественных наблюдениях в том виде, как мы это делаем сейчас.

В настоящий момент во всем мире общепринята позиционная десятичная система счисления. Мы так к ней привыкли, что все остальные системы воспринимаем как иностранные языки. Однако с теоретической математической точки зрения десятичная система не имеет никаких преимуществ перед позиционными системами с другими основаниями, а в практике использования современных вычислительных устройств более удобными оказываются двоичная и родственные с ней восьмеричная и шестнадцатеричная системы.

Привычка работать только с десятичной записью находит свое отражение и в образовательном процессе. Единственным УМК по математике для школ, содержащим сведения о недесятичных системах счисления, являются учебники серии МПИ ([1]), но они теперь исключены из Федерального перечня.

Приоритет изучения десятичной записи абсолютно оправдан, так как в будущей своей жизнедеятельности выпускники школ и вузов будут использовать навыки выполнения действий над числами, записанными именно в десятичной системе. Однако, когда мы переходим к вопросу обучения способных учащихся, интересующихся математикой, то рассмотрение только одной системы счисления выглядит уже не столь бесспорным.

Действительно, при проведении внеклассной работы, в сборниках занимательных задач, а также на математических конкурсах, викторинах и олимпиадах очень часто встречаются задачи на десятичную запись, но практически отсутствуют аналогичные задачи для недесятичных записей. Актуальность же решения таких задач помимо общеразвивающей и исторической их функции обусловлена тем, что они могут стать основой для выработки удобных алгоритмов действий над многочленами от одной переменной по аналогии с алгоритмами для натуральных чисел ([2]).

В данной статье представлен цикл задач, предназначенных для учеников 5-8 классов и направленных на изучение недесятичной позиционной записи натуральных чисел. Предполагается, что эти задачи войдут в разрабатываемый авторами сборник задач для факультативного курса «Решение задач на запись числа в позиционных системах счисления». Все приведенные в статье задачи являются авторскими.

Методически оказывается целесообразным начать изучение этой темы с задач на сумму цифр числа, так как в этих задач тренируется навык перехода от позиционной записи к сумме разрядных слагаемых по стандартизированной схеме вида $\overline{ab}_p = pa + b$, $\overline{abc}_p = p^2a + pb + c$ и т. д. Далее можно переходить к более сложным задачам на перестановку цифр числа (в частности, на обратное прочтение числа), в которых необходимо применять переход к сумме разрядных слагаемых для нескольких похожих чисел, отличающихся друг от друга только порядком следования цифр в их позиционной записи.

На начальном этапе курса полезно выполнять проверку найденных ответов в привычной десятичной системе. С одной стороны, это

возможность убедиться в корректности проведенных рассуждений, с другой стороны — оттачивается навык перевода записи натурального числа из одной системы в другую (который впоследствии пригодится и на уроках информатики).

При обсуждении этих задач со школьниками нельзя обойти стороной вопрос о том, что все предложенные задачи можно решить методом полного перебора, так как множество натуральных чисел с фиксированным количеством цифр конечно (точнее, существует $p^n - p^{n-1}$ n -значных чисел в системе счисления с основанием p). Необходимо подчеркнуть, что это абсолютно законное математическое рассуждение, но оно, как правило, является не самым рациональным. Эффективнее оказывается решать задачу в общем виде, обозначив неизвестные цифры переменными и составив по условию задачи диофантовое уравнение, которое удобно решать либо исходя из соображений делимости, либо оценивая буквенные выражения исходя из ограниченности множества цифр.

Напомним основные определения, которые мы будем использовать.

Определение 1. *Под записью*

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}_{(p)}, \quad (1)$$

где $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n < p$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_1 \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, понимают число, равное сумме

$$A = a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n \quad (2)$$

Запись (1) называют записью числа A в позиционной системе счисления с основанием p , а сумму (2) называют суммой разрядных слагаемых числа в системе счисления с основанием p . Символы, обозначающие числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, называют цифрами, а про число A говорят, что оно является n -значным.

В дальнейшем при использовании десятичной записи мы не будем подписывать основание.

Задача 1. Найдите двузначное число, которое в семеричной системе счисления больше суммы своих цифр: а) в два раза; б) в три раза; в) в семь раз; г) в восемь раз.

Решение. Пусть данное число имеет вид $\overline{ab}_7$, где $1 \leq a \leq 6$ и $0 \leq b \leq 6$. По условию задачи для каждого из пунктов составим уравнение.

Пункт а). $7a + b = 2(a + b)$, $5a = b$. Откуда $b:5$, а значит, $b = 0$ или $b = 5$. Если $b = 0$, то и $a = 0$, что противоречит условию. При $b = 5$ и $a = 1$, получаем число 15_7 . Проверим в десятичной системе:

$15_7 = 7 + 5 = 12$, $1 + 5 = 6$, 12 в два раза больше 6.

Пункт б). $7a + b = 3(a + b)$, $2a = b$. Откуда $b \div 2$, а значит, $b = 2$, $b = 4$ или $b = 6$. Получаем ответы 12_7 , 24_7 и 36_7 . Проверка в десятичной системе: $12_7 = 7 + 2 = 9$, $24_7 = 14 + 4 = 18$ и $36_7 = 21 + 6 = 27$. Эти значения в три раза больше соответственных сумм цифр: 3, 6 и 9.

Пункт в). $7a + b = 7(a + b)$, $b = 0$. Подходят числа 10_7 , 20_7 , 30_7 , 40_7 , 50_7 и 60_7 . После сделанной проверки в десятичной системе, можно обратить внимание школьников на тот факт, что приписывание справа нуля в семеричной системе равносильно умножению на семь, в общем же случае, приписывание нуля равносильно умножению на основание системы счисления.

Пункт г). $7a + b = 8(a + b)$, $a + 10b = 0$, что невозможно, так как a положительно, а b неотрицательно. Таким образом, чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Деление данной задачи на пункты хорошо иллюстрирует разнообразие возможных результатов при решении казалось бы совершенно однотипных задач. Рассмотрим еще одну задачу со схожей формулировкой, при аналогичном решении которой приходится применять более тонкий аппарат взаимно простых чисел.

Задача 2. Найдите двузначное число, которое в восьмеричной системе счисления в три раза больше суммы своих цифр

Решение. Аналогично предыдущей задаче: $8a + b = 3(a + b)$, $5a = 2b$. Так как 2 и 5 взаимно просты, то $b \div 5$, а значит, $b = 5$ и $a = 2$, получаем число 25_7 .

Рассмотрим теперь аналогичные задачи для трехзначных чисел.

Задача 3. Найдите трехзначное число, которое в пятеричной системе счисления в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число имеет вид $\overline{abc}_5$. Имеем уравнение $25a + 5b + c = 10(a + b + c)$. Упрощаем $15a - 5b = 9c$. Откуда $c \div 5$, и значит, $c = 0$ (это единственная цифра в пятеричной системе, кратная пяти). Подставим в уравнение: $3a = b$. Откуда $b \div 3$, и значит, $b = 0$ или $b = 3$. Если $b = 0$, то $a = 0$, что противоречит трехзначности искомого числа. При $b = 3$ и $a = 1$, получаем число 130_5 .

Следующая задача отличается только основанием, однако решение выглядит несколько сложнее.

Задача 4. Найдите трехзначное число, которое в шестеричной системе счисления в десять раз больше суммы его цифр.

Решение. Пусть данное число $\overline{abc}_6$. Имеем уравнение $36a + 6b + c = 10(a + b + c)$. Упрощаем $26a - 4b = 9c$. Откуда $c \div 2$, и значит, $c = 0$, $c = 2$ или $c = 4$.

При $c = 0$ получим $13a = 2b$. Следовательно, $b \div 13$ и $b = 0$, а значит, и $a = 0$, что противоречит трехзначности.

Если $c = 2$, то $13a = 2b + 9$. Следовательно, $(2b + 9) \div 13$. Но, в силу ограниченности множества цифр в шестеричной системе, справедлива оценка $9 \leq 2b + 9 \leq 19$. Так как в этом промежутке существует единственное число, кратное 13, то $2b + 9 = 13$. Таким образом, $b = 2$ и $a = 1$, число 122_6 .

Если $c = 4$, то $13a = 2b + 18$. Следовательно, $(2b + 18) \div 13$. Но из оценки $18 \leq 2b + 18 \leq 28$ вытекает, что $2b + 18 = 26$. Итак, $b = 4$ и $a = 2$, число 244_6 .

Проверка в десятичной системе показывает, что оба ответа подходят.

Перейдем к задаче на обратное прочтение числа.

Задача 5. Трехзначное число в шестеричной системе счисления записали в обратном порядке. Полученное число оказалось на двадцать один больше удвоенного данного числа. Найдите данное число.

Решение. Пусть данное число $\overline{abc}_6$. Тогда число, записанное в обратном порядке, имеет вид $\overline{cba}_6$. Получим $(36a + 6b + c) \cdot 2 = 36c + 6b + a + 21$. Упростим: $71a + 6b - 34c = 21$. Из этого равенства видно, что $71a$ нечетно, следовательно, a нечетно, и значит, $a = 1$, $a = 3$ или $a = 5$.

Оценим a . Так как $34c \leq 170$, то $71a = 34c - 6b + 21 \leq 191$. При $a = 3$ и $a = 5$ имеем $71a > 191$, значит, остается $a = 1$. Подставим: $71 + 6b - 34c = 21$. Упростим: $3b + 25 = 17c$. Оценим c : $25 \leq 3b + 25 \leq 40$, значит, $25 \leq 17c \leq 40$ и $c = 2$. Отсюда $b = 3$, число 132_6 .

Проверим в шестеричной и десятичной системах: $132_6 \cdot 2_6 = 304_6$, $304_6 - 231_6 = 33_6$, $33_6 = 21$.

Задачи на обратное прочтение числа являются частным случаем задач на перестановку цифр. Рассмотрим такую задачу.

Задача 6. Последнюю цифру трехзначного числа по основанию пять перенесли в начало и к полученному трехзначному числу прибавили данное число. В результате получилось трехзначное число, кратное двадцати пяти. Найдите данное число.

Первый способ. Аналитическое решение. Пусть данное число $\overline{abc}_5$. Тогда $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, причем $a \neq 0$ и $c \neq 0$, так как числа $\overline{abc}_5$ и $\overline{cba}_5$ трехзначные. По условию $(25a + 5b + c + 25c + 5a + b) : 25$. Преобразуем: $((30a + 25c + 5b) + (b + c)) : 25$. Откуда $(b + c) : 5$, и значит, так как $c \neq 0$ и $b + c \leq 8$, то $b + c = 5$.

Если $c = 1$, то $b = 4$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 50 =$

$((25a + 50) + 5a) : 25$. Следовательно, $5a : 25$ и $a : 5$. Противоречие.

Если $c = 2$, то $b = 3$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 70 = ((25a + 50) + 5a + 20) : 25$. Следовательно, $(5a + 20) : 25$ и $(a + 4) : 5$. Подходит только $a = 1$. Проверим, что результат трехзначен: $30a + 70 = 100 < 125$. Значит, одно из искоемых чисел 132_5 .

Если $c = 3$, то $b = 2$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 90 = ((25a + 50) + 5a + 40) : 25$. Следовательно, $(5a + 40) : 25$ и $(a + 8) : 5$. Подходит только $a = 2$. Но $30a + 90 = 150 \geq 125$, что противоречит трехзначности результата.

Если $c = 4$, то $b = 1$ и $30a + 6b + 26c = 30a + 110 = ((25a + 100) + 5a + 10) : 25$. Следовательно, $(5a + 10) : 25$ и $(a + 2) : 5$. Подходит только $a = 3$. Но $30a + 110 = 200 \geq 125$, что противоречит трехзначности результата.

Второй способ. Решение-ребус. Заметим, что если число, записанное в позиционной системе по основанию p , кратно p , то оно заканчивается нулем. Если оно кратно p^2 , то оно заканчивается двумя нулями. Если оно кратно p^k , то оно заканчивается k нулями. В нашем случае трехзначное число по основанию 5 кратно 25. На конце будет два нуля.

Запишем условие задания в виде примера на сложение «в столбик» чисел $\overline{abc}_5$ и $\overline{cab}_5$.

$$\begin{array}{r} + \quad abc \\ \quad cab \\ \hline *00 \end{array}$$

Сумма $c + b$ заканчивается нулем, значит, $c + b = 5$, единица переходит в старший разряд. Сумма $b + a + 1$ заканчивается нулем, значит, $b + a = 4$, единица переходит в старший разряд. Так как сумма $a + c + 1$ не дает перехода единицы в старший разряд, то $a + c < 4$. Также $a \neq 0$ и $c \neq 0$. Следовательно, возможны три случая: а) $a = 1$ и $c = 1$; б) $a = 1$ и $c = 2$; в) $a = 2$ и $c = 1$.

Случаи а) и в) невозможны, так как условия $c + b = 5$ и $b + a = 4$ противоречат друг другу. В случае б) получим $b = 3$, число 132_5 .

В заключение, отметим, что знание систем счисления приводит к более глубокому пониманию понятия числа (например, делимость числа на три — это свойство числа, а делимость суммы цифр на три — это свойство десятичной цифровой записи числа; в других системах счисления эти свойства могут оказаться неравносильными).

Материалы, представленные в работе, могут быть использованы как на основных и дополнительных уроках математики, так и на уроках информатики. Это позволяет говорить о межпредметности разрабатываемого курса.

Литература

1. Гельфман Э. Г. Математика : учебник для 5 класса : в 2 ч. Ч. 1 / Э. Г. Гельфман, О. В. Холодная. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 152 с. : ил.
2. Гриншпон Я.С., Лапатин А.Л. Алгоритмы выполнения арифметических действий над натуральными числами и над многочленами от одной переменной в школьном курсе математики // Дневник науки. 2018. N3 [Электронный ресурс]. URL: http://www.dnevnika nauki.ru/images/publications/2018/3/pedagogy/Grinshpon_Lapatin.pdf (Дата обращения 05.06.2018).