ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 3(23)

УДК 517.9

**И.В. Рахмелевич**

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ К УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СОДЕРЖАЩИМ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ

С помощью метода разделения переменных получены решения некоторых уравнений математической физики, содержащих однородные функции от производных. Рассмотрены уравнения, содержащие одну или несколько однородных функций. Выполнен анализ решений для некоторых частных случаев.

**Ключевые слова:** *уравнение*, *однородная функция*, *метод разделения переменных*, *частная производная.*

Метод разделения переменных (РП) является одним из наиболее универсальных методов решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных [1], который позволяет свести исходное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а во многих случаях – получить точные решения. В данной работе этот метод применяется к решению уравнений, содержащих однородные функции от производных.

## 1. Уравнение, содержащее однородную функцию

Рассмотрим уравнение относительно неизвестной функции $u(t, x_1, ..., x_N)$

$$L_t u = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \tag{1}$$

Здесь $L_t \equiv \sum_{m=1}^{M} a_m(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m}$ – линейный дифференциальный оператор по переменной $t$; $F$ – некоторая однородная функция с показателем однородности $r$ ($r$>0), т.е. для любых $\alpha, p_1, \ldots, p_N$ выполняется соотношение [2]

$$F(\alpha p_1, \ldots, \alpha p_N) = \alpha^r F(p_1, \ldots, p_N). \tag{2}$$

Применяя метод РП к уравнению (1), решение будем искать в виде

$$u(t, x_1, ..., x_N) = T_0(t) + T_1(t) V(x_1, ..., x_N). \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в уравнение (1) и используя свойство однородности (2), преобразуем уравнение (1) к виду

$$L_t T_0(t) + V(x_1, ..., x_N) L_t T_1(t) - [T_1(t)]^r F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) = 0. \tag{4}$$

Разделим обе части уравнения (4) на $[T_1(t)]^r$ и продифференцируем поочередно по переменным $x_i$ $(i = 1, ..., N)$, тогда получаем

$$\frac{L_t T_1(t)}{[T_1(t)]^r}\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) может быть удовлетворено в следующих частных случаях:
*Случай* 1:

$$\frac{L_t T_1(t)}{[T_1(t)]^r} = \lambda \ , \tag{6}$$

где $\lambda \neq 0$ –некоторая постоянная. Тогда из уравнения (4) следует

$$\frac{L_t T_0(t)}{[T_1(t)]^r} = F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) - \lambda V(x_1,...,x_N) \ . \tag{7}$$

Согласно известной схеме метода РП [1], уравнение (7) может быть удовлетворено, если обе его части равны некоторой постоянной $\mu$, откуда получаем уравнения для функций $T_0, V$

$$L_t T_0(t) - \mu [T_1(t)]^r = 0 \ ; \tag{8а}$$

$$F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) - \lambda V(x_1,...,x_N) - \mu = 0 \ . \tag{8б}$$

Уравнение (8а) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно функции $T_0(t)$ . Уравнение (8б) путем линейной замены неизвестной функции $\tilde{V} = V + \frac{\mu}{\lambda}$ преобразуем к виду

$$F\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_N}\right) - \lambda \tilde{V}(x_1,...,x_N) = 0 \ . \tag{9}$$

Для решения уравнения (9) разделим его на $\tilde{V}$ и используем свойство однородности (2). В результате уравнение (9) преобразуем к виду

$$F\left(\tilde{V}^{-1/r}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}, ..., \tilde{V}^{-1/r}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_N}\right) - \lambda = 0 \ . \tag{10}$$

Предположим вначале, что $r \neq 1$ и выполним замену неизвестной функции $\tilde{V}$ по формуле

$$w = \tilde{V}^{\beta}/\beta \ , \tag{11}$$

где $\beta = (r-1)/\,r$. Тогда уравнение (10) запишется как

$$F\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial w}{\partial x_N}\right) - \lambda = 0 \ . \tag{12}$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде

$$w(x_1,...,x_N) = W(z), \quad z = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \ . \tag{13}$$

Подставляя функцию (13) в уравнение (12) и используя свойство однородности (2), нетрудно получить следующее решение:

$$W(z) = B(z + c_0), \quad B = \left( \frac{\lambda}{F(c_1, ..., c_N)} \right)^{1/r}, \tag{14}$$

$c_0$ – произвольная постоянная. Возвращаясь к неизвестной функции $\tilde{V}$, решение уравнения (9) запишем как

$$\tilde{V}(x_1, ..., x_N) = (\beta B)^{1/\beta} (z + c_0)^{1/\beta}. \tag{15}$$

Решение (15) имеет место при $\beta \neq 0$ ($r \neq 1$). В случае $\beta = 0$ ($r = 1$) нетрудно получить

$$\tilde{V}(x_1, ..., x_N) = \exp\left( \frac{\lambda}{F(c_1, ..., c_N)} (z + c_0) \right). \tag{16}$$

Учитывая выполненную выше замену функции $\tilde{V} = V + \dfrac{\mu}{\lambda}$, решение (3) можно представить в виде

$$u(t, x_1, ..., x_N) = \tilde{T}_0(t) + T_1(t) \tilde{V}(x_1, ..., x_N), \tag{17}$$

где функция $\tilde{T}_0(t) = T_0(t) - \dfrac{\mu}{\lambda} T_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$L_t \tilde{T}_0(t) = 0. \tag{17а}$$

*Случай* 2:

$$L_t T_1(t) = 0. \tag{18}$$

Тогда уравнение (4) преобразуется следующим образом:

$$\frac{L_t T_0(t)}{[T_1(t)]^r} = F\left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_N} \right). \tag{19}$$

Из (19) получаем уравнения для функций $T_0, V$:

$$L_t T_0(t) = \lambda [T_1(t)]^r; \tag{20а}$$

$$F\left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_N} \right) - \lambda = 0. \tag{20б}$$

При этом вначале необходимо определить функцию $T_1(t)$ из уравнения (18), а затем подставить ее в правую часть уравнения (20а). Уравнение (20б) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (12), поэтому его решение определяется формулой вида (14). Если $\lambda = 0$, то нетрудно убедиться, что решение уравнения (20б) $V = \Phi(z)$, где $z$ определяется формулой (13), $\Phi(z)$ – произвольная дифференцируемая функция, а постоянные $c_i$ удовлетворяют условию $F(c_1, \ldots, c_N) = 0$.

Таким образом, в первом частном случае решение уравнения (1) с однородной функцией в правой части можно представить в виде (17), где $T_1(t)$ удовлетворяет ОДУ (6), $\tilde{T}_0(t)$ удовлетворяет ОДУ (17а), а $\tilde{V}(x_1, ..., x_N)$ – уравнению (9), решение которого дается формулами (15) или (16). Во втором частном случае $T_1(t)$ определяется из уравнения (18), функции $T_0, V$ определяются из уравнений (20а), (20б) соответственно, причем решение последнего при $\lambda \neq 0$ дается формулой вида (14), а при $\lambda=0$ – формулой $V=\Phi(z)$ с дополнительным условием $F(c_1,\ldots,c_N)=0$.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}a_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^r .$$

С помощью метода РП, согласно изложенному выше, нетрудно получить решения:

1) $u(t,x_1,...,x_N)=\dfrac{r-1}{r}\left(\dfrac{(z+c_0)^r}{r(t_0-t)\sum\limits_{i=1}^{N}a_ic_i^r}\right)^{\frac{1}{r-1}}+A_0$ (при $r\neq 1$);

2) $u(t,x_1,...,x_N)=\lambda\,t+\left(\dfrac{\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{N}a_ic_i^r}\right)^{\frac{1}{r}}(z+c_0)$;

3) $u(t,x_1,...,x_N)=\Phi\,(z)$,

причем $A_0,t_0,c_0,\lambda,c_i$ – произвольные постоянные, $\Phi$ – произвольная дифференцируемая функция, $z$ определяется формулой (13). Решения 1), 2) применимы в случае, если постоянные $c_i$ удовлетворяют соотношению $\sum\limits_{i=1}^{N}a_ic_i^r\neq 0$; решение 3) – в случае, если постоянные $c_i$ удовлетворяют соотношению $\sum\limits_{i=1}^{N}a_ic_i^r=0$.

При $r=1$ данное уравнение является линейным и имеет общее решение вида [3] $u(t,x_1,...,x_N)=\Phi\left(z+t\sum\limits_{i=1}^{N}a_ic_i\right)$.

## 2. Уравнение, содержащее сумму однородных функций

Рассмотрим теперь случай, когда правая часть исходного уравнения представляет собой сумму $K$ однородных функций с различными показателями однородности $r_k$. Пусть множество значений $I=\{1,...,N\}$ индекса $i$, нумерующего независимые пространственные переменные, разбито на $K$ непересекающихся подмножеств $I_k$ $(k=1,...,K)$. Тогда вектор переменных $X=\{x_1,...,x_N\}$ можно разбить на $K$ непересекающихся подвекторов $X_k=\{x_i\}_{i\in I_k}$. Введем также соответствующие векторы производных $\dfrac{\partial}{\partial X_k}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i\in I_k}$ и рассмотрим уравнение вида

$$L_tu=\sum_{k=1}^{K}F_k\left(\frac{\partial u}{\partial X_k}\right), \tag{21}$$

где функции $F_k$ удовлетворяют соотношению однородности вида (2) с показателями однородности $r_k$ $(r_k>0)$, причем вектор аргументов $\{p_1,...,p_N\}$ заменяется на подвектор $\{p_i\}_{i\in I_k}$. Применяя метод РП к уравнению (21), ищем решение в виде

$$u(t,X)=T_0(t)+\sum_{k=1}^{K}T_k(t)V_k(X_k)\,. \tag{22}$$

Аналогично преобразованиям, выполненным в п.1, подставим выражение (22) в уравнение (21) и с учетом однородности функций $F_k$ приводим его к виду

$$L_tT_0(t)+\sum_{k=1}^{K}\Psi_k(t,X_k)=0\,; \tag{23}$$

$$\Psi_k(t,X_k)=V_k(X_k)\,L_tT_k(t)-[T_k(t)]^{r_k}\,F_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k}\right). \tag{23a}$$

Продифференцируем (23) по $X_k$ и учтем, что левая часть уравнения (23) зависит от $X_k$ только через $\Psi_k(t,X_k)$. Тогда с учетом (23а), приходим к соотношению

$$\frac{L_tT_k(t)}{[T_k(t)]^{r_k}}\frac{\partial V_k}{\partial X_k}-\frac{\partial}{\partial X_k}F_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k}\right)=0\,. \tag{24}$$

Аналогично п.1 рассмотрим частные случаи, в которых может быть удовлетворено это соотношение.

*Случай* 1:

$$\frac{L_tT_k(t)}{[T_k(t)]^{r_k}}=\lambda_k\,, \tag{25}$$

где $\lambda_k\neq 0$ – некоторая постоянная. Тогда соотношение (24) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial X_k}\left\{F_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k}\right)-\lambda_kV_k\right\}=0\,, \tag{26}$$

откуда следует уравнение для $V_k$ :

$$F_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k}\right)-\lambda_kV_k=\mu_k\,, \tag{27}$$

где $\mu_k$ – некоторая постоянная. С помощью замены функции $\tilde{V}_k=V_k+\dfrac{\mu_k}{\lambda_k}$ получаем следующее уравнение:

$$F_k\left(\frac{\partial \tilde{V}_k}{\partial X_k}\right)-\lambda_k\tilde{V}_k(X_k)=0\,. \tag{28}$$

Решая его аналогично уравнению (9) из п.1, можно получить следующие выражения для $\tilde{V}_k$ :

В случае $\beta_k\neq 0$ ($r_k\neq 1$):

$$\tilde{V}_k(X_k)=(\beta_kB_k)^{1/\beta_k}\,(z_k+d_k)^{1/\beta_k}\,,\quad z_k=\sum_{x_i\in X_k}c_ix_i\,. \tag{29a}$$

В случае $\beta_k=0$ ($r_k=1$):

$$\tilde{V}_k(X_k) = \exp\left(B_k(z_k + d_k)\right). \qquad (29б)$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_k = (r_k - 1)/\ r_k,\ B_k = \left(\frac{\lambda_k}{F_k(C_k)}\right)^{1/r_k}, \qquad (29в)$$

$c_i$, $d_k$ –произвольные постоянные, $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$.

*Случай* 2:

$$\frac{L_t T_k(t)}{[T_k(t)]^{r_k}} = 0. \qquad (30)$$

Тогда из (24) получаем уравнение для $V_k$:

$$F_k\left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k}\right) = \lambda_k. \qquad (31)$$

Аналогично уравнению (12) решение уравнения (31) при $\lambda_k \neq 0$ определяется формулой

$$V_k(X_k) = B_k\left(z_k + d_k\right), \quad z_k = \sum_{x_i \in X_k} c_i x_i, \qquad (32)$$

где $B_k$ определяется формулой (29в), $c_i$, $d_k$ – произвольные постоянные.

При $\lambda_k = 0$ аналогично п.1 решение уравнения (31) определяется формулой

$$V_k = \Phi_k(z_k), \qquad (32а)$$

где $\Phi_k$ – произвольная дифференцируемая функция, а вектор постоянных $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$ должен удовлетворять условию

$$F_k(C_k) = 0. \qquad (32б)$$

Множество значений $\Xi = \{1,\ldots,K\}$ индекса $k$ разделим на два непересекающихся подмножества $\Xi_1$, $\Xi_2$ следующим образом: если $k \in \Xi_1$ $(k \in \Xi_2)$, то для данного значения $k$ реализуется случай 1 (случай 2) соответственно. Тогда выражение (22) можно записать в виде

$$u(t,X) = \tilde{T}_0(t) + \sum_{k \in \Xi_1} T_k(t)\tilde{V}_k(X_k) + \sum_{k \in \Xi_2} T_k(t) V_k(X_k); \qquad (33)$$

$$\tilde{T}_0(t) = T_0(t) - \sum_{k \in \Xi_1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} T_k(t). \qquad (33а)$$

Для того чтобы получить уравнение для функции $\tilde{T}_0(t)$, подставим выражение (33) в уравнение (21). Тогда, с учетом соотношений (25), (28), (30), (31), получим

$$L_t \tilde{T}_0(t) = \sum_{k \in \Xi_2} \lambda_k [T_k(t)]^{r_k}. \qquad (34)$$

Таким образом, решение уравнения (21), содержащего сумму однородных функций, дается формулой (33). Функции $T_k(t)$ при $k \in \Xi_1$ $(k \in \Xi_2)$ являются решениями уравнений (25) и (30) соответственно, функция $\tilde{T}_0(t)$ – решением уравнения (34). Функции $\tilde{V}_k(X_k)$ при $k \in \Xi_1$ являются решениями уравнения (28) и определяются формулами (29а,б); функции $V_k(X_k)$ при $k \in \Xi_2$ являются решениями уравнения (31) и при $\lambda_k \neq 0$ определяются формулой (32), а при $\lambda_k = 0$ – формулой (32а) с дополнительным условием (32б).

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + a_2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \sqrt{a_3\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 + a_4\left(\frac{\partial u}{\partial x_4}\right)^2}\,.$$

Правая часть уравнения представляет собой сумму двух однородных функций с показателями однородности $r_1$=2 и $r_2$=1. Решая это уравнение методом РП, в соответствии с результатами данного раздела, получаем следующие решения:

1) $u(t,X) = A_0 + \dfrac{(z_1+d_1)^2}{4(t_0-t)(a_1c_1^2+a_2c_2^2)} + \exp\left\{\lambda_2\left(t + \dfrac{z_2+d_2}{\sqrt{a_3c_3^2+a_4c_4^2}}\right)\right\}$;

2) $u(t,X) = \lambda_2 t + \dfrac{(z_1+d_1)^2}{4(t_0-t)(a_1c_1^2+a_2c_2^2)} + \dfrac{\lambda_2(z_2+d_2)}{\sqrt{a_3c_3^2+a_4c_4^2}}$;

3) $u(t,X) = \lambda_1 t + \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{a_1c_1^2+a_2c_2^2}}\,(z_1+d_1) + \exp\left\{\lambda_2\left(t + \dfrac{z_2+d_2}{\sqrt{a_3c_3^2+a_4c_4^2}}\right)\right\}$;

4) $u(t,X) = (\lambda_1+\lambda_2)t + \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{a_1c_1^2+a_2c_2^2}}\,(z_1+d_1) + \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{a_3c_3^2+a_4c_4^2}}(z_2+d_2)$;

5) $u(t,X) = \dfrac{(z_1+d_1)^2}{4(t_0-t)(a_1c_1^2+a_2c_2^2)} + \Phi(z_2)$;

6) $u(t,X) = \lambda_1 t + \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{a_1c_1^2+a_2c_2^2}}\,(z_1+d_1) + \Phi(z_2)$;

7) $u(t,X) = \Phi(z_1) + \exp\left\{\lambda_2\left(t + \dfrac{z_2+d_2}{\sqrt{a_3c_3^2+a_4c_4^2}}\right)\right\}$;

8) $u(t,X) = \lambda_2 t + \Phi(z_1) + \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{a_3c_3^2+a_4c_4^2}}(z_2+d_2)$;

9) $u(t,X) = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)$.

Здесь $z_1 = c_1x_1 + c_2x_2$, $z_2 = c_3x_3 + c_4x_4$; $A_0, t_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, \lambda_1, \lambda_2$ – произвольные постоянные; $\Phi, \Phi_1, \Phi_2$ – произвольные дифференцируемые функции своих аргументов. Решения 1) – 4) применимы при выполнении условий $a_1c_1^2 + a_2c_2^2 \neq 0$, $a_3c_3^2 + a_4c_4^2 \neq 0$; решения 5), 6) – при выполнении условий $a_1c_1^2 + a_2c_2^2 \neq 0$, $a_3c_3^2 + a_4c_4^2 = 0$; решения 7), 8) – при выполнении условий $a_1c_1^2 + a_2c_2^2 = 0$, $a_3c_3^2 + a_4c_4^2 \neq 0$; решение 9) – при условии $a_1c_1^2 + a_2c_2^2 = 0$, $a_3c_3^2 + a_4c_4^2 = 0$.

## Заключение

Таким образом, в данной работе методом разделения переменных получены решения уравнений в частных производных, содержащих одну или несколько однородных функций от производных первого порядка. Проанализирован вид решения для возможных частных случаев и приведены примеры применения полученных в работе соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.*, *Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
2. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
3. *Зайцев В.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.

Статья поступила 12.12.2012 г.

*Rakhmelevich I.V.* ON APPLICATION OF THE VARIABLE SEPARATION METHOD TO MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS CONTAINING HOMOGENEOUS FUNCTIONS OF DERIVATIVES. The solutions of some evolutionary equations of mathematical physics containing homogeneous functions of derivatives were received using the variables separation method. The equations containing one or several homogeneous functions are considered. Solutions for some particular cases are analyzed.

Keywords: equation, homogeneous function, variable separation method, partial derivative.

*RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich* (Nizhny Novgorod State Commercial Institute)
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru