

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**МАТЕРИАЛЫ**  
**Международной научной конференции**  
**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ**  
**И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**  
**ИНФОРМАЦИОННЫХ,**  
**ТЕХНИЧЕСКИХ**  
**И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

**Томск, 28–30 мая 2020 г.**

*Под общей редакцией*  
*кандидата технических наук И.С. Шмырина*

Томск  
Издательство Томского государственного университета  
2020

**ББК 22.17–22.19**  
**УДК 519.2, 519.7, 519.8**  
**T78**

**ЧЛЕНЫ КОЛЛЕГИИ, РУКОВОДИТЕЛИ НАУЧНЫХ РЕДАКЦИЙ  
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ:**

д-р техн. наук, проф. **А.А. Глазунов** – научная редакция «Механика, математика»; д-р техн. наук, проф. **Э.Р. Шрагер** – научная редакция «Механика, математика»; д-р техн. наук, проф. **А.М. Горцев** – научная редакция «Информатика и кибернетика»; д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко** – научная редакция «Информатика и кибернетика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **В.Г. Багров** – научная редакция «Физика»; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.И. Потекаев** – научная редакция «Физика»; д-р биол. наук, проф. **С.П. Кулижский** – научная редакция «Биология»; д-р геол.-минер. наук, проф. **В.П. Парначев** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; канд. хим. наук, доц. **Ю.Г. Слижов** – научная редакция «Науки о Земле, химия»; д-р филол. наук, проф. **Т.А. Демешкина** – научная редакция «История, филология»; д-р ист. наук, проф. **В.П. Зиновьев** – научная редакция «История, филология»; д-р экон. наук, проф. **В.И. Канов** – научная редакция «Юридические и экономические науки»; д-р юрид. наук, проф. **В.А. Уткин** – научная редакция «Юридические и экономические науки»; д-р ист. наук, проф. **Э.И. Черняк** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствознание»; д-р психол. наук, проф. **Э.В. Галажинский** – научная редакция «Философия, социология, психология, педагогика, искусствознание»

**НАУЧНАЯ РЕДАКЦИЯ ТОМА:**

д-р техн. наук, проф. **А.М. Горцев**, д-р техн. наук, проф. **С.П. Сущенко**, д-р физ.-мат. наук, доц. **Ю.Г. Дмитриев**, д-р физ.-мат. наук, доц. **С.П. Моисеева**, д-р физ.-мат. наук, проф. **В.В. Конев**, д-р техн. наук, проф. **А.Ю. Матросова**, д-р техн. наук, проф. **А.А. Назаров**, д-р техн. наук, проф. **К.И. Лившиц**, канд. техн. наук **С.А. Останин**, канд. физ.-мат. наук **А.С. Морозова**, канд. техн. наук **А.С. Шкуркин**, канд. техн. наук **И.С. Шмырин**.

**T78** Труды Томского государственного университета. – Т. 305. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы Международной научной конференции. Томск, 28–30 мая 2020 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2020. – 322 с.

ISBN 978-5-94621-970-9

Сборник содержит материалы Международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», проводившейся 28–30 мая 2020 г. на базе Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. Материалы сгруппированы в соответствии с работавшими на конференции секциями.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов.

**УДК 539.3.004**  
**ББК 22,25.22.251.22.62**

ISBN 978-5-94621-970-9

© Томский государственный университет, 2020

```

.periodic(3)
.addHandler(event -> System.out.println(
    "Message from periodic const event: " +
    event.getActivateTime()))
.build();

```

После этого помещаем эти два события в провайдер, созданный ранее:

```

eventProvider.add(randomPeriodic);
eventProvider.add(constPeriodic);

```

Остаётся только инициализировать модель созданным выше контекстом, добавить условие останова и запустить имитационную модель:

```

SimulationModelImpl model =
    new SimulationModelImpl(simulationContext);
model.setStopCondition(new TimeStopCondition(10));
model.run();

```

### Заключение

В данной работе был представлен разработанный фреймворк дискретно-событийного моделирования. В дальнейшем планируется доработка фреймворка, добавление компонентов для имитационного моделирования систем и сетей массового обслуживания, создание удобного пользовательского интерфейса для быстрого конструирования систем, добавление автоматизированного расчёта необходимой статистики и вывода результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлёв С.С. Краткий обзор методов и средств имитационного моделирования производственных систем // Журнал: Проблемы информатики // Рубрика: Имитационное моделирование технических систем и технологических процессов, 2009. 47 – 53.
2. Рыжиков Ю.И., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Проблемы теории и практики имитационного моделирования // Сб. докл. III Всерос. науч.-прак. конф. «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2007). Санкт-Петербург, 17-19 окт. 2007. Т. 1. 58 – 70.
3. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. 847 с.
4. Wagner G. AOR modelling and simulation: Towards a general architecture for agent-based discrete event simulation // International Bi-Conference Workshop on Agent-Oriented Information System. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 174 – 188.
5. Welsh M. The staged event-driven architecture for highly-concurrent server applications // University of California, Berkeley. – 2000.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

**Ключникова П.Н., Пауль С.В.**

*Томский государственный университет*  
 polya.klyuch@gmail.com, paulsv82@mail.ru

### Введение

В настоящее время телекоммуникационные системы, такие как компьютерные, телефонные сети, мобильная связь, call-центры, играют всё большую роль в нашей жизни. Отметим, что системы массового обслуживания являются адекватными математическими моделями вышеречисленных реальных систем [1,2].

На данный момент есть много работ о моделировании различных телекоммуникационных систем [3,4,5], но большинство из них не рассматривает возможность повторного обращения к прибору. Системы массового обслуживания с повторными вызовами

(RQ-системы) [6] как раз позволяют исследовать подобные системы. Исследования различных RQ-систем доступны для изучения в работах [7,8,9,10].

В данной статье рассматривается циклическая система с повторными вызовами. Для исследования используется метод асимптотического анализа [11], применение которого позволяет найти распределение вероятностей числа заявок на орбитах в таких системах.

### 1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим две RQ-системы (рис. 1). На вход каждой системы поступает простейший поток событий с интенсивностью  $\lambda_n$ ,  $n=1,2$ . Заявки каждого потока формируют свою орбиту неограниченного объема. Один прибор обходит две RQ-системы в циклическом порядке, начиная с первой и заканчивая второй, потом цикл повторяется. Время нахождения прибора у  $n$ -й RQ-системы имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром  $\alpha_n$ ,  $n=1,2$ . Если поступившая заявка входящего потока обнаруживает прибор занятым или не подключенным, она мгновенно уходит на соответствующую орбиту, где осуществляет случайную задержку в течение экспоненциального времени с параметром  $\sigma_n$ ,  $n=1,2$ , после которой вновь обращается к прибору. В течение этого времени прибор обслуживает заявки, которые поступают из входящего потока и с орбиты. Время обслуживания заявок имеет экспоненциальную функцию распределения с параметрами  $\mu_n$ ,  $n=1,2$ .

Если заявок на орбите к моменту прихода прибора нет или он обслужил все заявки, которые находились на орбите, и из входящего потока больше не поступили новые заявки, прибор все равно остается подключенным к RQ-системе, пока не истечет время подключения. Методом исследования циклической системы является ее декомпозиция и исследование систем с прогулками прибора.

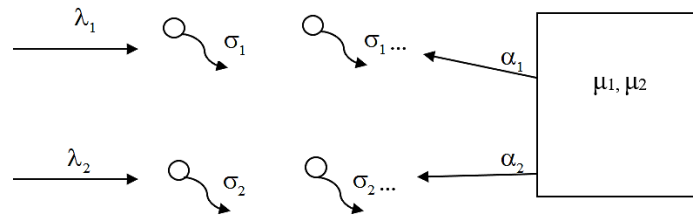


Рис. 1. Циклическая RQ-система

#### 1.1. Система с прогулками

Для исследования циклической RQ-системы, перейдем к системе с прогулками (рис. 2). Переход к системе с прогулками, является одним из методов исследования циклических систем [12].

Рассмотрим RQ-систему с одним обслуживающим прибором и орбитой с неограниченным числом мест для ожидания. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Система функционирует в циклическом режиме, цикл которой состоит из двух последовательных интервалов. В течение первого интервала прибор обслуживает заявки, которые поступают из входящего потока с экспоненциальной функцией распределения с параметром  $\mu$ . Если поступившая заявка из входящего потока обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку в течение экспоненциального времени с параметром  $\sigma$ , после которой вновь обращается к прибору.

Если заявок на орбите нет к моменту начала этого интервала или прибор обслужил все заявки, которые на этом интервале находились на орбите, то прибор все равно остается в этом режиме, ожидая прихода заявок. От момента окончания этого интервала прибор уходит на «прогулку», в течение второго интервала указанного цикла. Во время

прогулки, пришедшие в систему, заявки накапливаются на орбите и ждут, когда прибор вернется на обслуживание.

Пусть продолжительности этих интервалов случайные и определяются экспоненциальными функциями распределения с параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно. Будем рассматривать системы без дообслуживания заявок. Когда прибор уходит на прогулку, недообслуженная заявка уходит обратно на орбиту.

Найдем распределение вероятностей числа заявок на орбите в момент времени  $t$  в системе с прогулками прибора, тем самым определим распределение вероятностей числа заявок на орбите в выделенной первой подсистеме циклической RQ-системы.

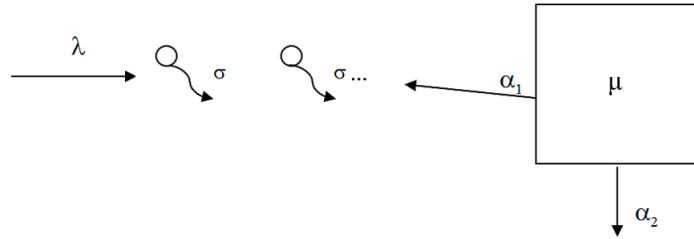


Рис. 2. RQ-система с прогулками прибора

### 1.2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначим  $i(t)$  – число заявок на орбите в момент времени  $t$ ,  $k(t)$  – состояние прибора: 0 – свободен, 1 – прибор обслуживает заявку, 2 – прибор на прогулке.

Рассмотрим двумерный Марковский процесс  $\{k(t), i(t)\}$ , для распределения вероятностей  $P_k(i, t) = P_k\{i(t) = i\}$  которого составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + \alpha_1)P_0(i, t) + \mu P_1(i, t) + \alpha_2 P_2(i, t), \\ \frac{\partial P_1(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu + \alpha_1)P_1(i, t) + \lambda P_0(i, t) + (i+1)\sigma P_0(i+1, t) + \lambda P_1(i-1, t), \\ \frac{\partial P_2(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \alpha_2)P_2(i, t) + \alpha_1 P_1(i-1, t) + \alpha_1 P_0(i, t) + \lambda P_2(i-1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Систему (1) запишем в стационарном режиме:

$$\begin{aligned} -(\lambda + i\sigma + \alpha_1)P_0(i) + \mu P_1(i) + \alpha_2 P_2(i) &= 0, \\ -(\lambda + \mu + \alpha_1)P_1(i) + \lambda P_0(i) + (i+1)\sigma P_0(i+1) + \lambda P_1(i-1) &= 0, \\ -(\lambda + \alpha_2)P_2(i) + \alpha_1 P_1(i-1) + \alpha_1 P_0(i) + \lambda P_2(i-1) &= 0. \end{aligned}$$

### 1.3. Метод частичных характеристических функций

Введем частичные характеристические функции:  $H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i)$ ,  $k = \overline{0, 2}$ . Получим систему уравнений для частичных характеристических функций:

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1)H_0(u) + j\sigma H_0'(u) + \mu H_1(u) + \alpha_2 H_2(u) &= 0, \\ -(\lambda + \mu + \alpha_1)H_1(u) + \lambda H_0(u) - j\sigma e^{-ju} H_0'(u) + \lambda e^{ju} H_1(u) &= 0, \\ -(\lambda + \alpha_2)H_2(u) + \alpha_1 e^{ju} H_1(u) + \alpha_1 H_0(u) + \lambda e^{ju} H_2(u) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Просуммируем уравнения системы (2):

$$e^{-ju} j\sigma H_0'(u) + (\lambda + \alpha_1)H_1(u) + \lambda H_2(u) = 0. \quad (3)$$

Систему (2)–(3) будем решать асимптотическим методом в предельном условии  $\sigma \rightarrow 0$ .

#### 1.4. Асимптотика первого порядка

Обозначим  $\sigma = \varepsilon$  и выполним в (2) и (3) замены:

$$u = \varepsilon w, \quad H_k(u) = F_k(w, \varepsilon), \quad k = \overline{0, 2}. \quad (4)$$

Запишем систему уравнений для функций  $F_k(w, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1)F_0(w, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu F_1(w, \varepsilon) + \alpha_2 F_2(w, \varepsilon) &= 0, \\ -(\lambda + \mu + \alpha_1)F_1(w, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \varepsilon) - j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + \lambda e^{j\varepsilon w} F_1(w, \varepsilon) &= 0, \\ -(\lambda + \alpha_2)F_2(w, \varepsilon) + \alpha_1 e^{j\varepsilon w} F_1(w, \varepsilon) + \alpha_1 F_0(w, \varepsilon) + \lambda e^{j\varepsilon w} F_2(w, \varepsilon) &= 0, \\ e^{-ju} j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + (\lambda + \alpha_1)F_1(w, \varepsilon) + \lambda F_2(w, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим систему:

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1)F_0(w) + jF_0'(w) + \mu F_1(w) + \alpha_2 F_2(w) &= 0, \\ -(\mu + \alpha_1)F_1(w) + \lambda F_0(w) - jF_0'(w) &= 0, \\ -\alpha_2 F_2(w) + \alpha_1 F_1(w) + \alpha_1 F_0(w) &= 0, \\ jF_0'(w) + (\lambda + \alpha_1)F_1(w) + \lambda F_2(w) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

решение которой будем искать в виде:

$$F_k(w) = r_k \Phi(w), \quad (6)$$

где  $r_k$  – распределение вероятностей состояний прибора. Подставим выражение (6) в систему (5) и разделим полученную систему на  $\Phi(w)$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1)r_0 + jr_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \mu r_1 + \alpha_2 r_2 &= 0, \\ -(\mu + \alpha_1)r_1 + \lambda r_0 - jr_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} &= 0, \\ -\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_0 &= 0, \\ jr_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + (\lambda + \alpha_1)r_1 + \lambda r_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как отношение  $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$  не зависит от  $w$ , то скалярная функция  $\Phi(w)$  имеет вид

$\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\}$ , тогда  $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$ . Подставим это значение в систему (7):

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1)r_0 - r_0\kappa_1 + \mu r_1 + \alpha_2 r_2 &= 0, \\ -(\mu + \alpha_1)r_1 + \lambda r_0 + r_0\kappa_1 &= 0, \\ -\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_0 &= 0, \\ -r_0\kappa_1 + (\lambda + \alpha_1)r_1 + \lambda r_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая условие нормировки для распределения  $r_k$ ,  $k = \overline{0, 2}$ :  $r_0 + r_1 + r_2 = 1$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1)r_0 - r_0\kappa_1 + \mu r_1 + \alpha_2 r_2 &= 0, \\ -(\mu + \alpha_1)r_1 + \lambda r_0 + r_0\kappa_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_0 &= 0, \\ -r_0 \kappa_1 + (\lambda + \alpha_1) r_1 + \lambda r_2 &= 0, \\ r_0 + r_1 + r_2 &= 1. \end{aligned}$$

Решим данную систему:

$$r_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad r_0 = \frac{\mu \alpha_2 - \lambda \alpha_2 - \lambda \alpha_1}{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad r_1 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \kappa_1 = \frac{\lambda \mu \alpha_1 + \lambda \alpha_1 \alpha_2 + \lambda \alpha_1^2 + \lambda^2 \alpha_2 + \lambda^2 \alpha_1}{\mu \alpha_2 - \lambda \alpha_2 - \lambda \alpha_1}, \quad (9)$$

(9) – решение данной системы.

### 1.5. Асимптотика второго порядка

В системе уравнений (4)–(5) сделаем замены:  $H_k(u) = \exp\left(j \frac{u}{\sigma} \kappa_1\right) H_k^{(2)}(u)$ , получим систему:

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1) H_0^{(2)}(u) + j\sigma \frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} + \mu H_1^{(2)}(u) + \alpha_2 H_2^{(2)}(u) &= 0, \\ -(\mu + \alpha_1 + \lambda(1 - e^{ju})) H_1^{(2)}(u) + (\lambda + \kappa_1 e^{-ju}) H_0^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} &= 0, \\ -(\alpha_2 + \lambda(1 - e^{ju})) H_2^{(2)}(u) + \alpha_1 e^{ju} H_1^{(2)}(u) + \alpha_1 H_0^{(2)}(u) &= 0, \\ -\kappa_1 e^{-ju} H_0^{(2)}(u) + j\sigma e^{-ju} \frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} + (\lambda + \alpha_1) H_1^{(2)}(u) + \lambda H_2^{(2)}(u) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим  $\sigma = \varepsilon^2$  и в системе (10) сделаем замены:  $u = \varepsilon w$ ,  $H_k^{(2)}(u) = F_k^{(2)}(w, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{0, 2}$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} -(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1) F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \alpha_2 F_2^{(2)}(w, \varepsilon) &= 0, \\ -(\mu + \alpha_1 + \lambda(1 - e^{j\varepsilon w})) F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + (\lambda + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w}) F_0^{(2)}(w, \varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ -(\alpha_2 + \lambda(1 - e^{j\varepsilon w})) F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \alpha_1 e^{j\varepsilon w} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \alpha_1 F_0^{(2)}(w, \varepsilon) &= 0, \\ -\kappa_1 e^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} + (\lambda + \alpha_1) F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda F_2^{(2)}(w, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

В полученную систему подставим разложение:  $F_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w) \{r_k + j\varepsilon w f_k\} + O(\varepsilon^2)$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &(-(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1) r_0 + \mu r_1 + \alpha_2 r_2) \Phi_2(w) + j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} + \\ &+ j\varepsilon w (-(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1) f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2) \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \\ &(-(\mu + \alpha_1) r_1 + r_0 \lambda + r_0 \kappa_1) \Phi_2(w) + \\ &+ j\varepsilon w (-(\mu + \alpha_1) f_1 + \lambda r_1 - r_0 \kappa_1 + f_0 (\lambda + \kappa_1)) - j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} = O(\varepsilon^2), \\ &(-\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 r_0) \Phi_2(w) + \\ &+ j\varepsilon w (-(\alpha_2 f_2 - r_2 \lambda) + \alpha_1 f_1 + \alpha_1 f_0) \Phi_2(w) = O(\varepsilon^2), \\ &(-r_0 \kappa_1 + (\lambda + \alpha_1) r_1 + \lambda r_2) \Phi_2(w) + \\ &+ j\varepsilon w (\kappa_1 r_0 - \kappa_1 f_0 + (\lambda + \alpha_1) f_1 + \lambda f_2) \Phi_2(w) + j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (11)$$

В систему (11) подставим (8), получим:

$$\begin{aligned}
j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} + j\varepsilon w(-(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1)f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2)\Phi_2(w) &= O(\varepsilon^2), \\
j\varepsilon w(-(\mu + \alpha_1)f_1 + \lambda r_1 - r_0 \kappa_1 + f_0(\lambda + \kappa_1)) - j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} &= O(\varepsilon^2), \\
j\varepsilon w(-(\alpha_2 f_2 - r_2 \lambda) + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1 f_0)\Phi_2(w) &= O(\varepsilon^2), \\
j\varepsilon w(\kappa_1 r_0 - \kappa_1 f_0 + (\lambda + \alpha_1)f_1 + \lambda f_2)\Phi_2(w) + j\varepsilon r_0 \frac{d\Phi_2(w)}{dw} &= O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{12}$$

В системе (12) разделим уравнения на  $j\varepsilon w$  и устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ , имеем:

$$\begin{aligned}
-(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1)f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2 + r_0 \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} &= 0, \\
-(\mu + \alpha_1)f_1 + \lambda r_1 - r_0 \kappa_1 + f_0(\lambda + \kappa_1) - r_0 \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} &= 0, \\
-(\alpha_2 f_2 - r_2 \lambda) + \alpha_1 r_1 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1 f_0 &= 0, \\
(\kappa_1 r_0 - \kappa_1 f_0 + (\lambda + \alpha_1)f_1 + \lambda f_2) + r_0 \frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Так как отношение  $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$  не зависит от  $w$ , то скалярная функция  $\Phi_2(w)$  имеет

вид  $\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}$ , тогда  $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$ . Подставим это значение в систему

(13):

$$\begin{aligned}
-(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1)f_0 + \mu f_1 + \alpha_2 f_2 &= r_0 \kappa_2, \\
(\lambda + \kappa_1)f_0 - (\mu + \alpha_1)f_1 &= r_0 \kappa_1 - r_0 \kappa_2 - \lambda r_1, \\
\alpha_1 f_0 + \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2 &= -r_2 \lambda - \alpha_1 r_1, \\
-\kappa_1 f_0 + (\lambda + \alpha_1)f_1 + \lambda f_2 &= \kappa_2 r_0 - \kappa_1 r_0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Система (14) – неоднородная система линейных алгебраических уравнений для  $f_k$ ,  $k = \overline{0, 2}$ . Определитель матрицы коэффициентов системы равен 0, при этом ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов, т.е. система совместна и имеет множество решений.

Рассмотрим однородную систему уравнений (8) и неоднородную систему (14). Сравнивая эти системы, можно увидеть, что система (8) является однородной системой для неоднородной системы (14). Тогда решение системы (14) можно записать в виде  $f_k(\kappa_2) = C r_k + g_k(\kappa_2)$ ,  $k = \overline{0, 2}$ , где  $C$  – константа, вероятности  $r_k$  определены выше, а величины  $g_k(\kappa_2)$  являются частными решениями неоднородной системы (14), которое

удовлетворяет условию  $\sum_{k=0}^2 g_k(\kappa_2) = 0$ , т.е.



$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \alpha_1 + \kappa_1)g_0(\kappa_2) + \mu g_1(\kappa_2) + \alpha_2 g_2(\kappa_2) = r_0 \kappa_2, \\
& (\lambda + \kappa_1)g_0(\kappa_2) - (\mu + \alpha_1)g_0(\kappa_2) = r_0 \kappa_1 - r_0 \kappa_2 - \lambda r_1, \\
& \alpha_1 g_0(\kappa_2) + \alpha_1 g_1(\kappa_2) - \alpha_2 g_2(\kappa_2) = -r_2 \lambda - \alpha_1 r_1, \\
& -\kappa_1 g_0(\kappa_2) + (\lambda + \alpha_1)g_1(\kappa_2) + \lambda g_2(\kappa_2) = \kappa_2 r_0 - \kappa_1 r_0, \\
& \sum_{k=0}^2 g_k(\kappa_2) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Решив систему (15), полученные величины  $g_k(\kappa_2)$  подставим в выражения для  $f_k(\kappa_2)$ , а затем в уравнение для нахождения величины  $\kappa_2$ :  $-\kappa_1 f_0 + (\lambda + \alpha_1) f_1 + \lambda f_2 = r_0 \kappa_2 - r_0 \kappa_1$ . Из последнего уравнения мы найдем величину  $\kappa_2$ .

### Заключение

В данной работе ставилась задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите в выделенной подсистеме с повторными вызовами в циклической системе. Задача решена классическим методом «систем с прогулками прибора». Получено распределение вероятностей числа заявок на орбите в системе с прогулками прибора методом асимптотического анализа. Найденное асимптотическое распределение вероятностей числа  $i(t)$  является гауссовским с асимптотическим средним  $\kappa_1/\sigma$  и дисперсией  $\kappa_2/\sigma$ . Определив гауссовскую плотность распределения вероятностей с этими параметрами мы получим распределение вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системе с прогулками прибора в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите. Найденное распределение позволяет выполнить исследование числа заявок на орбите в циклических системах с двумя входящими потоками, в которых время прогулки прибора от одной очереди равно продолжительности периода занятости прибора обслуживанием заявок второй пары потока и орбиты.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexandre Deslauriers*. Markov chain models of a telephone call center with call blending / Alexandre Deslauriers, Pierre L'Ecuyer, Jutta Pichitlamken [et al.]. // *Computers & operations research*. – 2007. – Vol. 34, no. 6. – P. 1616–1645.
2. *Gilmore Audrey*. Call centres: how can service quality be managed? / Gilmore Audrey, Moreland Lesley. // *Irish Marketing Review*. – 2000. – Vol. 13, no. 1. – P. 3.
3. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
4. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания: [учебное пособие по специальностям 010200 (010501) "Прикладная математика и информатика 061800 (080116) "Математические методы в экономике"]. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.
5. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. / А. Я. Хинчин. – Москва, 1963. – Т. 236.
6. *Artalejo Jesus` R.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / Artalejo Jesus` R., Gomez-Corral` Antonio. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 318 с.
7. *Пауль С.В.* Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова, 10-15 сентября 2018 г. / С. В. Пауль, А. А. Назаров. – Томск, 2018. – С. 139-145.
8. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ RQ-системы с N типами вызываемых заявок в предельном условии большой задержки заявок на орбите // Вестник Томского государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика / Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д. – Томск, 2019. – С. 13–20.
9. *Назаров А.А.* Исследование RQ-системы M|M|1 с вызываемыми заявками методом асимптотического диффузионного анализа // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN2019) / А. А. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лизюра. – Томск, 2019. – С. 148-155.
10. *Лизюра О.Д.* Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем / О. Д. Лизюра, А. А. Назаров, С. В. Пауль. – Томск, 2019. – С. 241-246.

11. Лопухова С.В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий : дис. . . . канд. наук / С. В. Лопухова. – Том. гос. ун-та, 2008. – 167 с.

12. Назаров А.А. Исследование системы массового обслуживания с "прогулками" прибора, управляемой T-стратегией // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева, Минск, 23-26 февраля 2015 г. / А. А. Назаров, С. В. Пауль. – Минск, 2015. – 202-207 с.

## **МОДЕЛИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ В ВИДЕ СИСТЕМ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ**

**Морозова М.А., Пауль С.В., Назаров А.А.**

*Томский государственный университет*

morozova\_maria\_a@mail.ru, paulsv82@mail.ru, anazarov@fpmk.tsu.ru

### **Введение**

В настоящее время теория массового обслуживания является обширной областью для проведения исследований. Она очень востребована во многих областях науки и продолжает стремительно развиваться.

Чтобы получить представление о случайных процессах, протекающих в системах массового обслуживания, прибегают к их моделированию. Особой популярностью обладают модели call-центров с повторными звонками. Повторные звонки – это повторные обращения к оператору. Системы с повторными звонками называются системами с орбитой (RQ-системы) [1].

Однако call-центры занимаются не только приемом входящих звонков от клиентов, но и производят исходящие вызовы с целью рекламы, проведения опросов или анкетирования (вызываемые заявки). RQ-системы с вызываемыми заявками впервые упомянул Фалин [2]. Такие модели очень популярны в виду их гибкости.

Немало работ посвящено исследованию RQ-систем с вызываемыми заявками: в работе [3] разрабатывают рекуррентный алгоритм для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите, в [4] исследование проводится методом векторно-матричной алгебры.

В данной статье рассматриваются RQ-системы с вызываемыми заявками вида  $M|M|1|1$ . Исследование проводится с помощью метода асимптотического анализа [5] при условии большой задержки заявок на орбите, который позволяет найти характеристики системы.

### **1. Описание математической модели и постановка задачи**

Рассмотрим систему с повторными вызовами (RQ-систему) с одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$  (рис. 1). Если прибор свободен, то поступившая заявка встает на прибор и обслуживается в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром  $\mu_1$ . Если заявка застаёт прибор занятым, она мгновенно отправляется на орбиту, где после случайной экспоненциально-распределенной задержки с параметром  $\sigma$  снова пытается встать на прибор. Когда прибор свободен, он может вызывать заявки извне с интенсивностью  $\alpha$ , которые обслуживаются в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_2$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА, ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ БОЛЬШИХ ДАННЫХ, МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ И СИСТЕМ СЕМАНТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b>	<b>3</b>
<b>Головчинер М.Н., Рогожин А.С.</b> Построение параметризованного человеческого манекена на основе швейных мерок .....	3
<b>Гольшев В.К., Семенова Д.В.</b> Методы и алгоритмы решения задачи поиска формальных понятий для бинарных и нечётких контекстов .....	11
<b>Гузев И.В., Кабанова Т.В.</b> GMDH сети с обратной связью .....	18
<b>Дарибаева Н.Т.</b> Прогнозирование объемов потребительского кредитования в коммерческом банке .....	26
<b>Дубровин М.Г.</b> Алгоритм отбора информативных параметров производительности для проактивного мониторинга сервера базы данных .....	29
<b>Евсюткин И.В., Марков Н.Г.</b> Прогноз значений дебитов скважин с использованием искусственных нейронных сетей .....	34
<b>Ибрагимова Э.И., Семенова Д.В.</b> Задачи исследования знаковых графов .....	40
<b>Игольников Н.А., Марков Н.Г.</b> Сверточные нейронные сети для семантической сегментации изображений в реальном времени .....	46
<b>Кочетков Д.М., Бирюков А.А., Ермолаева А.М.</b> Сравнительный анализ различных показателей цитирования для оценки и ранжирования конференций .....	52
<b>Павлюченко М.В., Кабанова Т.В.</b> Анализ ошибок бинарного классификатора текстов с применением мета-признаков .....	57
<b>Седун Д.А., Гончарова Н.А.</b> Формирование цифрового двойника города при участии горожан на примере интеллектуальных систем видеонаблюдения .....	66
<b>Якимук Н.А., Головчинер М.Н.</b> Распознавание нот в вокальном исполнении с резким изменением частот основного тона .....	71
<b>II. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ .....</b>	<b>80</b>
<b>Багдалов П.Д., Пахомова Е.Г.</b> Создание обучающей программы для формирования навыка определения характеристик кривых второго порядка и их построения .....	80
<b>Безходарнов Н.И., Самохина С.И.</b> Двухкомпонентное разложение кардиологической кривой .....	86
<b>Дмитренко А.Г., Балашова О.М.</b> Алгоритм и программа расчета электромагнитного рассеяния на тонких ортогональных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах .....	90
<b>Киреев Д.А., Литвинова Н.И., Попов Н.С., Морозова А.С., Шкуркин А.С.</b> UX в новых каналах взаимодействия с приложением: голосовое управление и управление через чат .....	98
<b>Лихоманов Т.Д., Безходарнов Н.И., Буторина Н.Б.</b> Разработка графического кроссплатформенного приложения «Unigame» .....	101
<b>Прилепова И.Д., Пахомова Е.Г.</b> Создание обучающей программы по теме «Решение СЛАУ методом Гаусса» .....	107
<b>Славянова Я.И., Лагерев Д.Г.</b> Проектирование и разработка аналитической подсистемы для программного комплекса поддержки работы преподавателя вуза .....	112
<b>Стародубцева М.О., Буторина Н.Б.</b> Создание обучающей программы по дискретной математике "Различные представления булевой функции" .....	117

<b>Сыч М.Б., Пахомова Е.Г.</b> Создание обучающей программы для формирования навыка вычисления обратной матрицы.....	124
<b>Трифонов С.А., Самохина С.И.</b> Численные методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений при моделировании кинетики пластической деформации.....	129
<b>Хамуев В.В., Буторина Н.Б.</b> Разработка программного комплекса для одновременной (параллельной) доставки видео-контента в несколько сетей с поддержкой адаптивного битрейта .....	136
<b>Чалых Е.П., Самохина С.И.</b> Парсер для языка программирования RhineStone .....	142
<b>Alimbaeva E.A., Balashova O.M., Keba A.V.</b> Research of the Convergence of the Flexible Tolerance Method depending on the Parameters Values .....	146
<b>III. ТЕСТИРОВАНИЕ И КОНТРОЛЕПРИГОДНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ ВЫСОКОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ .....</b>	<b>155</b>
<b>Бизяев Д.К.</b> Обнаружение утечек ресурсов в списочных структурах произвольной вложенности и связности .....	155
<b>Генрих В.В., Тренькаев В.Н.</b> Обеспечение конфиденциальности «облачных» данных в защищенных СУБД .....	165
<b>Матросова А.Ю., Чернышов С.В.</b> Алгоритмы построения последовательности, доставляющей тестовые пары для робастно тестируемых PDFs с использованием операций над ROBDD-графами .....	169
<b>Провкин В.А.</b> Синтез вентильных схем, маскирующих неисправности, с использованием SAT-решателей.....	178
<b>Сампилов А.А., Андреева В.В.</b> Построение минимизированного проверяющего теста для системы безыбыточных ДНФ , ориентированное на сокращение расстояния по Хеммингу между соседними тестовыми наборами .....	188
<b>Тычинский В.З., Андреева В.В.</b> Получение тестовых пар для робастно тестируемых неисправностей задержек путей с использованием SAT-решателей .....	194
<b>IV. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ .....</b>	<b>201</b>
<b>Вилкина И.Ю., Дмитриев Ю.Г., Кошкин Г.М.</b> Алгоритмы идентификации и прогнозирования для комбинированных моделей .....	201
<b>Дмитриев Ю.Г., Ерёмкина Н.Л., Тарасенко В.Ф.</b> Детерминационный анализ опросов по тестам Реддина .....	206
<b>Змеев Д.О., Дмитриев Ю.Г.</b> Применение статистических оценок в управлении проектами по разработке программного обеспечения.....	211
<b>Иштуганов Р.А.</b> Классификация современных портфельных теорий .....	216
<b>Кодочигов А.В., Тарасенко В.Ф.</b> Технология прикладного системного анализа решения проблем на предприятии в условиях ограничительных мер для населения ....	224
<b>Пупков А.В.</b> Численное сравнение процедур оценивания параметра авторегрессии с аддитивным шумом.....	229
<b>Скрипин С.В., Дмитриев Ю.Г.</b> Комбинированная оценка в классификации кардиограмм .....	233
<b>Тюменцева Л.С., Зенкова Ж.Н.</b> Анализ продаж товара с учетом аномального спроса ....	242

<b>V. ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ.....</b>	<b>249</b>
<b>Бурцева С.А., Хакимов А.А., Григорьева Т.В., Власкина А.В., Кочеткова И.А.</b> Имитационная модель управляемого занятия ресурсов системы облачных вычислений из двух групп виртуальных машин .....	249
<b>Гуркова В.М., Осипов О.А.</b> Исследование split-merge системы с двумя классами требований и потерями .....	254
<b>Даммер Д.Д., Федерягина П.В.</b> Исследование дополнительно формируемого потока в системе с экспоненциальным обслуживанием и неограниченным числом приборов методом Марковского суммирования .....	260
<b>Заварзин А.С., Осипов О.А.</b> Разработка фреймворка дискретно-событийного моделирования.....	265
<b>Ключникова П.Н., Пауль С.В.</b> Исследование циклической системы с повторными вызовами .....	270
<b>Морозова М.А., Пауль С.В., Назаров А.А.</b> Модели телекоммуникационных систем связи в виде систем с повторными вызовами и вызываемыми заявками .....	277
<b>Назаров А.А., Рожкова С.В., Титаренко Е.Ю.</b> Исследование RQ-системы с обратной связью и неординарным пуассоновским входящим потоком .....	284
<b>Рачис В.А.</b> Реализация автоматизированной информационной платформы интернета вещей «Migran IoT».....	288
<b>Удодова А.Э., Бесчастный В.А., Острикова Д.Ю.</b> Модель обслуживания трафика одноадресных соединений в беспроводной сети на базе технологии "Новое Радио" ....	296
<b>Федорова Е.А., Рожкова С.В., Воронина Н.М.</b> Асимптотический анализ RQ-системы M/M/1 с ненадежным прибором .....	304
<b>Шульгина К.С., Пауль С.В.</b> Асимптотический анализ RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором .....	309
<b>АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>315</b>

Научное издание

**МАТЕРИАЛЫ  
Международной научной конференции  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ  
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

**Томск, 28–30 мая 2020 г.**

*Под общей редакцией  
кандидата технических наук И.С. Шмырина*

*Издание подготовлено в авторской редакции*

Подписано в печать 29.12.2020 г. Формат 70×108 1/16  
Печ. л. 20; усл. печ. л. 28.  
Тираж 500 экз. Заказ № 4574.

Отпечатано на оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36  
Тел. 8+(382-2) 52-98-49  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; e-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)

ISBN 978-5-94621-970-9

