

УДК 519.2

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик

ДИФфуЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПУАССОНОВСКОЙ МОДЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ПЛАТЕЖЕЙ

Исследуются статистические характеристики математической модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке поступающих в фонд платежей и релейном управлении капиталом фонда. Найдены в диффузионном приближении плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме и плотности распределения периода неплатежеспособности и периода повышенных выплат фонда.

Ключевые слова: *некоммерческий фонд, плотность распределения капитала фонда, период неплатежеспособности, период повышенных выплат.*

1. Математическая модель изменения капитала фонда

Под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. Построению и исследованию моделей некоммерческих фондов посвящены, например, работы [1 – 4]. Среди некоммерческих фондов особую группу составляют так называемые государственные внебюджетные фонды РФ. Основная особенность деятельности этих фондов состоит в том, что поступление и расходование средств внебюджетных фондов определяется законодательством, которое устанавливает не только размеры страховых взносов, но и временные границы перечисления средств в фонды. Так, в настоящее время перечисление средств во внебюджетные фонды должно осуществляться до 15 числа месяца, следующего за отчётным. Это приводит к тому, что интенсивность потока страховых платежей имеет существенно различные значения в первой и во второй половине месяца. В то же время моменты изменения интенсивности зависят от многих случайных факторов и не могут рассматриваться как детерминированные. Подходящей моделью потока страховых платежей при этом является дважды стохастический пуассоновский поток [5].

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $s(t)$ в момент времени t . В работе предполагается, что с капиталом фонда могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределёнными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$ и моментами $M\{x\} = a$ и $M\{x^2\} = a_2$.

Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют дважды стохастический пуассоновский поток с переменной интенсивностью $\lambda(t)$. Интенсивность $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$ [6]. Переход из состояния в состояние задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = [q_{ij}]$ ранга $n - 1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность

$$P_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j; \quad (1)$$

$$P_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

где $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0. \quad (2)$$

2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что моменты выплаты денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью μ . Расходуемые суммы являются независимыми случайными величинами $b(s)x$, где случайная величина x имеет плотность распределения $\psi(x)$ и моменты $M\{x\} = 1$ и $M\{x^2\} = \beta_2$. Предполагается также, что расходование денежных средств имеет релейный характер, т.е.

$$b(s) = \begin{cases} b_0, & s < s_0, \\ b_1, & s > s_0 \end{cases} \quad (3)$$

для некоторого порогового значения капитала s_0 . Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$\mu b_0 = (1 - \theta)\lambda_0 a, \quad \mu b_1 = (1 + \theta)\lambda_0 a, \quad (4)$$

где $0 < \theta < 1$ и $\lambda_0 = M\{\lambda\}$ – средняя интенсивность потока поступающих премий. Таким образом, при $s < s_0$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем собирает, а при $s > s_0$ расходует в среднем больше средств, чем него поступает.

Наконец, будем считать, что при $s < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатежеспособности фонда, обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

В работе исследуются статистические характеристики предлагаемой модели в диффузионном приближении (в предположении, что параметр $\theta \rightarrow 0$).

2. Плотность распределения капитала фонда в стационарном режиме

Обозначим $P_i(s, t)ds = P\{s < s(t) \leq s + ds; \lambda(t) = \lambda_i\}$ ($i = \overline{1, n}$). Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени $t + \Delta t$ $\lambda(t + \Delta t) = \lambda_i$ и капитал фонда $s(t + \Delta t) = s$. Тогда на интервале времени длиной Δt могли произойти следующие события:

1. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, денежные средства в фонд не поступали и не выплачивались. Вероятность этого события равна $1 + (q_{ii} - \lambda_i - \mu)\Delta t + o(\Delta t)$.

2. За время Δt значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_j$ поменялось на $\lambda(t + \Delta t) = \lambda_j$, денежные средства в фонд не поступали и не выплачивались. Вероятность этого события $q_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$.

3. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, поступили денежные средства в размере x . Вероятность этого события $\lambda_i \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$.

4. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, была произведена случайная выплата в размере x . Вероятность этого события равна

$$\mu \Delta t \frac{1}{b(s+x)} \Psi\left(\frac{x}{b(s+x)}\right) dx + o(\Delta t).$$

5. Вероятность иных событий равняется $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P_i(s, t + \Delta t) = (1 + (q_{ii} - \lambda_i - \mu) \Delta t) P_i(s, t) + \sum_{i \neq j} q_{ji} P_j(s, t) \Delta t + \\ + \lambda_i \Delta t \int_0^\infty P_i(s-x, t) \varphi(x) dx + \mu \Delta t \int_0^\infty P_i(s+y) \frac{1}{b(s+y)} \Psi\left(\frac{y}{b(s+y)}\right) dy + o(\Delta t).$$

Считая функции $P_i(s, t)$ дифференцируемыми по t и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial P_i(s, t)}{\partial t} = (q_{ii} - \lambda_i - \mu) P_i(s, t) + \sum_{i \neq j} q_{ji} P_j(s, t) + \\ + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s-x, t) \varphi(x) dx + \mu \int_0^\infty P_i(s+y) \frac{1}{b(s+y)} \Psi\left(\frac{y}{b(s+y)}\right) dy. \quad (5)$$

Рассмотрим далее стационарный случай. Пусть

$$P_i(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(s, t). \quad (6)$$

Функции $P_i(s)$ будут удовлетворять уравнениям

$$-(q_{ii} - \lambda_i - \mu) P_i(s) - \sum_{i \neq j} q_{ji} P_j(s) = \\ = \lambda_i \int_0^\infty P_i(s-x) \varphi(x) dx + \mu \int_0^\infty P_i(s+y) \frac{1}{b(s+y)} \Psi\left(\frac{y}{b(s+y)}\right) dy \quad (7)$$

с вытекающими из их определения условиями нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_j(s) ds = \pi_j, \quad (8)$$

где π_j – финальная вероятность состояния λ_j .

Решение уравнений (7) будем искать в виде

$$P_i(s) = \theta f_i(\theta s, \theta), \quad (9)$$

считая функции $f_i(z, \theta)$ дифференцируемыми по θ , непрерывными по z во всей области определения и дважды дифференцируемы по z за исключением точки $z_0 = \theta s_0$, так как в точке s_0 коэффициенты $b(s)$ имеют разрыв. Будем также считать, что $s_0 = s_0(\theta)$ и что при $\theta \rightarrow 0$ $s_0(\theta) \rightarrow \infty$, но так, что существует конечный предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta s_0(\theta) = z_0. \quad (10)$$

Рассмотрим область $s < s_0$. В этой области уравнения (7) переписутся как

$$-(q_{ii} - \lambda_i - \mu) P_i(s) - \sum_{i \neq j} q_{ji} P_j(s) = \lambda_i \int_0^\infty P_i(s-x) \varphi(x) dx + \\ + \frac{\mu}{b_0} \int_0^\infty P_i(s+y) \Psi\left(\frac{y}{b_0}\right) dy + \mu \int_{s_0-s}^\infty P_i(s+y) \left[\frac{1}{b_1} \Psi\left(\frac{y}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \Psi\left(\frac{y}{b_0}\right) \right] dy. \quad (11)$$

Подставляя функции (9) в уравнение (11) после замены переменных $z = \theta s$ и $z_0 = \theta s_0$, получим

$$(\lambda_i + \mu)f_i(z, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ji}f_j(z, \theta) = \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \\ + \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} f_i(z + \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \mu \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_i(z + \theta x, \theta) \left[\frac{1}{b_1} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) \right] dx. \quad (12)$$

Переходя в уравнении (12) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n q_{ji}f_j(z, 0) = 0. \quad (13)$$

Из теории цепей Маркова с непрерывным временем известно [6], что финальные вероятности π_j являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n q_{ji}\pi_j = 0, \quad (14)$$

где величины π_i удовлетворяют условию нормировки:

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1.$$

Так как ранг матрицы $Q = [q_{ji}]$ равен $n - 1$, то из (13) и (14) получаем, что

$$f_j(z, 0) = \pi_j f(z), \quad (15)$$

где $f(z)$ неопределённая пока функция.

Пусть теперь

$$f_j(z, \theta) = \pi_j f(z) + h_j(z)\theta + o(\theta). \quad (16)$$

Подставляя выражения (16) в уравнения (12), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ , получим:

$$\sum_{j=1}^n q_{ji}h_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0)a\pi_i f(z) - \frac{\mu\pi_i}{\theta} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} \left[\frac{1}{b_1} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) \right] dx f(z) + o(\theta). \quad (17)$$

Так как

$$\frac{1}{\theta} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} \left[\frac{1}{b_1} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right) - \frac{1}{b_0} \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) \right] dx = \frac{1}{\theta} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta b_1}}^{\frac{z_0 - z}{\theta b_0}} \psi(x) dx \leq \frac{1}{\theta} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta b_1}}^{\infty} \psi(x) dx \leq \frac{b_1}{z_0 - z} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta b_1}}^{\infty} x \psi(x) dx,$$

то при $\theta \rightarrow 0$ получим из (17)

$$\sum_{j=1}^n q_{ji}h_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0)a\pi_i \dot{f}(z). \quad (18)$$

Пусть теперь

$$f_i(z, 0) = \pi_i f(z) + h_i(z)\theta + g_i(z)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (19)$$

Подставляя разложения (19) в уравнение (12), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок не выше θ^2 , по-

лучим, учитывая (15) и (18), после предельного перехода при $\theta \rightarrow 0$

$$-\sum_{j=1}^n q_{ji} g_j(z) = \frac{\lambda_i a_2 + \mu b_2}{2} \pi_i \ddot{f}(s) - (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(s) - \lambda_0 a \pi_i \dot{f}(s), \quad (20)$$

где
$$b_2 = \frac{\lambda_0^2 a^2}{\mu^2} \beta_2. \quad (21)$$

Просуммировав, наконец, все соотношения (20) по i , получим с учётом (2), что

$$\frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} \ddot{f}(s) - \lambda_0 a \dot{f}(s) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(s) = 0. \quad (22)$$

Из системы уравнений (18)

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} \dot{h}_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0) a \pi_i \ddot{f}(z). \quad (23)$$

Так как одновременно $\sum_{i=1}^n q_{ji} = 0$ и $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i = 0$, то система уравнений (23) совместна и имеет ранг $(n-1)$, как и система уравнений (14). Пусть матрица

$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n-1,1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \dots & q_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (24)$$

Тогда решение системы (14)

$$\pi_k = -\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{kj} \pi_n,$$

где π_n определяется из условия нормировки, а решение системы (23) имеет вид

$$\dot{h}_k(z) = -\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{nj} \dot{h}_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{nj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a \ddot{f}(z),$$

или
$$\dot{h}_k(z) = \frac{\pi_k}{\pi_n} \dot{h}_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{nj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a \ddot{f}(z). \quad (25)$$

Откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_0 - \lambda_k) a \dot{h}_k(z) = -\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a^2 \ddot{f}(z).$$

Таким образом, при $z < z_0$ функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_0 \ddot{f}(z) - \gamma_1 \dot{f}(z) = 0,$$

где
$$\gamma_0 = \frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} + \sum_{k,j=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_0) R_{kj} \pi_j (\lambda_j - \lambda_0) a^2, \quad \gamma_1 = \lambda_0 a, \quad (26)$$

решение которого имеет вид

$$f(z) = C_1 + C_2 e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0} z}.$$

Из определения функций $f_i(z, \theta)$ следует, что при $z \rightarrow -\infty$ $f(z) \rightarrow 0$. Поэтому при $z < z_0$,

$$f(z) = ce^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}(z-z_0)},$$

где c – некоторая постоянная.

Аналогичные вышеприведённым рассуждения показывают, что в области $z > z_0$ функция

$$f(z) = de^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}(z-z_0)}.$$

Наконец, условие непрерывности функций $f_i(z, \theta)$ в точке $z = z_0$ даёт $c = d$.

Таким образом, при $\theta \ll 1$

$$P_i(s) = d\theta\pi_i e^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\theta|s-s_0|} + o(\theta).$$

Пусть, наконец,

$$P(s) = \sum_{i=1}^n P_i(s)$$

– безусловная плотность распределения капитала в стационарном режиме. Тогда

$$P(s) = d\theta e^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\theta|s-s_0|} + o(\theta).$$

Учитывая условие нормировки плотности распределения, окончательно получим, что

$$P(s) = \frac{\theta\gamma_1}{2\gamma_0} e^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\theta|s-s_0|} + o(\theta). \quad (27)$$

3. Плотность распределения периода неплатежеспособности

Пусть $t_i(s)$ – период неплатежеспособности фонда при условии, что в начале периода капитал фонда равен $s(s < 0)$ и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Обозначим через

$$\psi_i(u, s) = M\{e^{-ut_i(s)}\} \quad (28)$$

– условную производящую функцию периода неплатежеспособности.

Пусть в начале периода $\lambda(t) = \lambda_i$. За малое время Δt происходят следующие события: капитал фонда меняется на случайную величину Δs , а интенсивность $\lambda(t)$ остаётся неизменной с вероятностью $1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)$ либо принимает значение λ_j с вероятностью $q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$. Поэтому

$$t_i(s) = \Delta t + (1 + q_{ii}\Delta t)t_i(s + \Delta s) + \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t t_j(s + \Delta s) + o(\Delta t)$$

$$\text{и} \quad \psi_i(u, s) = e^{-u\Delta t} [(1 + q_{ii}\Delta t)M_{\Delta s}\{\psi_i(u, s + \Delta s)\} + \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t M_{\Delta s}\{\psi_j(u, s + \Delta s)\}] + o(\Delta t).$$

Усредняя по Δs , получим, отбрасывая члены, имеющие порядок $o(\Delta t)$, и учитывая, что при $s > 0$ период неплатежеспособности заканчивается и, следовательно,

$t_i(s) = 0$, что

$$\begin{aligned} \psi_i(u, s) = e^{-u\Delta t} [& (1 + (q_{ii} - \lambda_i - \mu)\Delta t)\psi_i(u, s) + \lambda_i\Delta t \int_0^{-s} \psi_i(u, s+x)\varphi(x)dx + \\ & \lambda_i\Delta t \int_{-s}^{\infty} \varphi(x)dx + \frac{\mu}{b_0}\Delta t \int_0^{\infty} \psi_i(u, s-x)\psi\left(\frac{x}{b_0}\right)dx + \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t\psi_j(u, s)] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, что производящие функции $\psi_i(u, s)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu + u)\psi_i(u, s) - \sum_{j=1}^n q_{ij}\psi_j(u, s) = \\ = \lambda_i \int_0^{-s} \psi_i(u, s+x)\varphi(x)dx + \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} \psi_i(u, s-x)\psi\left(\frac{x}{b_0}\right)dx + \lambda_i \int_{-s}^{\infty} \varphi(x)dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Решения уравнений (29) будем искать в виде

$$\psi_i(u, s) = f_i\left(\frac{u}{\theta^2}, \theta s, \theta\right), \quad (30)$$

где функции $f_i(\omega, z, \theta)$ предполагаются дважды дифференцируемыми по z и непрерывными по ω и θ . Подставляя выражения (30) в уравнения (29) и делая замену переменных

$$\omega = \frac{u}{\theta^2}, \quad z = \theta s,$$

получим

$$(\lambda_i + \mu + \theta^2\omega)f_i(\omega, z, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij}f_j(\omega, z, \theta) =$$

$$= \lambda_i \int_0^{-\frac{z}{\theta}} f_i(\omega, z + \theta x, \theta)\varphi(x)dx + \frac{\mu}{b_0} \int_0^{\infty} f_i(\omega, z - \theta x, \theta)\psi\left(\frac{x}{b_0}\right)dx + \lambda_i \int_{-\frac{z}{\theta}}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Переходя в уравнениях (31) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}f_j(\omega, z, \theta) = 0. \quad (32)$$

Так как $\text{rang}[q_{ij}] = n-1$, то в силу условий (2)

$$f_j(\omega, z, \theta) = f(\omega, z), \quad (33)$$

где $f(\omega, z)$ – произвольная функция.

Пусть теперь

$$f_i(\omega, z, \theta) = f(\omega, z) + h_1(\omega, z)\theta + o(\theta). \quad (34)$$

Подставляя соотношения (34) в уравнение (31), получим аналогично выводу соотношений (18), что

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}(\omega, z) = (\lambda_0 - \lambda_i)af(\omega, z). \quad (35)$$

Пусть теперь

$$f_i(\omega, z, \theta) = f(\omega, z) + h_i(\omega, z)\theta + g_i(\omega, z)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (36)$$

Подставляя теперь соотношения (36) в уравнение (31), получим, учитывая (32) и (35), что

$$\frac{\lambda_i a_2 + \mu b_2}{2} \ddot{f}(\omega, z) + \lambda_0 a \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) + (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(\omega, z) = - \sum_{j=1}^n q_{ij} g_j(\omega, z). \quad (37)$$

Наконец, умножая соотношение (37) на финальные вероятности π_i и учитывая (14), будем иметь

$$\frac{\lambda_0 a_2 + \mu b_2}{2} \ddot{f}(\omega, z) + \lambda_0 a \dot{f}(\omega, z) - \omega^2 f(\omega, z) + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i a \dot{h}_i(\omega, z) = 0. \quad (38)$$

Из уравнений (35) следует, что функции $\dot{h}_i(\omega, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} \dot{h}_j(\omega, z) = (\lambda_0 - \lambda_i) a \ddot{f}(\omega, z). \quad (39)$$

Так как одновременно выполняются условия

$$\sum_{i=1}^n \pi_i q_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_0 - \lambda_i) = 0,$$

то система уравнений (39) совместна, имеет ранг $(n-1)$ и общее решение

$$\dot{h}_k(\omega, z) = - \sum_{j=1}^{n-1} R_{jk} q_{jn} \dot{h}_n(\omega, z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{jk} k(\lambda_0 - \lambda_j) a \ddot{f}(\omega, z),$$

где матрица $R = [R_{ij}]$ определяется соотношением (24).

Из условия (2) и в силу определения обратной матрицы (24)

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{jk} q_{jn} = - \sum_{j=1}^{n-1} R_{jk} \sum_{i=1}^{n-1} q_{ji} = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{jk} q_{ji} = 1.$$

Таким образом,

$$\dot{h}_k(\omega, z) = \dot{h}_n(\omega, z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{jk} (\lambda_0 - \lambda_j) a \ddot{f}(\omega, z),$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_0) \pi_k a \dot{h}_k(\omega, z) = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_0) \sum_{k=1}^{n-1} R_{jk} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) a^2 \ddot{f}(\omega, z).$$

Окончательно получаем, что функция $f(\omega, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\gamma_0 \ddot{f}(\omega, z) + \gamma_1 \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) = 0. \quad (40)$$

Решение уравнения (40) имеет вид

$$f(\omega, z) = C_1(\omega) e^{t_1(\omega)z} + C_2(\omega) e^{t_2(\omega)z}, \quad (41)$$

где
$$t_1(\omega) = \frac{-\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_0\omega}}{2\gamma_0}, \quad t_1(\omega) = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_0\omega}}{2\gamma_0}. \quad (42)$$

Так как $f(\omega, z)$ – производящая функция, то $|f(\omega, z)| \leq 1$ при всех $z < 0$. Поэтому в (41) необходимо положить $C_1(\omega) = 0$. Откуда

$$f(\omega, z) = C_2(\omega)e^{t_2(\omega)z}.$$

Для определения $C_2(\omega)$ рассмотрим поведение $f(\omega, z)$ при $z = 0$. При $z = 0$ уравнение (31) даёт

$$(\lambda_i + \mu + \theta^2\omega)f_i(\omega, 0, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij}f_j(\omega, 0, \theta) = \frac{\mu}{b_0} \int_0^\infty f_i(\omega_1 - \theta x, \theta) \psi\left(\frac{x}{b_0}\right) dx + \lambda_i.$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим отсюда, что $f(\omega, 0) = 1$ и, следовательно, $C_2(\omega) = 1$.

Таким образом, при $\theta \ll 1$ производящие функции

$$\psi_i(\omega, s) = e^{t_2(\frac{\omega}{\theta^2})\theta s} + o(\theta). \quad (43)$$

При $s < 0$, как следует из (27), случайная величина s имеет плотность распределения

$$P(s|s < 0) = \frac{P(s)}{P\{s < 0\}} = \frac{\theta\gamma_1}{\gamma_0} e^{\frac{\gamma_1\theta}{\gamma_0}s}.$$

Усредняя (43) по вероятностям состояний π_i и по s , получим, что безусловная производящая функция

$$\psi(s) = \sum_{i=1}^n \pi_i \int_{-\infty}^0 \psi_i(\omega, s) P(s|s < 0) ds = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha\omega}},$$

где
$$\alpha = \frac{4\gamma_0}{\theta^2\gamma_1^2}. \quad (44)$$

Откуда, вычисляя обратное преобразование Лапласа [7], получим, что плотность распределения периода неплатежеспособности имеет вид

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha t}} e^{-\frac{t}{\alpha}} - \frac{2}{\alpha} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{t}{\alpha}}\right). \quad (45)$$

4. Плотность распределения периода повышенных выплат

Период повышенных выплат наступает, когда капитал фонда $s > s_0$. Обозначим через $t_i(s)$ продолжительность периода повышенных выплат, если в начале периода капитал фонда равен s ($s \geq s_0$) и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Обозначим через

$$H_i(u, s) = M\{e^{-ut_i(s)}\} \quad (46)$$

условную производящую функцию периода повышенных выплат. Аналогично

выводу уравнения (29) можно показать, что функции $H_i(u, s)$ (46) удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda_i + \mu + u)H_i(u, s) - \sum_{j=1}^{n-1} q_{ij}H_j(u, s) = \lambda_i \int_0^{\infty} H_i(u, s+x)\varphi(x)dx + \\ + \frac{\mu}{b_1} \int_0^{s-s_0} H(u, s-x)\psi\left(\frac{x}{b_1}\right)dx + \frac{\mu}{b_1} \int_{s-s_0}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right)dx, \quad (47)$$

так как при $s = s_0$ период повышенных выплат заканчивается.

Решения уравнений (47) будем искать в виде

$$H_i(u, s) = f_i\left(\frac{u}{\theta^2}, \theta s, \theta\right), \quad (48)$$

где функции $f_i(\omega, z, \theta)$ предполагаются дважды дифференцируемыми по z и непрерывными по ω и θ . Подставляя выражения (48) в уравнения (47) и делая замену переменных

$$\omega = \frac{u}{\theta^2}, \quad z = \theta s,$$

получим ($z_0 = \theta s_0$), что

$$(\lambda_i + \mu + \theta^2 \omega)f_i(\omega, z, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij}f_j(\omega, z, \theta) = \\ = \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(\omega, z + \theta x, \theta)\varphi(x)dx + \frac{\mu}{b_1} \int_0^{\frac{z-z_0}{\theta}} f_i(\omega, z - \theta x, \theta)\psi\left(\frac{x}{b_1}\right)dx + \frac{\mu}{b_1} \int_{\frac{z-z_0}{\theta}}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{b_1}\right)dx. \quad (49)$$

Аналогично предыдущему можно показать, что при $\theta \ll 1$ решения уравнений (49) имеют вид

$$f_i(\omega, z, \theta) = f(\omega, z) + o(\theta), \quad (50)$$

где функция $f(\omega, z)$ является решением уравнения

$$\gamma_0 \ddot{f}(\omega, z) - \gamma_1 \dot{f}(\omega, z) - \omega f(\omega, z) = 0. \quad (51)$$

Решение уравнения (51), удовлетворяющее условиям $|f(\omega, z)| \leq 1$ при $z \geq z_0$ и начальному условию $f(\omega, z_0) = 1$ имеет вид

$$f(\omega, z) = e^{-t_2(\omega)(z-z_0)},$$

где $t_2(\omega)$ определяется соотношением (42). Таким образом, при $\theta \ll 1$ условная производящая функция

$$H_i(\omega_1 s) = e^{-t_2\left(\frac{\omega}{\theta^2}\right)\theta(s-s_0)} + o(\theta). \quad (52)$$

При $s > s_0$ случайная величина s , как следует из (27), имеет распределение

$$P(s|s > s_0) = \frac{P(s)}{P\{s > s_0\}} = \frac{\theta \gamma_1}{\gamma_0} e^{-\frac{\theta \gamma_1}{\gamma_0}(s-s_0)}.$$

Усредняя (52) по вероятностям состояний π_i и по s , получим, что безусловная производящая функция

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \pi_i \int_{s_0}^{\infty} H_i(\omega, s) P(s|s > s_0) ds = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha\omega}},$$

где α определяется формулой (44). Таким образом, в рассматриваемом симметричном случае, определяемом соотношением (4), при $\theta \ll 1$ производящие функции периода неплатежеспособности и периода повышения выплат, а следовательно, их плотности распределения одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов. Физика. 2003. № 3. С. 83 – 87.
2. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 18. С. 302 – 308.
3. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 38 – 44.
4. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 302 – 312.
5. Наумов В.А. Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1978. С. 67 – 73.
6. Назаров А.А., Тертугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. С. 204.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 344.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 5 марта 2008 г.