УДК 519.1

О ВАЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Гриншпон И. Э., Гриншпон Я. С.
Томский университет систем управления и радиоэлектроники
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск
e-mail: grinshpon@mail.ru

Grinshpon I. E., Grinshpon Ya. S. On importance of skills formation to solve combinatorial problems. The article proves the importance of training to solve combinatorial problems both at school and at university. Examples of problems from different combinatorics sections are presented.

Keywords: combinatorics, discrete mathematics, mathematical education.

Доказывается важность обучения решению комбинаторных задач как в школе, так и в университете. Приведены примеры задач из разных разделов комбинаторики.

Ключевые слова: комбинаторика, дискретная математика, математическое образование.

Основные математические объекты, изучаемые в школе, в той или иной мере связаны с непрерывными конструкциями, т.е. сводятся к кусочно-непрерывным функциям, заданным на связных (“непрерывных”) промежутках (в том числе, алгебраические, тригонометрические, показательные и логарифмические выражения, уравнения и неравенства; длины, площади и объемы геометрических фигур). Разделы “непрерывной” математики компактно изложены, хорошо структурированы, снабжены большим количеством разнообразных задач и их изучению отводится достаточно много учебного времени.

Значительная часть заданий по этим темам формулируется на абстрактном формальном математическом языке и имеет при этом четко прописанный алгоритм решения, мало зависящий от особенностей входных данных. Это приводит к минимизации творческих усилий учащихся при решении подобных задач на фоне постепенного усложнения проводимых преобразований и повышения их трудоемкости, а также, к непониманию как смысла полученных при решении результатов, так и важности освоения умений по решению математических задач.

Подобное содержание школьного курса математики у людей с нематематической формой мышления часто формирует отстраненное и боязливое отношение к математике, а иногда и полное ее неприятие. Когда в беседе с людьми, провозглашающими себя гуманитариями и ненавистниками математики, предлагаешь им логическую головоломку или задачу на смекалку, например, из книг [1] или [2], то такие задачи вызывают у них сначала удивление, а затем заинтересованность и желание поразмышлять еще над такими увлекательными задачами и узнать побольше о другой “нешкольной” математике. Данное наблюдение приводит к идее о том, что стимулировать интерес учащихся к математике можно путем включения в школьную программу некоторых разделов дискретной математики, например, элементов математической логики, теории чисел, комбинаторики, теории графов и т.д.

Научно-технический прогресс и широкое применение IT-технологий привели к возникновению и бурному развитию таких наук как теория кодирования, криптография, исследование операций, теория алгоритмов, логистика, математическая лингвистика и ряда других. Изучение всех этих дисциплин невозможно без хорошего знания и понимания комбинаторики и умения решать комбинаторные задачи.

Важная характерная черта комбинаторных задач — это сочетание формальных математических вычислений и построения корректной математической модели на основе анализа условия задачи, сформулированного на естественном (русском) языке. При этом, формулировки комбинаторных задач, как правило, весьма просты и часто понятны даже младшим школьникам. Именно эта особенность комбинаторных задач способствует развитию креативного логического мышления и школьника и студента, что оказывается чрезвычайно полезным для дальнейшей успешной деятельности в научной, инженерной и управленческой работе.

В рамках изучения комбинаторики удобно формировать у учащихся умение критически рассуждать, а именно выдвигать, формулировать и доказывать или опровергать гипотезы. Работу с гипотезами часто можно организовать так, чтобы их проверка (хотя бы не в которых частных случаях) была возможна в рамках не очень громоздкого вычислительного эксперимента (письменного или компьютерного). А это уже элемент настоящего научного поиска!

Однако при том подходе к изучению комбинаторики, который сейчас практикуется в школе и в вузе, теряется интерес к этому разделу дискретной математики, делается проблематичным осознанное решение задач по теории вероятности, включенных как в основной, так и в единый государственный экзамены, и изучение специальных дисциплин, использующих понятия и методы комбинаторики. Ведь, к сожалению, ни в школьной, ни в большинстве университетских программ комбинаторика как раздел математики не представлена компактно и системно. И это несмотря на то, что уже в 60-ые годы прошлого года были предприняты первые попытки включения элементов теории множеств и комбинаторики в школьную программу ([3]).

Если проанализировать школьные учебники, рекомендованные для основной школы, то в большинстве учебников отдельные факты из комбинаторики приводятся только в рамках изучения элементов теории вероятностей. При этом, данные факты разбросаны по курсу и не приведены в систему, также не показана взаимосвязь комбинаторики с другими разделами математики и информатикой. Это приводит к тому, что не только ученики, но и учителя, относятся к комбинаторике, как к чему-то не особо нужному и важному ([4]).

И только в учебниках для старшей школы формулируются основные понятия комбинаторики. Например, в учебниках под редакцией Ш.А. Алимова ([5]) и А.Г. Мордковича ([6]) даются определения и выводятся формулы для вычисления количества перестановок, размещений и сочетаний без повторений, приведены два свойства сочетаний. Формула бинома Ньютона дается без вывода, хотя треугольник Паскаля приведен. Из приведенных в этой главе задач почти половина являются вычислительными (например, "найдите значение выражения $C_{15}^{12} + C_{15}^{13}$" или "при каком значении n справедливо равенство $P_{n+1} : P_n = 3$").

В учебнике под редакцией Ю.М. Колягина ([7]) даются определения и выводятся формулы для вычисления количества перестановок, размещений и сочетаний без повторений и с повторениями, приведены два свойства сочетаний. Но все соединения с повторениями снабжены пометкой "для профильного уровня" или "для тех, кто интересуется математикой", то есть их изучение не является обязательным.

В учебниках под редакцией С.М. Никольского ([8]) основные понятия комбинаторики даются только в 9 классе, в учебниках старшей школы ([9], [10]) ни комбинаторика, ни вероятность не рассматриваются.

Заметим, что первое знакомство учащихся с комбинаторикой в 5–9 классах лучше начинать с простых задач, решаемых непосредственным перебором всех возможных вариантов (в частности, с помощью дерева вариантов).

В школьных учебниках для вычисления количества соединений рассматривается правило произведения, которое в дальнейшем применяется для вычисления вероятности произведения независимых событий. Но правило суммы и формула включений и исключений, необходимые для вычисления вероятностей суммы несовместных или совместных событий, даже не упоминаются, хотя в вариантах ОГЭ и ЕГЭ задачи, использующие эти понятия, встречаются. Приведем такие достаточно простые примеры:

1) У Маши имеется 3 пары джинсов, 2 юбки, 6 блузок и 4 платья. Сколько у нее различных нарядов?

2) В магазине продаются ручки: 140 из них с красным стержнем, 270 — с синим. 25 ручек двуцветные: имеют и синий и красный стержни. Сколькими способами можно выбрать три ручки одного цвета, имеющих только по одному стержню?

При решении первой задачи не обойтись без правила суммы, а во второй задаче кроме того нужно применить формулу включений и исключений. Формулу включений и исключений можно эффектно иллюстрировать с помощью кругов Эйлеров. Такая геометрическая иллюстрация наглядна и поэтому хорошо понимаема учащимися, а в дальнейшем они им поможет при изучении теории множеств, математической логики и теории вероятностей.

Ни в одном из учебников при рассмотрении комбинаторных задач нет перехода от простого к сложному в рамках одной содержательной задачи. А примеры можно привести достаточно простые:

3) В столовой предлагается на выбор четыре салата, два супа, три вторых блюда и два напитка. Обед состоит из блюд разных категорий (т.е. нельзя выбрать несколько салатов или несколько супов и т.д.). Сколькими способами можно выбрать себе обед, состоящий: а) ровно из одного блюда; б) из второго блюда и напитка; в) из либо салата либо супа и в любом случае напитка; г) из четырех блюд; д) хотя бы из одного блюда?

4) Сколько существует четырехзначных натуральных чисел, запись которых состоит: а) из нечетных цифр; б) из четных цифр; в) из различных четных

цифр; г) из двух четных и двух нечетных цифр?

Отметим, что задачи, содержащие в своей формулировке несколько вопросов (пункты а, б, в, ...) чрезвычайно полезны с точки зрения развития внимательности при чтении условия задания и построении на его основе математической модели. Особую роль такие задачи приобретают при изучении размещений и сочетаний.

5) а) В классе из 10 человек каждый день в течение учебной недели (с понедельника по пятницу) награждают Лучшего Математика. Сколькими способами можно это сделать? б) В классе из 10 человек выбирают пять Лучших Математиков и составляют их рейтинг (т.е. распределяют с первого места по пятое). Сколькими способами можно это сделать? в) В классе из 10 человек выбирают пять Лучших Математиков для участия в командном соревновании. Сколькими способами можно это сделать?

6) В 8 классе изучают 14 предметов. В понедельник 6 уроков. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если: а) все уроки сдвоенные; б) все уроки разные; в) среди уроков могут быть сдвоенные?

Пятая задача показывает отличия между различными видами соединений (размещения с повторениями и без повторений, сочетания), а шестая задача требует одновременного применения правил суммы и произведения, а также сочетаний и размещений.

Также школьный курс фактически лишен задач, связывающих комбинаторику с другими разделами математики. Приведем примеры простейших комбинаторных задач с теоретико-числовым и алгебраическим содержанием.

7) Метод решета Эратосфена применяется для чисел от 2 до 180. Сколько чисел останется после выполнения трех первых шагов метода (для 2; 3; 5)? Сколько всего чисел останется после полного выполнения алгоритма?

8) Сколько слагаемых будет содержать выражение $(a+b+c)(a+b+c+d+e+f)+(k+l)(k+m)$: а) после раскрытия скобок; б) после раскрытия скобок и приведения подобных?

Следующие две задачи иллюстрирует связь комбинаторики с информатикой.

9) Как известно для представления чисел в компьютере используется двоичный код. Сколько различных натуральных чисел можно закодировать с помощью шести байтов?

10) Ключ активации на программный продукт состоит из пяти букв латинского алфавита и трех цифр. Сколько различных ключей может быть сформировано разработчиком продукта?

В учебниках приводится мало задач с геометрическим содержанием, а именно геометрические представления наиболее наглядны. Например, можно сформулировать такие задачи:

11) а) Сколько диагоналей имеется в выпуклом n-угольнике? б) Сколько диагоналей, отсекающих треугольник, имеется в выпуклом n-угольнике? в) Сколько точек пересечения образуют диагонали в выпуклом n-угольнике, если известно, что не существует внутренних точек многоугольника, через которые проходило бы более двух диагоналей?

12) Страна расположена на двух островах. На одном 13 городов, а на

другом — 19. Любые два города, расположенные на одном острове, соединены железной дорогой, а любые два города с разных островов соединены паромом. Сколько железнодорожных линий и сколько паромов в этой стране?

Девятую и десятую задачи также можно использовать как вводные задачи для знакомства с графами и их свойствами.

Единство и неразрывность всех разделов математики, включая комбинаторику, можно показать, если связать воедино две интерпретации количества сочетаний: геометрическую — количество кратчайших путей на клетчатой доске из одной узловой точки в другую, и алгебраическую - коэффициенты разложения бинома Ньютона. В профильных классах и на факультативах можно добавить к этому полиномиальную формулу и перестановки с повторениями, возрастающие и убывающие факториалы и числа Стирлинга первого рода. Если же ученики знакомы с комплексными числами, то обычно восторг и восхищение с их стороны вызывает возможность применения бинома Ньютона при выводе тригонометрических формул кратных углов и понижения степени.

Отметим, что комбинаторика является замечательным инструментом по развитию вариативности мышления, так как многие комбинаторные задачи можно решать разными способами. Особо ярко это проявляется в задачах, содержащим фразу “хотя бы один”.

13) В колоде 36 карт. Сколько существует различных наборов из 4 карт, хотя бы одна из которых является тузом?

Данную задачу проще решать “от обратного”, найдя количество неподходящих наборов карт. Чуть более сложно эта же идея реализуется в пункте д) третьей задачи.

Полезно показать разнообразие способов доказательств свойств сочетаний: алгебраические преобразования, комбинаторные рассуждения, геометрическая интерпретация, с помощью метода математической индукции, рассматривая сочетания как коэффициенты из формулы бинома Ньютона. Особый интерес здесь вызывает формула $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$, отвечающая на вопрос об общем количестве подмножеств конечного n-элементного множества.

Также, с нашей точки зрения, для повышения степени усвоения сложных и серьезных математических теорий их изучение необходимо иногда сопровождать игровыми формами. Многие комбинаторные задачи, благодаря их содержанию, позволяют геймифицировать занятия. Например, решение задач на перестановки или размещения без повторений и с повторениями, можно также совмещать с расшифровками анаграмм или составлением осмысленных слов из букв заданного слова.

14) Сколько различных слов, не обязательно имеющих смысл, можно составить из букв слова “тригонометрия”?

15) Составьте как можно больше различных слов, имеющих смысл, из букв слова “тригонометрия”.

Эти два задания похожи по формулировкам, но одно из них является чисто вычислительным, а другое — состязательным.

В заключении, отметим, что согласно современным тенденциям развития образования важно реализовать переход от простого воспроизведения полученных знаний к их пониманию, осмыслению, поиску нового, интересного, умению приложить полученные знания к решению как теоретических, так и практических задач. И при изучении комбинаторики можно реализовать эту тенденция наиболее четко.

Работая в физико-математической школе при Томском государственном университете и проводя занятия со старшеклассниками в рамках внеучебной деятельности, авторы данной статьи уделяли внимание логическим основам комбинаторики, добиваясь того, чтобы школьники по условию задачи строили модель и только после этого переходили к вычислениям. На этих занятиях мы использовали наилучшую по этой теме книгу Н.Я. Виленкина ([12]), а также пособие С.И. Туманова ([13]) и пособие, написанное одним из авторов данной статьи ([14]).

Выражаем надежду и уверенность, что постепенно комбинаторика займет достойное место в курсах математики как в школе, так и в университетах!

Список литературы

[1] Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку 5-6 классы. Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: “Просвещение”, 2010. – 95 с.

[2] Гарднер М. Математические досуги. – М.: “Мир”, 1972. – 496 с.

[3] Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 класса средней школы. – М.: “Просвещение”, 1975. – 221 с.

[4] Виноградова Е.П. Опыт включения комбинаторных задач в школьный курс математики [Электронный ресурс] // Учебные материалы по психологии и педагогике: 2009. URL: http://superinf.ru/view_helpstud.php?id=1987

[5] Алимов Ш.А., Колягин Ю. М. и др. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10–11 класс. – М.: “Просвещение”, 2012. – 467 с.

[6] Мордкович А.Г., Семенов П.В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс. Базовый уровень. – М.: “Мнемозина”, 2015. – 402 с.

[7] Колягин Ю. М., Ткачева и др. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Базовый и профильный уровень. – М.: “Просвещение”, 2010. – 311 с.

[8] Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра. 9 класс. – М.: “Просвещение”, 2014. – 335 с.

[9] Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Алгебра и начала анализа. 10 класс. – М.: “Просвещение”, 2001. – 335 с.

[10] Никольский С.М., Потапов М.К. и др. . Алгебра и начала анализа. 11 класс. – М.: “Просвещение”, 2002. – 44 8с.

[11] Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: “Вильямс”, 2003. – 957 с. (J. Anderson. Discrete mathematics with combinatorics.)

[12] Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: “Наука”, 1969. – 323 с.

[13] Туманов С.И. Элементарная алгебра. М.: “Просвещение”, 1970. – 863 с.

[14] Гриншпон И.Э., Змеева Е.Е. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, статистики. – Томск: ТОИПКРО, 2005. – 86 с.