МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

Международной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 28–30 мая 2020 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательство Томского государственного университета
2020

ББК 22.17–22.19
УДК 519.2, 519.7, 519.8
Т78

Т78 Труды Томского государственного университета. – Т. 305. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2020. – 322 с.

ISBN 978-5-94621-970-9

Сборник содержит материалы Международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», проводившейся 28–30 мая 2020 г. на базе Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

УДК 539.3.004
ББК 22,25.22.251.22.62

ISBN 978-5-94621-970-9

```
        .periodic(3)
        .addHandler(event -> System.out.println(
           "Message from periodic const event: " +
              event.getActivateTime()))
        .build();
```

После этого помещаем эти два события в провайдер, созданный ранее:

```
eventProvider.add(randomPeriodic);
eventProvider.add(constPeriodic);
```

Остаётся только инициализировать модель созданным выше контекстом, добавить условие останова и запустить имитационную модель:

```
SimulationModelImpl model =
   new SimulationModelImpl(simulationContext);
model.setStopCondition(new TimeStopCondition(10));
model.run();
```

Заключение

В данной работе был представлен разработанный фреймворк дискретно-событийного моделирования. В дальнейшем планируется доработка фреймворка, добавление компонентов для имитационного моделирования систем и сетей массового обслуживания, создание удобного пользовательского интерфейса для быстрого конструирования систем, добавление автоматизированного расчёта необходимой статистики и вывода результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлёв С.С.* Краткий обзор методов и средств имитационного моделирования производственных систем // Журнал: Проблемы информатики // Рубрика: Имитационное моделирование технических систем и технологических процессов, 2009. 47 – 53.
2. *Рыжиков Ю.И., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Проблемы теории и практики имитационного моделирования // Сб. докл. III Всерос. науч.-прак. конф. «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2007). Санкт-Петербург, 17-19 окт. 2007. Т. 1. 58 – 70.
3. *Кельтон В., Лоу А.* Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. – СПб.: Питер: Киев: Издательская группа BHV, 2004. 847 с.
4. *Wagner G.* AOR modelling and simulation: Towards a general architecture for agent-based discrete event simulation // International Bi-Conference Workshop on Agent-Oriented Information System. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 174 – 188.
5. *Welsh M.* The staged event-driven architecture for highly-concurrent server applications // University of California, Berkeley. – 2000.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Ключникова П.Н., Пауль С.В.

Томский государственный университет

polya.klyuch@gmail.com, paulsv82@mail.ru

Введение

В настоящее время телекоммуникационные системы, такие как компьютерные, телефонные сети, мобильная связь, call-центры, играют всё большую роль в нашей жизни. Отметим, что системы массового обслуживания являются адекватными математическими моделями вышеперечисленных реальных систем [1,2].

На данный момент есть много работ о моделировании различных телекоммуникационных систем [3,4,5], но большинство из них не рассматривает возможность повторного обращения к прибору. Системы массового обслуживания с повторными вызовами

(RQ-системы) [6] как раз позволяют исследовать подобные системы. Исследования различных RQ-систем доступны для изучения в работах [7,8,9,10].

В данной статье рассматривается циклическая система с повторными вызовами. Для исследования используется метод асимптотического анализа [11], применение которого позволяет найти распределение вероятностей числа заявок на орбитах в таких системах.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим две RQ-системы (рис. 1). На вход каждой системы поступает простейший поток событий с интенсивностью $\lambda_n,\ n=1,2$. Заявки каждого потока формируют свою орбиту неограниченного объема. Один прибор обходит две RQ-системы в циклическом порядке, начиная с первой и заканчивая второй, потом цикл повторяется. Время нахождения прибора у n-й RQ-системы имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром αn, $n=1,2$. Если поступившая заявка входящего потока обнаруживает прибор занятым или не подключенным, она мгновенно уходит на соответствующую орбиту, где осуществляет случайную задержку в течение экспоненциального времени с параметром $\sigma_n,\ n=1,2$, после которой вновь обращается к прибору. В течение этого времени прибор обслуживает заявки, которые поступают из входящего потока и с орбиты. Время обслуживания заявок имеет экспоненциальную функцию распределения с параметрами $\mu_n,\ n=1,2$.

Если заявок на орбите к моменту прихода прибора нет или он обслужил все заявки, которые находились на орбите, и из входящего потока больше не поступили новые заявки, прибор все равно остается подключенным к RQ-системе, пока не истечет время подключения. Методом исследования циклической системы является ее декомпозиция и исследование систем с прогулками прибора.

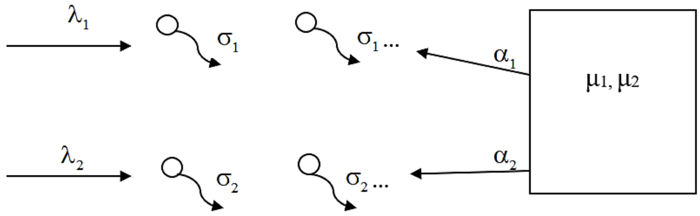

Рис. 1. Циклическая RQ-система

1.1. Система с прогулками

Для исследования циклической RQ-системы, перейдём к системе с прогулками (рис. 2). Переход к системе с прогулками, является одним из методов исследования циклических систем [12].

Рассмотрим RQ-систему с одним обслуживающим прибором и орбитой с неограниченным числом мест для ожидания. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Система функционирует в циклическом режиме, цикл которой состоит из двух последовательных интервалов. В течение первого интервала прибор обслуживает заявки, которые поступают из входящего потока с экспоненциальной функцией распределения с параметром μ. Если поступившая заявка из входящего потока обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку в течение экспоненциального времени с параметром σ, после которой вновь обращается к прибору.

Если заявок на орбите нет к моменту начала этого интервала или прибор обслужил все заявки, которые на этом интервале находились на орбите, то прибор все равно остается в этом режиме, ожидая прихода заявок. От момента окончания этого интервала прибор уходит на «прогулку», в течение второго интервала указанного цикла. Во время прогулки, пришедшие в систему, заявки накапливаются на орбите и ждут, когда прибор вернется на обслуживание.

Пусть продолжительности этих интервалов случайные и определяются экспоненциальными функциями распределения с параметрами α_1 и α_2 соответственно. Будем рассматривать системы без дообслуживания заявок. Когда прибор уходит на прогулку, недообслуженная заявка уходит обратно на орбиту.

Найдем распределение вероятностей числа заявок на орбите в момент времени t в системе с прогулками прибора, тем самым определим распределение вероятностей числа заявок на орбите в выделенной первой подсистеме циклической RQ-системы.

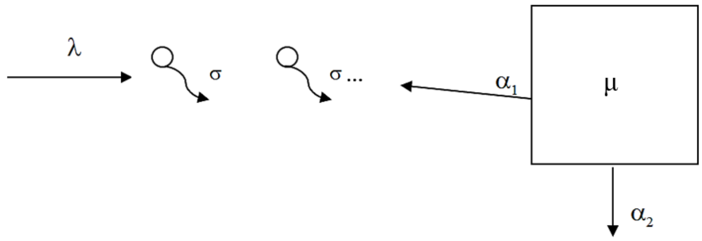

Рис. 2. RQ-система с прогулками прибора

1.2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $k(t)$ – состояние прибора: 0 – свободен, 1 – прибор обслуживает заявку, 2 – прибор на прогулке.

Рассмотрим двумерный Марковский процесс $\{k(t), i(t)\}$, для распределения вероятностей $P_k(i,t) = P_k\{i(t) = i\}$ которого составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma + \alpha_1) P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + \alpha_2 P_2(i,t),\\
&\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu + \alpha_1) P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + (i+1)\sigma P_0(i+1,t) + \lambda P_1(i-1,t),\\
&\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \alpha_2) P_2(i,t) + \alpha_1 P_1(i-1,t) + \alpha_1 P_0(i,t) + \lambda P_2(i-1,t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Систему (1) запишем в стационарном режиме:

$$-(\lambda + i\sigma + \alpha_1) P_0(i) + \mu P_1(i) + \alpha_2 P_2(i) = 0,$$
$$-(\lambda + \mu + \alpha_1) P_1(i) + \lambda P_0(i) + (i+1)\sigma P_0(i+1) + \lambda P_1(i-1) = 0,$$
$$-(\lambda + \alpha_2) P_2(i) + \alpha_1 P_1(i-1) + \alpha_1 P_0(i) + \lambda P_2(i-1) = 0.$$

1.3. Метод частичных характеристических функций

Введем частичные характеристические функции: $H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i)$, $k = \overline{0,2}$. Получим систему уравнений для частичных характеристических функций:

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + \alpha_1) H_0(u) + j\sigma H_0'(u) + \mu H_1(u) + \alpha_2 H_2(u) = 0,\\
&-(\lambda + \mu + \alpha_1) H_1(u) + \lambda H_0(u) - j\sigma e^{-ju} H_0'(u) + \lambda e^{ju} H_1(u) = 0,\\
&-(\lambda + \alpha_2) H_2(u) + \alpha_1 e^{ju} H_1(u) + \alpha_1 H_0(u) + \lambda e^{ju} H_2(u) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Просуммируем уравнения системы (2):

$$e^{-ju} j\sigma H_0'(u) + (\lambda + \alpha_1) H_1(u) + \lambda H_2(u) = 0. \tag{3}$$

Систему (2)–(3) будем решать асимптотическим методом в предельном условии $\sigma \to 0$.

1.4. Асимптотика первого порядка

Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и выполним в (2) и (3) замены:

$$u = \varepsilon w,\ H_k(u) = F_k(w,\varepsilon),\ k = \overline{0,2}. \tag{4}$$

Запишем систему уравнений для функций $F_k(w,\varepsilon)$:

$$-\left(\lambda+\alpha_1\right)F_0(w,\varepsilon) + j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} + \mu F_1(w,\varepsilon) + \alpha_2 F_2(w,\varepsilon) = 0,$$

$$-\left(\lambda+\mu+\alpha_1\right)F_1(w,\varepsilon) + \lambda F_0(w,\varepsilon) - je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda e^{j\varepsilon w}F_1(w,\varepsilon) = 0,$$

$$-(\lambda+\alpha_2)F_2(w,\varepsilon) + \alpha_1 e^{j\varepsilon w}F_1(w,\varepsilon) + \alpha_1 F_0(w,\varepsilon) + \lambda e^{j\varepsilon w}F_2(w,\varepsilon) = 0,$$

$$e^{-ju} j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} + \left(\lambda+\alpha_1\right)F_1(w,\varepsilon) + \lambda F_2(w,\varepsilon) = 0.$$

Устремим $\varepsilon \to 0$ и получим систему:

$$\begin{aligned}
&-\left(\lambda+\alpha_1\right)F_0(w) + jF_0'(w) + \mu F_1(w) + \alpha_2 F_2(w) = 0,\\
&-\left(\mu+\alpha_1\right)F_1(w) + \lambda F_0(w) - jF_0'(w) = 0,\\
&-\alpha_2 F_2(w) + \alpha_1 F_1(w) + \alpha_1 F_0(w) = 0,\\
&jF_0'(w) + \left(\lambda+\alpha_1\right)F_1(w) + \lambda F_2(w) = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

решение которой будем искать в виде:

$$F_k(w) = r_k\Phi(w), \tag{6}$$

где r_k – распределение вероятностей состояний прибора. Подставим выражение (6) в систему (5) и разделим полученную систему на $\Phi(w)$:

$$\begin{aligned}
&-\left(\lambda+\alpha_1\right)r_0 + jr_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \mu r_1 + \alpha_2 r_2 = 0,\\
&-\left(\mu+\alpha_1\right)r_1 + \lambda r_0 - jr_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = 0,\\
&-\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_0 = 0,\\
&jr_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \left(\lambda+\alpha_1\right)r_1 + \lambda r_2 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Так как отношение $\dfrac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w, то скалярная функция $\Phi(w)$ имеет вид $\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\}$, тогда $j\dfrac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$. Подставим это значение в систему (7):

$$\begin{aligned}
&-\left(\lambda+\alpha_1\right)r_0 - r_0\kappa_1 + \mu r_1 + \alpha_2 r_2 = 0,\\
&-\left(\mu+\alpha_1\right)r_1 + \lambda r_0 + r_0\kappa_1 = 0,\\
&-\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_0 = 0,\\
&-r_0\kappa_1 + \left(\lambda+\alpha_1\right)r_1 + \lambda r_2 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая условие нормировки для распределения r_k, $k = \overline{0,2}$: $r_0 + r_1 + r_2 = 1$, получим систему уравнений:

$$-\left(\lambda+\alpha_1\right)r_0 - r_0\kappa_1 + \mu r_1 + \alpha_2 r_2 = 0,$$

$$-\left(\mu+\alpha_1\right)r_1 + \lambda r_0 + r_0\kappa_1 = 0,$$

$$-\alpha_2 r_2+\alpha_1 r_1+\alpha_1 r_0=0,$$
$$-r_0\kappa_1+\left(\lambda+\alpha_1\right)r_1+\lambda r_2=0,$$
$$r_0+r_1+r_2=1.$$

Решим данную систему:

$$r_2=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2},\ r_0=\frac{\mu\alpha_2-\lambda\alpha_2-\lambda\alpha_1}{\mu\left(\alpha_1+\alpha_2\right)},\ r_1=\frac{\lambda}{\mu},\ \kappa_1=\frac{\lambda\mu\alpha_1+\lambda\alpha_1\alpha_2+\lambda\alpha_1{}^2+\lambda^2\alpha_2+\lambda^2\alpha_1}{\mu\alpha_2-\lambda\alpha_2-\lambda\alpha_1},\quad (9)$$

(9) – решение данной системы.

1.5. Асимптотика второго порядка

В системе уравнений (4)–(5) сделаем замены: $H_k(u)=\exp\left(j\frac{u}{\sigma}\kappa_1\right)H_k^{(2)}(u)$, получим систему:

$$\begin{aligned}
&-\left(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\right)H_0^{(2)}(u)+j\sigma\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}+\mu H_1^{(2)}(u)+\alpha_2 H_2^{(2)}(u)=0,\\
&-\left(\mu+\alpha_1+\lambda\left(1-\mathrm{e}^{ju}\right)\right)H_1^{(2)}(u)+\left(\lambda+\kappa_1\,\mathrm{e}^{-ju}\right)H_0^{(2)}(u)-j\sigma\mathrm{e}^{-ju}\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}=0,\\
&-\left(\alpha_2+\lambda\left(1-\mathrm{e}^{ju}\right)\right)H_2^{(2)}(u)+\alpha_1\,\mathrm{e}^{ju}H_1^{(2)}(u)+\alpha_1 H_0^{(2)}(u)=0,\\
&-\kappa_1\,\mathrm{e}^{-ju}H_0^{(2)}(u)+j\sigma\mathrm{e}^{-ju}\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du}+\left(\lambda+\alpha_1\right)H_1^{(2)}(u)+\lambda H_2^{(2)}(u)=0.
\end{aligned}\quad (10)$$

Обозначим $\sigma=\varepsilon^2$ и в системе (10) сделаем замены: $u=\varepsilon w$, $H_k^{(2)}(u)=F_k^{(2)}(w,\varepsilon)$, $k=\overline{0,2}$, получим систему уравнений:

$$-\left(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\right)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\alpha_2 F_2^{(2)}(w,\varepsilon)=0,$$
$$-\left(\mu+\alpha_1+\lambda\left(1-\mathrm{e}^{j\varepsilon w}\right)\right)F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\left(\lambda+\kappa_1\,\mathrm{e}^{-j\varepsilon w}\right)F_0^{(2)}(w,\varepsilon)-j\varepsilon\mathrm{e}^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0,$$
$$-\left(\alpha_2+\lambda\left(1-\mathrm{e}^{j\varepsilon w}\right)\right)F_2^{(2)}(w,\varepsilon)+\alpha_1\,\mathrm{e}^{j\varepsilon w}F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\alpha_1 F_0^{(2)}(w,\varepsilon)=0,$$
$$-\kappa_1\,\mathrm{e}^{-j\varepsilon w}F_0^{(2)}(w,\varepsilon)+j\varepsilon\mathrm{e}^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}+\left(\lambda+\alpha_1\right)F_1^{(2)}(w,\varepsilon)+\lambda F_2^{(2)}(w,\varepsilon)=0.$$

В полученную систему подставим разложение: $F_k^{(2)}(w,\varepsilon)=\Phi_2(w)\left\{r_k+j\varepsilon w f_k\right\}+O\left(\varepsilon^2\right)$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(-\left(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\right)r_0+\mu r_1+\alpha_2 r_2\right)\Phi_2(w)+j\varepsilon r_0\frac{d\Phi_2(w)}{dw}+\\
&\quad+j\varepsilon w\left(-\left(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\right)f_0+\mu f_1+\alpha_2 f_2\right)\Phi_2(w)=O\left(\varepsilon^2\right),\\
&\left(-\left(\mu+\alpha_1\right)r_1+r_0\lambda+r_0\kappa_1\right)\Phi_2(w)+\\
&\quad+j\varepsilon w\left(-\left(\mu+\alpha_1\right)f_1+\lambda r_1-r_0\kappa_1+f_0\left(\lambda+\kappa_1\right)\right)-j\varepsilon r_0\frac{d\Phi_2(w)}{dw}=O\left(\varepsilon^2\right),\\
&\left(-\alpha_2 r_2+\alpha_1 r_1+\alpha_1 r_0\right)\Phi_2(w)+\\
&\quad+j\varepsilon w\left(-(\alpha_2 f_2-r_2\lambda)+\alpha_1 r_1+\alpha_1 f_1+\alpha_1 f_0\right)\Phi_2(w)=O\left(\varepsilon^2\right),\\
&\left(-r_0\kappa_1+\left(\lambda+\alpha_1\right)r_1+\lambda r_2\right)\Phi_2(w)+\\
&\quad+j\varepsilon w\left(\kappa_1 r_0-\kappa_1 f_0+\left(\lambda+\alpha_1\right)f_1+\lambda f_2\right)\Phi_2(w)+j\varepsilon r_0\frac{d\Phi_2(w)}{dw}=O\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned}\quad (11)$$

В систему (11) подставим (8), получим:

$$
\begin{aligned}
& j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} + j\varepsilon w\Big(-\big(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\big) f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2\Big)\Phi_2(w) = O\big(\varepsilon^2\big),\\
& j\varepsilon w\Big(-\big(\mu+\alpha_1\big) f_1 + \lambda r_1 - r_0\kappa_1 + f_0\big(\lambda+\kappa_1\big)\Big) - j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} = O\big(\varepsilon^2\big),\\
& j\varepsilon w\Big(-(\alpha_2 f_2 - r_2\lambda) + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1 f_0\Big)\Phi_2(w) = O\big(\varepsilon^2\big),\\
& j\varepsilon w\Big(\kappa_1 r_0 - \kappa_1 f_0 + \big(\lambda+\alpha_1\big) f_1 + \lambda f_2\Big)\Phi_2(w) + j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} = O\big(\varepsilon^2\big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В системе (12) разделим уравнения на $j\varepsilon w$ и устремим $\varepsilon \to 0$, имеем:

$$
\begin{aligned}
& -\big(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\big) f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2 + r_0 \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = 0,\\
& -\big(\mu+\alpha_1\big) f_1 + \lambda r_1 - r_0\kappa_1 + f_0\big(\lambda+\kappa_1\big) - r_0 \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = 0,\\
& -\big(\alpha_2 f_2 - r_2\lambda\big) + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1 f_0 = 0,\\
& \big(\kappa_1 r_0 - \kappa_1 f_0 + \big(\lambda+\alpha_1\big) f_1 + \lambda f_2\big) + r_0 \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Так как отношение $\dfrac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w, то скалярная функция $\Phi_2(w)$ имеет вид $\Phi_2(w) = \exp\left\{\dfrac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}$, тогда $\dfrac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$. Подставим это значение в систему (13):

$$
\begin{aligned}
& -\big(\lambda+\alpha_1+\kappa_1\big) f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2 = r_0\kappa_2,\\
& \big(\lambda+\kappa_1\big) f_0 - \big(\mu+\alpha_1\big) f_1 = r_0\kappa_1 - r_0\kappa_2 - \lambda r_1,\\
& \alpha_1 f_0 + \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 = -r_2\lambda - \alpha_1 r_1,\\
& -\kappa_1 f_0 + \big(\lambda+\alpha_1\big) f_1 + \lambda f_2 = \kappa_2 r_0 - \kappa_1 r_0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Система (14) – неоднородная система линейных алгебраических уравнений для f_k, $k = \overline{0,2}$. Определитель матрицы коэффициентов системы равен 0, при этом ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов, т.е. система совместна и имеет множество решений.

Рассмотрим однородную систему уравнений (8) и неоднородную систему (14). Сравнивая эти системы, можно увидеть, что система (8) является однородной системой для неоднородной системы (14). Тогда решение системы (14) можно записать в виде $f_k\big(\kappa_2\big) = Cr_k + g_k\big(\kappa_2\big)$, $k = \overline{0,2}$, где C – константа, вероятности r_k определены выше, а величины $g_k\big(\kappa_2\big)$ являются частными решениями неоднородной системы (14), которое удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=0}^{2} g_k\big(\kappa_2\big) = 0$, т.е.

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda+\alpha_1+\kappa_1)g_0(\kappa_2)+\mu g_1(\kappa_2)+\alpha_2 g_2(\kappa_2)=r_0\kappa_2,\\
&(\lambda+\kappa_1)g_0(\kappa_2)-(\mu+\alpha_1)g_0(\kappa_2)=r_0\kappa_1-r_0\kappa_2-\lambda r_1,\\
&\alpha_1 g_0(\kappa_2)+\alpha_1 g_1(\kappa_2)-\alpha_2 g_2(\kappa_2)=-r_2\lambda-\alpha_1 r_1,\\
&-\kappa_1 g_0(\kappa_2)+(\lambda+\alpha_1)g_1(\kappa_2)+\lambda g_2(\kappa_2)=\kappa_2 r_0-\kappa_1 r_0,\\
&\sum_{k=0}^{2} g_k(\kappa_2)=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Решив систему (15), полученные величины $g_k(\kappa_2)$ подставим в выражения для $f_k(\kappa_2)$, а затем в уравнение для нахождения величины κ_2: $-\kappa_1 f_0+(\lambda+\alpha_1)f_1+\lambda f_2=r_0\kappa_2-r_0\kappa_1$. Из последнего уравнения мы найдем величину κ_2.

Заключение

В данной работе ставилась задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите в выделенной подсистеме с повторными вызовами в циклической системе. Задача решена классическим методом «систем с прогулками прибора». Получено распределение вероятностей числа заявок на орбите в системе с прогулками прибора методом асимптотического анализа. Найденное асимптотическое распределение вероятностей числа $i(t)$ является гауссовским с асимптотическим средним κ_1/σ и дисперсией κ_2/σ. Определив гауссовскую плотность распределения вероятностей с этими параметрами мы получим распределение вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе с прогулками прибора в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите. Найденное распределение позволяет выполнить исследование числа заявок на орбите в циклических системах с двумя входящими потоками, в которых время прогулки прибора от одной очереди равно продолжительности периода занятости прибора обслуживанием заявок второй пары потока и орбиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexandre Deslauriers.* Markov chain models of a telephone call center with call blending / Alexandre Deslauriers, Pierre L'Ecuyer, Juta Pichitlamken [et al.]. // Computers & operations research. – 2007. – Vol. 34, no. 6. – P. 1616–1645.

2. *Gilmore Audrey.* Call centres: how can service quality be managed? / Gilmore Audrey, Moreland Lesley. // Irish Marketing Review. – 2000. – Vol. 13, no. 1. – P. 3.

3. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 336 с.

4. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания: [учебное пособие по специальностям 010200 (010501)"Прикладная математика и информатика 061800 (080116)"Математические методы в экономике"]. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

5. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. / А. Я. Хинчин. – Москва, 1963. – Т. 236.

6. *Artalejo Jesus` R.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / Artalejo Jesus` R., Gomez-Corral´ Antonio. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 318 c.

7. *Пауль С.В.* Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, 10-15 сентября 2018 г. / С. В. Пауль, А. А. Назаров. – Томск, 2018. – С. 139-145.

8. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите // Вестник Томского государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика / Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д. – Томск, 2019. – С. 13–20.

9. *Назаров А.А.* Исследование RQ-системы M|M|1|1 с вызываемыми заявками методом асимптотически-диффузионного анализа // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN2019) / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра. – Томск, 2019. – С. 148-155.

10. *Лизюра О.Д.* Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем / О. Д. Лизюра, А. А. Назаров, С. В. Пауль. – Томск, 2019. – С. 241-246.

11. *Лопухова С.В.* Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий : дис. . . . канд. наук / С. В. Лопухова. – Том. гос. ун-та, 2008. – 167 с.
12. *Назаров А.А.* Исследование системы массового обслуживания с "прогулками" прибора, управляемой T-стратегией // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева, Минск, 23-26 февраля 2015 г. / А. А. Назаров, С. В. Пауль. – Минск, 2015. – 202-207 с.

МОДЕЛИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ В ВИДЕ СИСТЕМ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ

Морозова М.А., Пауль С.В., Назаров А.А.
Томский государственный университет
morozova_maria_a@mail.ru, paulsv82@mail.ru, anazarov@fpmk.tsu.ru

Введение

В настоящее время теория массового обслуживания является обширной областью для проведения исследований. Она очень востребована во многих областях науки и продолжает стремительно развиваться.

Чтобы получить представление о случайных процессах, протекающих в системах массового обслуживания, прибегают к их моделированию. Особой популярностью обладают модели call-центров с повторными звонками. Повторные звонки – это повторные обращения к оператору. Системы с повторными звонками называются системами с орбитой (RQ-системы) [1].

Однако call-центры занимаются не только приемом входящих звонков от клиентов, но и производят исходящие вызовы с целью рекламы, проведения опросов или анкетирования (вызываемые заявки). RQ-системы с вызываемыми заявками впервые упомянул Фалин [2]. Такие модели очень популярны в виду их гибкости.

Немало работ посвящено исследованию RQ-систем с вызываемыми заявками: в работе [3] разрабатывают рекуррентный алгоритм для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите, в [4] исследование проводится методом векторно-матричной алгебры.

В данной статье рассматриваются RQ-системы с вызываемыми заявками вида M|M|1|1. Исследование проводится с помощью метода асимптотического анализа [5] при условии большой задержки заявок на орбите, который позволяет найти характеристики системы.

1. Описание математической модели и постановка задачи

Рассмотрим систему с повторными вызовами (RQ-систему) с одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ (рис. 1). Если прибор свободен, то поступившая заявка встает на прибор и обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_1. Если заявка застает прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром σ снова пытается встать на прибор. Когда прибор свободен, он может вызывать заявки извне с интенсивностью α, которые обслуживаются в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_2.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ
Международной научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 28–30 мая 2020 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Издание подготовлено в авторской редакции

Подписано в печать 29.12.2020 г. Формат 70×108 1/16
Печ. л. 20; усл. печ. л. 28.
Тираж 500 экз. Заказ № 4574.

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2) 52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru; e-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-970-9

9 785946 219709