МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

Международной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 28–30 мая 2020 г.

*Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск
Издательство Томского государственного университета
2020

ББК 22.17–22.19
УДК 519.2, 519.7, 519.8
Т78

Т78 Труды Томского государственного университета. – Т. 305. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2020. – 322 с.

ISBN 978-5-94621-970-9

Сборник содержит материалы Международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», проводившейся 28–30 мая 2020 г. на базе Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

УДК 539.3.004
ББК 22,25.22.251.22.62

ISBN 978-5-94621-970-9

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M/M/1 С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Федорова Е.А.[1], Рожкова С.В.[1,2], Воронина Н.М.[2]
[1]Томский государственный университет, [2]Томский политехнический университет
moiskate@mail.ru, rozhkova@tpu.ru, vnm@tpu.ru

Введение

Математические модели RQ-систем широко применяются при анализе и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и других технических и экономических систем. Характерной чертой таких моделей является возможность повторной передачи искаженных сообщений, когда прибывшая заявка, обнаружив прибор занятым, уходит в зону ожидания (на орбиту) и через некоторое случайное время повторяет попытку получить обслуживание [1].

В данной работе исследуется одноканальная RQ-система массового обслуживания с ненадежным прибором. Системы массового обслуживания называются ненадежными, если их приборы могут время от времени выходить из строя и требовать восстановления (ремонта), только после которого они могут возобновить обслуживание запросов как новые.

На сегодняшний момент исследованию систем массового обслуживания с ненадежными обслуживающими приборами посвящено большое количество работ, обзор которых приведен в [2], в то же время недостатком большинства работ являются весьма жесткие предположения о показательном распределении всех времен, описывающих поведение системы (время между моментами поступления запросов и поломок, время обслуживания запросов, длительность ремонта приборов) [3].

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с ненадежным прибором (рис. 1). На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_1. Если поступившая заявка находит прибор свободным, то занимает его для обслуживания, в противном случае заявка переходит в источник повторных вызовов (ИПВ) или на орбиту, где ожидает некоторое случайное время с параметром σ, распределенное по экспоненциальному закону. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в ИПВ для реализации следующей задержки.

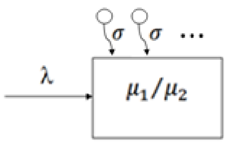

Рис. 1. Модель системы

Предполагается, что сервер ненадежен, т.е. время бесперебойной работы является случайной величиной, экспоненциально распределенной с параметром γ_1, если сервер простаивает, и с параметром γ_2, если он занят обслуживанием. Когда сервер выходит из строя, он сразу же отправляется на ремонт и время восстановления экспоненциально распределено с параметром μ_2.

Когда сервер в нерабочем состоянии, все прибывающие заявки немедленно уходят на орбиту.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ в момент времени t, а $k(t)$ определяет состояние прибора:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если прибор занят,}\\ 2, \text{ если прибор на ремонте.}\end{cases}$$

Процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является двумерной цепью Маркова.

Требуется найти стационарное распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов с учетом состояния прибора $P_k(i,t)=P\{k(t)=k,\ i(t)=i\}$, $k=\overline{0,2}$, $i=0,1,2\ldots$.

2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Для распределения вероятностей $P_k(i,t)$ составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases}\partial P_0(i,t)/\partial t=-(\lambda+i\sigma+\gamma_1)P_0(i,t)+\mu_1 P_1(i,t)+\mu_2 P_2(i,t),\\ \partial P_1(i,t)/\partial t=-(\lambda+\mu_1+\gamma_2)P_1(i,t)+\lambda P_0(i,t)+(i+1)\sigma P_0(i+1,t)+\lambda P_1(i-1,t),\\ \partial P_2(i,t)/\partial t=-(\lambda+\mu_2)P_2(i,t)+\gamma_1 P_0(i,t)+\gamma_2 P_1(i-1,t)+\lambda P_2(i-1,t).\end{cases} \quad (1)$$

Обозначим $P_k(i)=\lim\limits_{t\to\infty}P_k(i,t)$. Тогда в стационарном режиме система (1) примет вид

$$\begin{cases}-(\lambda+i\sigma+\gamma_1)P_0(i)+\mu_1 P_1(i)+\mu_2 P_2(i)=0,\\ -(\lambda+\mu_1+\gamma_2)P_1(i)+\lambda P_0(i)+(i+1)\sigma P_0(i+1)+\lambda P_1(i-1)=0,\\ -(\lambda+\mu_2)P_2(i)+\gamma_1 P_0(i)+\gamma_2 P_1(i-1)+\lambda P_2(i-1)=0.\end{cases} \quad (2)$$

3. Решение системы методом производящих функций

Введем производящие функции $F_k(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}z^i P_k(i)$, тогда из (2) получаем

$$\begin{cases}-(\lambda+\gamma_1)F_0(z)-\sigma z\partial F_0(z)/\partial z+\mu_1 F_1(z)+\mu_2 F_2(z)=0,\\ -(\lambda+\mu_1+\gamma_2)F_1(z)+F_0(z)+\sigma\partial F_0(z)/\partial z+\lambda z F_1(z)=0,\\ -(\lambda+\mu_2)F_2(z)+\gamma_1 F_0(z)+\gamma_2 z F_1(z)+\lambda z F_2(z)=0.\end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) с учетом условия нормировки $F_1(1)+F_2(1)+F_0(1)=1$ имеет вид $F(z)=F_0(z)+F_1(z)+F_2(z)$, где

$$F_0(z)=R_0\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma}\int_z^1\left(\frac{(\lambda+\mu_1+\gamma_2-\lambda z)(\lambda+\mu_2-\lambda z+\gamma_1)}{(\mu_1-\lambda z)(\lambda+\mu_2)-\lambda z(\gamma_2+\mu_1-\lambda z)}-1\right)dz\right\},$$

$$R_0=F_0(1)=\frac{\mu_1\mu_2-\mu_2\lambda-\gamma_2\lambda}{\mu_1(\mu_2+\gamma_1)},$$

$$F_1(z)=F_0(z)\frac{\lambda^2+\mu_2\lambda-\lambda^2 z+\gamma_1\lambda}{(\mu_1-\lambda z)(\lambda+\mu_2)-\lambda z(\gamma_2+\mu_1-\lambda z)},$$

$$F_2(z)=F_0(z)\frac{\gamma_2 z\lambda+\gamma_1\mu_1-\gamma_1\lambda z}{(\mu_1-\lambda z)(\lambda+\mu_2)-\lambda z(\gamma_2+\mu_1-\lambda z)}.$$

Введем частичные характеристические функции: $H_k(u)=\sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}P_k(i)$, где $j=\sqrt{-1}$, $k=\overline{0,2}$. Тогда система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} -(\lambda+\gamma_1)H_0(u)+j\sigma e^{ju}\dfrac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\mu_1 H_1(u)+\mu_2 H_2(u)=0, \\ -(\lambda+\mu_1+\gamma_2)H_1(u)+\lambda H_0(u)-j\sigma\dfrac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\lambda e^{ju}H_1(u)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)H_2(u)+\gamma_1 H_0(u)+\gamma_2 e^{ju}H_1(u)+\lambda e^{ju}H_2(u)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Характеристическая функция $H(u)$ числа заявок для системы (4) выражается через частичные характеристические функции $H_k(u)$ следующим равенством: $H(u)=H_0(u)+H_1(u)+H_2(u)$.

Применяя обратное преобразование Фурье к найденной характеристической функции $H(u)$, можно записать распределение вероятностей $P(i)$ в виде $P(i)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}H(u)\,du$

4. Асимптотика первого порядка

Решение системы (4) найдем с помощью метода асимптотического анализа при условии большой задержки на орбите ($\sigma\to 0$). Обозначим $\sigma=\varepsilon$ и сделаем замены: $u=w\varepsilon$, $H_k(u)=F_k(w,\varepsilon)$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} -(\lambda+\gamma_1)F_0(w,\varepsilon)+je^{jw\varepsilon}\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu_1 F_1(w,\varepsilon)+\mu_2 F_2(w,\varepsilon)=0, \\ -(\lambda+\mu_1+\gamma_2)F_1(w,\varepsilon)+\lambda F_0(w,\varepsilon)-j\dfrac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}+\lambda e^{jw\varepsilon}F_1(w,\varepsilon)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)F_2(w,\varepsilon)+\gamma_1 F_0(w,\varepsilon)+\gamma_2 e^{jw\varepsilon}F_1(w,\varepsilon)+\lambda e^{jw\varepsilon}F_2(w,\varepsilon)=0. \end{cases} \tag{5}$$

В системе (5) сделаем предельный переход при $\varepsilon\to 0$. Обозначим $\lim_{\varepsilon\to 0}F_k(w,\varepsilon)=F_k(w)$. При $\varepsilon\to 0$ система принимает вид:

$$\begin{cases} -(\lambda+\gamma_1)F_0(w)+j\dfrac{\partial F_0(w)}{\partial w}+\mu_1 F_1(w)+\mu_2 F_2(w)=0, \\ -(\lambda+\mu_1+\gamma_2)F_1(w)+\lambda F_0(w)-j\dfrac{\partial F_0(w)}{\partial w}+\lambda F_1(w)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)F_2(w)+\gamma_1 F_0(w)+\gamma_2 F_1(w)+\lambda F_2(w)=0. \end{cases}$$

Будем искать решение системы в следующем виде: $F_k(w,\varepsilon)=R_k\Phi(w)$, $\Phi(w)=exp\{G_1 jw\}$. Подставим $F_k(w,\varepsilon)$ в систему, получаем:

$$\begin{cases} -(\lambda+\gamma_1)R_0-R_0G_1+\mu_1R_1+\mu_2R_2=0, \\ -(\lambda+\mu_1+\gamma_2)R_1+\lambda R_0+R_0G_1+\lambda R_1=0, \\ -(\lambda+\mu_2)R_2+\gamma_1R_0+\gamma_2R_1+\lambda R_2=0. \end{cases} \tag{6}$$

Выписывая уравнения системы совместно с условием нормировки $R_0+R_1+R_2=1$, найдем R_0, R_1, R_2: $R_0=\dfrac{\mu_1\mu_2-\mu_2\lambda-\gamma_2\lambda}{\mu_1\mu_2+\mu_1\gamma_1}$, $R_1=\dfrac{\lambda}{\mu_1}$, $R_2=\dfrac{\mu_1\gamma_1+\gamma_2\lambda-\lambda\gamma_1}{\mu_1\mu_2+\mu_1\gamma_1}$. Подставим R_0, R_1, R_2 в систему (6) и найдем G_1: $G_1=\dfrac{\lambda\left(\gamma_2\mu_2+\mu_1\gamma_1+\gamma_1\gamma_2+\mu_2\lambda+\gamma_2\lambda\right)}{\mu_1\mu_2-\mu_2\lambda-\gamma_2\lambda}$.

Асимптотика первого порядка определяет среднее значение числа поступивших заявок в системе. Для более детального исследования процесса $i(t)$ следует рассмотреть асимптотику второго порядка.

5. Асимптотика второго порядка

Сделаем замены:

$$H_k(u)=exp\left\{\frac{G_1}{\sigma}ju\right\}H_k^{(2)}(u),$$

$$\begin{cases}
-\left(\lambda+\gamma_1\right)e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_0^{(2)}(u)+j\sigma e^{ju}\left[e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}\dfrac{G_1}{\sigma}jH_0^{(2)}(u)+e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}\dfrac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u}\right]+\\
\quad+\mu_1e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_1^{(2)}(u)+\mu_2e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_2^{(2)}(u)=0,\\
-\left(\lambda+\mu_1+\gamma_2\right)e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_1^{(2)}(u)+\lambda e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_0^{(2)}(u)-\\
\quad-j\sigma\left[e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}\dfrac{G_1}{\sigma}jH_0^{(2)}(u)+e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}\dfrac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u}\right]+\lambda e^{ju}e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_1^{(2)}(u)=0,\\
-\left(\lambda+\mu_2\right)e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_2^{(2)}(u)+\gamma_2e^{ju}e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_1^{(2)}(u)+\lambda e^{ju}e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_2^{(2)}(u)+\\
\quad+\gamma_1e^{\frac{G_1}{\sigma}ju}H_0^{(2)}(u)=0.
\end{cases}$$

В предельном условии большой задержки на орбите обозначим $\sigma=\varepsilon^2$, введем следующие замены: $u=w\varepsilon$, $H_k^{(2)}(u)=F_k^{(2)}(w,\varepsilon)$. Получаем систему:

$$\begin{cases}
-\left(\lambda+\gamma_1\right)e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+je^{jw\varepsilon}e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}G_1jF_0^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon e^{jw\varepsilon}e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}\dfrac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}+\\
\quad+\mu_1e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\mu_2e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_2^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\\
-\left(\lambda+\mu_1+\gamma_2\right)e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\lambda e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_0^{(2)}(w,\varepsilon)-je^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}G_1jF_0^{(2)}(w,\varepsilon)+\\
\quad+j\varepsilon e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}\dfrac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}+\lambda e^{jw\varepsilon}e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\\
-\left(\lambda+\mu_2\right)e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_2^{(2)}(w,\varepsilon)+\gamma_2e^{jw\varepsilon}e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\\
\quad+\lambda e^{jw\varepsilon}e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_2^{(2)}(w,\varepsilon)+\gamma_1e^{\frac{G_1}{\varepsilon}jw}F_0^{(2)}(w,\varepsilon)=0.
\end{cases}\tag{7}$$

Решение $F_k^{(2)}(w,\varepsilon)$ запишем в виде разложения

$$F_k^{(2)}(w,\varepsilon)=\left(R_k+jw\varepsilon f_k\right)\Phi^{(2)}(w)+O\left(\varepsilon^2\right).\tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и используя разложение $e^{jw\varepsilon}=1+jw\varepsilon+O\left(\varepsilon^2\right)$, получаем систему:

$$\begin{cases} \left(-\lambda-\gamma_1-e^{jw\varepsilon}G_1\right)\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)+j\varepsilon e^{jw\varepsilon}\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)'\Phi^{(2)}\left(w\right)+ \\ \quad +j\varepsilon e^{jw\varepsilon}\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)\Phi'^{(2)}(w)+\mu_1\left(R_1+jw\varepsilon f_1\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)+\mu_2\left(R_2+jw\varepsilon f_2\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)=0, \\ \left(-\lambda-\mu_1-\gamma_2+\lambda e^{jw\varepsilon}\right)\left(R_1+jw\varepsilon f_1\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)+\left(\lambda+G_1\right)\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)+ \\ \quad +j\varepsilon\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)'\Phi^{(2)}\left(w\right)+j\varepsilon\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)\Phi'^{(2)}(w)=0, \\ \left(-\lambda-\mu_2+\lambda e^{jw\varepsilon}\right)\left(R_2+jw\varepsilon f_2\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)+\gamma_2 e^{jw\varepsilon}\left(R_1+jw\varepsilon f_1\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)+ \\ \quad +\gamma_1\left(R_0+jw\varepsilon f_0\right)\Phi^{(2)}\left(w\right)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Выполняя несложные преобразования с уравнениями системы (9), получаем:

$$\begin{cases} -G_1 j\varepsilon R_0-\lambda j\varepsilon f_0-\gamma_1 j\varepsilon f_0-G_1 j\varepsilon f_0+\mu_1 j\varepsilon f_1+\mu_2 j\varepsilon f_2+j\varepsilon R_0\dfrac{\Phi'^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)}=0, \\ \lambda R_1 j\varepsilon-\mu_1 j\varepsilon f_1-\gamma_2 j\varepsilon f_1+\lambda j\varepsilon f_0+G_1 j\varepsilon f_0+j\varepsilon R_0\dfrac{\Phi'^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)}=0, \\ \lambda R_2 j\varepsilon-\mu_2 j\varepsilon f_2+\gamma_2 R_1 j\varepsilon+\gamma_2 j\varepsilon f_1+\gamma_1 j\varepsilon f_0=0. \end{cases} \tag{10}$$

Полученную систему (10) сократим на общий множитель. Из этой системы можно сделать вывод, что выражение $\dfrac{\Phi'^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)}$ не зависит от w, следовательно, функцию $\Phi^{(2)}(w)$ можно записать в виде $\Phi^{(2)}(w)=\exp\left\{\dfrac{(jw)^2}{2}G_2\right\}$.

Перепишем систему (10) и получим:

$$\begin{cases} -\left(\lambda+\gamma_1+G_1\right)f_0+\mu_1 f_1+\mu_2 f_2-G_1R_0+R_0G_2=0, \\ (\lambda+G_1)f_0-\left(\mu_1+\gamma_2\right)f_1+\lambda R_1+R_0G_2=0, \\ \gamma_1 f_0+\gamma_2 f_1-\mu_2 f_2+\gamma_2 R_1+\lambda R_2=0. \end{cases} \tag{11}$$

Выписывая уравнения системы (11) совместно с дополнительным условием $f_0+f_1+f_2=0$, найдем f_0, f_1, f_2:

$$f_0=\frac{-G_1R_0\gamma_2-G_1R_0\mu_2-R_1\gamma_2\lambda-R_1\lambda\mu_2-R_2\gamma_2\lambda-2R_2\lambda\mu_1+R_2\lambda\mu_2}{2\left(G_1\gamma_2+G1\mu_2+\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\mu_1+\gamma_2\lambda+\gamma_2\mu_2+\lambda\mu_2+\mu_1\mu_2\right)},$$

$$f_1=\frac{G_1R_0\gamma_1+G_1R_0\mu_2-2G_1R_2\lambda+R_1\gamma_1\lambda+R_1\lambda\mu_2-R_2\gamma_1\lambda-2R_2\lambda^2-R_2\lambda\mu_2}{2\left(G_1\gamma_2+G1\mu_2+\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\mu_1+\gamma_2\lambda+\gamma_2\mu_2+\lambda\mu_2+\mu_1\mu_2\right)},$$

$$f_2=\frac{-G_1R_0\gamma_1+G_1R_0\gamma_2+2G_1R_2\lambda-R_1\gamma_1\lambda+R_1\gamma_2\lambda+R_2\gamma_1\lambda+R_2\gamma_2\lambda+2R_2\lambda^2+2R_2\lambda\mu_1}{2\left(G_1\gamma_2+G1\mu_2+\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\mu_1+\gamma_2\lambda+\gamma_2\mu_2+\lambda\mu_2+\mu_1\mu_2\right)}.$$

Подставим f_0, f_1, f_2 в первое уравнение системы (11) и получим: $G_2=\dfrac{G_1R_0+\left(G_1+\gamma_1+\lambda\right)f_0-\mu_1 f_1-\mu_2 f_2}{R_0}$.

Асимптотика второго порядка показывает, что асимптотическое распределение вероятностей числа поступивших заявок в RQ-системе является гауссовским с параметрами G_1/σ и G_2/σ, что позволяет для распределения $P(i)$ построить аппроксимацию вида $P^{(2)}(i)=\dfrac{(L(i+0,5)-L(i-0,5))}{(1-L(-0,5))}$, где $L(x)$ – функция нормального распределения с параметром G_1/σ и G_2/σ.

6. Численные результаты

Рассмотрим систему с параметрами $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 1$, $\gamma_1 = 0.03$, $\gamma_2 = 0.03$, $\lambda = 3$, $\sigma = 1$. В табл. 1 приведены результаты вычисления математического ожидания числа заявок на орбите для различных значений σ. Для каждого значения σ показаны точное значение $M\{i(t)\}$, асимптотическое значение математического ожидания G_1/σ и относительная погрешность $\Delta = \dfrac{\left| M\{i(t)\} - \dfrac{G_1}{\sigma} \right|}{M\{i(t)\}}$.

Таблица 1

Сравнение асимптотических и аналитических значений математического ожидания

σ	1	0,1	0,01	0,001
$M\{i(t)\}$	3,074	26,075	256,086	2556,197
G_1/σ	2,556	25,557	255,568	2555,678
Δ	0,169	0,020	0,002	0,0002

Отсюда видно, что асимптотический метод можно применять для нахождения среднего числа заявок на орбите при большом времени ожидания на орбите, т.е. при $\sigma < 0,01$.

Заключение

В работе исследована M/M/1 RQ-система с ненадежным прибором. Система уравнений Колмогорова решена методом производящей функции. Получено стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.* AccessibleBibliographyonRetrialQueues // Progressin 2000–2009 MathematicalandComputerModeling. – 2010. – Vol. 51. – P. 1071 – 1081.

2. *Дудин А.Н., Дудин С.А.* Краткий обзор работ в области исследования систем массового обслуживания с ненадежными обслуживающими приборами // В сборнике: Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии, материалы международного научного конгресса. С. В. Абламейко (гл. редактор). 2016. С. 612-616.

3. *Bin Sun, Moon Ho Lee, Sergey A. Dudin, Alexander N. Dudin* Analysis of multiserver queueing system with opportunistic occupation and reservation of servers // Mathematical Problems in Engineering. 2014. ID 178108. P. 1–13.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ И НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Шульгина К.С., Пауль С.В.

Томский государственный университет

shulgina19991999@mail.ru, paulsv82@mail.ru

Введение

RQ-системы – это системы массового обслуживания с повторными вызовами [1,2]. Они характеризуются тем, что поступившая в систему заявка в случае занятости сервера обслуживанием другой заявки, отправляется на орбиту и после случайной задержки пытается вновь встать на прибор. Примером таких систем являются системы обслуживания, как call-центры, моделированию которых посвящены следующие работы [3,4,5].

Мы рассматриваем в качестве математических моделей call-центров, где операторы не только получают вызовы, но и выполняют исходящие вызовы во время простоя прибора – RQ-системы с вызываемыми заявками [6,7,8].

Наряду с этим, рассматриваются RQ-системы с ненадежным прибором, т.е. обслуживающее устройство может выходить из строя и восстанавливаться в течение случай-