РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА (САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, РОССИЯ)

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной КОНФЕРЕНЦИИ

«ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2020»,

7–10 апреля 2020 г.

LXXIII

Санкт-Петербург
Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
2020

УДК 517.51

РАЗВИТИЕ ГИБКОСТИ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

Гриншпон Я. С., Киреенко С. Г.
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск
e-mail: grinshpon@mail.ru, svkireenko@mail.ru

Grinshpon Ya. S., Kireenko S. G. Developement in pupils' flexible thinking in dealing with parameter problems through the use of various function properties. The article proves the importance of training to solve parameter problems by funtion methods with regard to developement in pupils' flexible thinking. Examples of applying various function properties are presented.

Keywords: function, domain, range, parity, monotonicity, mathematical education.

Доказывается важность обучения функциональным методам решения заданий с параметром с точки зрения развития гибкости мышления учащихся. Приведены примеры заданий на использование разных свойств функций.

Ключевые слова: функция, область определения, область значений, четность, монотонность, математическое образование.

В методике обучения школьной математике традиционно выделяют ряд содержательно-методических линий: числовая, алгебраическая, геометрическая, функциональная, вероятностно-статистическая и т.д. Такое распределение, безусловно, оправдано с точки зрения полной и четкой классификации приобретаемых учащимися знаний и навыков, без которой невозможна организация логически выверенного системного курса математики.

Однако строгое разделение материала по основным линиям может препятствовать развитию гибкости и вариативности мышления. Действительно, если школьник уверен, что при решении уравнений нужно использовать только аппарат алгебраических преобразований, то тем самым он существенно ограничивает свои мыслительные усилия по выбору рационального метода решения.

По мнению авторов, развитию гибкости мышления учащихся может, в частности, способствовать достаточно широкое применение в учебном процессе свойств функций при решении уравнений, неравенств и их систем (разумеется, наряду со стандартными и нестандартными алгебраическими методами). Наиболее ярко эффективность функционального метода проявляется при решении заданий с параметром, так как часто привычные алгебраические методы либо приводят к чрезвычайно громоздким преобразованиям, либо вообще не приводят к результату.

Отметим, что использование свойств функций позволяет качественно выполнять задания высокого уровня сложности ЕГЭ по математике, а также различных математических олимпиад и конкурсов. Литературы, в которой рассматриваемый подход был бы систематизирован и сопровожден достаточным количеством примеров, практически нет, а в большинстве школьных учебников нет даже упоминаний о функциональным методах решения алгебраических задач.

В работе исследуется применение при решении уравнений и неравенств с параметром, а также их систем, следующих свойств функций: область определения, область значений (ограниченность), четность, монотонность.

Приведем по одному примеру для каждого свойства.

1. Область определения. Для уравнений и неравенств вместо термина "область определения" принято употреблять термин "область допустимых значений" (ОДЗ). В некоторых случаях нахождение ОДЗ позволяет существенно сократить множество возможных решений уравнения или неравенства.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1} = a - \sqrt{4-x^2}$ имеет хотя бы один целый корень?

Решение. Область допустимых значений для переменной x — это отрезок $[-1;2]$. Значит, целые корни уравнения могут находиться только среди чисел $-1; 0; 1; 2$. Подставив каждое из этих чисел в исходное уравнение, получим все искомые значения параметра a.

Ответ: $a = \sqrt{3}$, $a = 3$, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

2. Область значений. Существование наибольшего и наименьшего значений у функций, входящих в уравнение или неравенство, иногда позволяет свести данное уравнение или неравенство к системе более простых уравнений, а именно, если A — наименьшее значение функции $f(x)$ и одновременно наибольшее значение функции $g(x)$, то уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ равносильны системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$ ([1])

Пример 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня. ([2])

Решение. Запишем уравнение в виде: $(x^2 - 6|x| - a + 6)^2 = \cos\frac{18\pi}{a} - 1$. Тогда оно равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 6|x| - a + 6 = 0, \\ \cos\frac{18\pi}{a} - 1 = 0, \end{cases}$ которая сводится к системе $\begin{cases} (|x| - 3)^2 = a + 3, \\ \frac{18\pi}{a} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Получим $a \geqslant -3$, $a = \frac{9}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $|x| = 3 \pm \sqrt{a+3}$. Уравнение $|x| = 3 \pm \sqrt{a+3}$ имеет два корня в двух случаях.

1) Пусть $a = -3$. Тогда $x = \pm 3$, а уравнение $a = \frac{9}{n}$ выполняется при $n = -3$.

2) Пусть $3 - \sqrt{a+3} < 0$. Тогда $a > 6$. Из неравенства $\frac{9}{n} > 6$ получаем одно целое значение $n = 1$ и $a = 9$.

Ответ: $a = -3$, $a = 9$.

3. Четность. Пусть $f(x)$ — четная функция. Тогда, если $x = c$ является корнем уравнения $f(x) = a$, то $x = -c$ тоже корень. Следовательно, уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное количество корней тогда и только тогда, когда $x = 0$ является одним из корней уравнения. В системах уравнений и неравенств четность можно рассматривать как относительно всех переменных, так и относительно части из них.

Пример 3. Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти это значение параметра и решить систему при найденном значении параметра.

Решение. Из первого уравнения системы следует, что $y = e^{2|x|}$.

Заметим, что если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(-x; y)$ также решение. Следовательно, единственным решением системы может быть только пара вида $(0; y)$. Пусть $x = 0$, тогда из второго уравнения получим, что $a = \pm 1$.

Проверим, действительно ли система при найденных значениях a имеет единственное решение.

1) Если $a = 1$, то система имеет единственное решение: $\log_2(x^4y^2 + 2) = \log_2(1 - x^2y^2) + 1 \Leftrightarrow y^2x^2(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (так как $y > 0$). Тогда $y = 1$.

2) Если $a = -1$, то система имеет три решения: $\log_2(x^4y^2 + 2) = \log_2(1 + x^2y^2) + 1 \Leftrightarrow y^2x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$ Каждому из найденных значений x соответствует единственное значение $y = e^{2|x|}$.

Ответ: система имеет единственное решение $(0; 1)$ при $a = 1$.

Монотонность. Использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств, как правило, основывается на следующих утверждениях.

1) Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке I. Тогда при любом a уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня на промежутке I. ([3])

2) Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке I и области значений функций $g(x)$ и $h(x)$ входят в промежуток I. Тогда уравнение $f(g(x)) = f(h(x))$ равносильно уравнению $g(x) = h(x)$.

3) Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a; b]$. Тогда неравенство $f(x) \geqslant c$ ($f(x) \leqslant c$) выполняется для всех $x \in [a; b]$ тогда и только тогда, когда $f(a) \geqslant c$ ($f(b) \leqslant c$).

4) Пусть функция $f(x)$ монотонно убывает на отрезке $[a; b]$. Тогда неравенство $f(x) \geqslant c$ ($f(x) \leqslant c$) выполняется для всех $x \in [a; b]$ тогда и только тогда, когда $f(b) \geqslant c$ ($f(a) \leqslant c$).

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|4\cos x + a + 6| + |5\cos x + a^2 + 1| \leqslant 10\cos x + |a^2 + a - 2| + 10 \qquad (1)$$

выполняется для любого действительного значения x. ([4])

Решение. Введем переменную $t = \cos x$ и запишем неравенство в виде

$$10t - |4t + a + 6| - |5t + a^2 + 1| + |a^2 + a - 2| + 10 \geqslant 0 \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 10t - |4t + a + 6| - |5t + a^2 + 1| + |a^2 + a - 2| + 10$. При любом раскрытии модулей функция будет принимать вид $f(t) = kt + b$, где $k > 0$. Таким образом, $f(t)$ — монотонно возрастающая на $\mathbb{R}$ функция.

Исходное неравенство (1) будет выполняться для всех x в том и только в том случае, когда неравенство (2) выполняется для всех $t \in [-1; 1]$. А это равносильно выполнению условия $f(-1) \geqslant 0$, то есть

$$-10 - |2 + a| - |a^2 - 4| + |a^2 + a - 2| + 10 \geqslant 0 \qquad (3)$$

Решая это неравенство, получим $a \in -2 \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $a = -2$, $a \geqslant 2$.

Отметим, что в примере 4 при решении неравенства на параметр a оказываются полезными рассуждения, аналогичные решению примера 2. Действительно, неравенство (3) можно записать в виде $|2 + a| + |a^2 - 4| \leqslant |a^2 + a - 2|$. Но по свойству модулей $|2 + a| + |a^2 - 4| \geqslant |a^2 + a - 2|$. Значит, неравенство (3) равносильно уравнению $|2 + a| + |a^2 - 4| = |a^2 + a - 2|$, которое выполняется тогда и только тогда, когда выражения $(2 + a)$ и $(a^2 - 4)$ одного знака или хотя бы одно из них равно нулю.

Без использования свойств функций решение рассмотренных заданий и ряда подобных заданий может оказаться чрезвычайно затруднительным (технически сложным), а порой и невозможным.

Список литературы

[1] Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. – Минск.: “Асар”, 2004. – 464 с.

[2] Диагностические работы и тексты пробных ЕГЭ по математике 2015-2019 гг. [Электронный ресурс] // URL: http://alexlarin.net/

[3] Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Математика: решение задач: 11 кл. – М.: “Просвещение”, 2007. – 398 с.

[4] Шестаков С.А. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень). – М.: МЦНМО, 2020. – 288 с.