

УДК 336:51

Г.А. Медведев

О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ. 3. ОДНОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ДАФФИ – КАНА

Временная структура процентных ставок играет ключевую роль при определении цен облигаций. Поэтому ее свойства интересуют многих финансовых аналитиков. Однако в имеющейся литературе обычно встречается схематичное описание этих свойств. Здесь делается попытка детального описания всех возможных форм временной структуры для класса аффинных моделей процентных ставок, поскольку для этих моделей можно записать решения в явной форме. В качестве основной принимается модель Даффи – Кана (DK) с произвольной нижней границей для безрисковой (спот) процентной ставки. Результаты для широко известных моделей CIR и Васичека получаются как частные случаи. Найдены возможные типы формы кривой доходности.

Ключевые слова: процентные ставки доходности, аффинная модель, кривая доходности, форвардная кривая, модель Васичека, модель Кокса – Ингерсолла – Росса, модель Даффи – Кана.

Известно, что аффинные модели временной структуры доходности требуют, чтобы краткосрочная процентная ставка $r(t)$ следовала случайному процессу, описываемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = (\alpha r(t) + \beta)dt + \sqrt{\gamma r(t) + \delta} dW(t), \gamma r(0) + \delta > 0, \quad (1)$$

где α , β , γ и δ – константы; а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. При этом рыночная цена риска $\lambda(r)$ должна быть такова, чтобы $\lambda(r)\sqrt{\gamma r + \delta} = \xi r + \eta$ являлась аффинной функцией. Предполагается, что значения констант α , β , γ и δ обеспечивают существование стационарного решения уравнения (1). Если в уравнении (1) $\gamma = 0$, то получающуюся модель временной структуры доходности называют моделью Васичека. Если же в уравнении (1) $\delta = 0$, то аффинную модель временной структуры называют моделью Кокса – Ингерсолла – Росса (модель CIR). Различие этих моделей состоит в том, что в первом случае процесс $r(t)$ является гауссовым, а во втором случае $r(t)$ имеет распределение гамма. Свойства временных структур доходности в этих моделях были представлены в предыдущих статьях [1, 2]. Здесь мы рассмотрим общий случай, когда все четыре параметра α , β , γ и δ отличаются от нуля. Статистический смысл параметров уравнения (1) сразу не виден, поэтому вместо этих параметров мы введем другие, при которых уравнение с практической точки зрения удобнее трактуется:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - x}{\theta - x}} dW(t), r(0) > x. \quad (2)$$

Параметры уравнения (2) имеют следующий конкретный статистический смысл: θ – стационарное математическое ожидание краткосрочной процентной ставки $r(t)$; D – ее стационарная дисперсия; x – параметр, имеющий смысл нижней границы процесса $r(t)$, так что $r(t) \geq x$ для всякого t ; согласно результатам В. Фел-

лера [3, с. 173] эта граница является недостижимой сверху при $(\theta - x)^2 > D$; k – параметр, определяющий коэффициент автокорреляции процесса в виде

$$\rho(\tau) = E[(r(t) - \theta)(r(t + \tau) - \theta)]/D = \exp\{-k|\tau|\}.$$

Заметим, что в случае $x = -\infty$ уравнение (2) порождает модель Васичека [4, с. 185], а в случае $x = 0$ уравнение (2) порождает модель CIR [5, с. 391]. На модель с произвольным (допустимым) значением параметра x при необходимости будем ссылаться как на однофакторную модель Даффи – Кана (модель DK), которые рассмотрели ее многофакторный аналог [6, с. 383]. Функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ для модели DK были найдены С. Коксом и Г. Медведевым [7, с. 917]; детальный анализ однофакторной модели DK содержится в книге Г. Медведева [8, гл. 3].

Соотношение между параметрами уравнений (1) и (2) устанавливаются очевидным образом при сопоставлении уравнений

$$k = -\alpha > 0, \theta = -\frac{\beta}{\alpha} > 0, D = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{2\alpha^2} > 0, x = -\frac{\delta}{\gamma} < 0.$$

Коэффициенты аффинной структуры, связанные с рыночной ценой риска, определяются соотношением $\lambda(r)\sqrt{\gamma r + \delta} = \xi r + \eta$. Используя это, можно написать,

$$\text{что } \lambda(r) = \frac{\xi r + \eta}{\sigma(r)} = \frac{\xi}{\gamma} \sigma(r) + \frac{\eta\gamma - \xi\delta}{\gamma\sigma(r)}.$$

Очевидно, если волатильность краткосрочной процентной ставки $\sigma(r)$ стремится к нулю, то переходим к детерминированному рынку, поэтому рыночная цена риска $\lambda(r)$ (и премия за риск) должна стремиться к нулю. Из приведенного равенства видно, что этот факт будет иметь место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\eta\gamma - \xi\delta = 0$. Кроме того, в различных моделях при анализе одной и той же реализации процесса краткосрочной процентной ставки необходимо также так установить значения коэффициентов ξ и η аффинной структуры в этих моделях, чтобы они обеспечивали, насколько это возможно, одинаковый уровень рыночной цены риска. Естественно ожидать, что рискованная премия при краткосрочной процентной ставке, равной среднему ее уровню в установившемся режиме, будет одинаковой для всех сравниваемых моделей. Кроме того, чтобы рискованная премия была положительной, необходимо выполнение условия $\lambda(r) < 0$ [5, с. 393]. Поэтому потребуем, чтобы для всех трех рассматриваемых моделей $\lambda(\theta) = -\lambda$, $\lambda > 0$. И выражение для $\lambda(r)$ получает-ся следующим:

$$\lambda(r) = \frac{\xi}{\gamma} \sigma(r) = \frac{\xi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{r + \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{\gamma}{\delta} r + 1} = -\lambda \sqrt{\frac{r - x}{\theta - x}}.$$

1. Форвардная кривая и кривая доходности в однофакторной модели Даффи – Кана

В текущий момент времени t , когда $r(t) = r$, цена $P(t, r, T)$ бескупонной облигации, по которой в дату погашения T выплачивается одна денежная единица, определяется формулой [1]

$$P(t, r, T) = \exp\{A(T - t) - rB(T - t)\}. \quad (3)$$

В дальнейшем для краткости срок до погашения облигации будем обозначать $\tau = T - t$. Модели процентных ставок доходности, позволяющие выразить цену облигации $P(t, r, T)$ в виде (3), относятся к классу аффинных временных структур

процентных ставок. Функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$B' = 1 - (k + \lambda\sigma)B(\tau) - \frac{kD}{\theta - x} [B(\tau)]^2, B(0) = 0; \quad (4)$$

$$A' = -(k\theta + \lambda\sigma x)B(\tau) - \frac{kDx}{\theta - x} [B(\tau)]^2, A(0) = 0. \quad (5)$$

Решения этих уравнений выражаются в виде

$$B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V \right)^{-1}; \quad (6)$$

$$A(\tau) = x [B(\tau) - \tau] - \frac{(\theta - x)^2}{D} [\nu\tau - \ln(1 + \nu B(\tau))], \quad (7)$$

где для краткости записи обозначено

$$\sigma = \frac{\sqrt{2kD}}{\theta - x}, \quad \varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma)^2 + \frac{4kD}{\theta - x}}, \quad \nu = (\varepsilon - k - \lambda\sigma)/2, \quad V = (\varepsilon + k + \lambda\sigma)/2. \quad (8)$$

Заметим, что $\nu + V = \varepsilon$, $\nu V = kD/(\theta - x)$.

Доходность до погашения $y(\tau)$ бескупонной облигации в рамках аффинной структуры выражается в виде

$$y(\tau) \equiv \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau}. \quad (9)$$

Для определенности заметим, что функции аффинной временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ являются функциями одного аргумента только в рассматриваемом случае постоянных коэффициентов уравнения (1). Форвардная ставка $f(\tau)$ определяется выражением

$$f(\tau) = r \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = y(\tau) + \tau \frac{dy(\tau)}{d\tau}. \quad (10)$$

В дальнейшем взаимные свойства форвардной ставки и доходности до погашения будем исследовать как функции срока погашения τ в рамках аффинной структуры в зависимости от величин r , x и λ , которые будут рассматриваться как параметры: $r = r(t)$ – параметр состояния рынка в момент времени t ; x – параметр модели краткосрочной ставки; λ – параметр модели доходности. С практической точки зрения имеет смысл исследовать свойства функций $f(\tau)$ и $y(\tau)$ только для неотрицательных сроков погашения $\tau \geq 0$, неотрицательных значений краткосрочной ставки $r \geq 0$ и выполнении условия Феллера о недостижимости нижней границы процесса $r(t)$: $\theta - x > \sqrt{D}$, т. е. $x < \theta - \sqrt{D}$.

Для того чтобы получить явный вид функции $y(\tau)$, определяющей зависимость доходности от срока до погашения, достаточно подставить функции (6) и (7) в (9). Это приводит к выражению

$$y(\tau) = x + (\theta - x) \left[\frac{B(\tau)}{\tau} \frac{r - x}{\theta - x} + \frac{k}{V} \left(1 - \frac{\ln(1 + \nu B(\tau))}{\tau \nu} \right) \right]. \quad (11)$$

Здесь уместно отметить, что функция $B(\tau)$, зависящая также от параметра x , играет основную роль при определении как функций $A(\tau)$ и $y(\tau)$, так и функции $f(\tau)$. Согласно формуле (6), функция $B(\tau)$ является монотонно возрастающей и такой, что

$$B(0) = 0 \leq B(\tau) \leq B(\infty) = V^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty. \quad (12)$$

Используя формулу (10) для форвардной ставки и уравнения (4) и (5) для функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$, получаем следующее выражение для $f(\tau)$:

$$f(\tau) = r + (\theta - x)[k B(\tau) - B(\tau)(V - v)(r - x)/(\theta - x) - vV B(\tau)^2 (r - x)/(\theta - x)]. \quad (13)$$

Функции $y(\tau)$ и $f(\tau)$, которые определяются формулами (11) и (13), соответственно называются далее кривой доходности и форвардной кривой. Заметим, что форвардная кривая для модели Васичека и модели CIR была получена в другой форме в статье Е. Шлегла и Д. Соммера [9, с. 6], и там приведены некоторые свойства для форвардных кривых. В некоторых литературных источниках имеется информация о совместном поведении кривой доходности и форвардной кривой. Например, в книгах J. Hull [10, с. 83, 84], Z. Bodie, A. Kane и A. Marcus [11, с. 437], J. Campbell, A. Lo и A. MacKinlay [12, с. 398], K. Kortanek и V. Medvedev [13, с. 201] представлены графики поведения кривой доходности и форвардной кривой на отдельных периодах времени конечной продолжительности. Однако по этим примерам нельзя представить в полной мере характер изменения кривых. Из этих графиков, например, можно видеть, что с увеличением времени до погашения различие между кривыми доходности и форвардными кривыми увеличивается. Ниже будет показано, что это невозможно, по крайней мере, для моделей временных структур аффинного класса.

2. Свойства форвардной кривой и кривой доходности

Заметим, что параметр r в выражениях (11) и (13) входит только в сочетании с другими параметрами в виде $(r - x)/(\theta - x)$. Поэтому для дальнейшего изложения удобно вместо r ввести другой параметр $\zeta = (r - x)/(\theta - x)$. По определению ζ можно назвать нормированным значением краткосрочной процентной ставки в момент времени t , при этом $0 \leq \zeta \leq \infty$.

Доходность до погашения $y(\tau)$ и форвардная ставка $f(\tau)$ принимают одинаковые значения для крайних сроков погашения $\tau = 0$ и $\tau = \infty$:

$$f(0) = y(0) = r,$$

$$f(\infty) \equiv f^*(x) = y(\infty) \equiv y^*(x) \equiv x + v \frac{(\theta - x)^2}{D} \equiv \frac{k}{V} \theta + \left(1 - \frac{k}{V}\right) x. \quad (14)$$

Поскольку $0 < k/V < 1$, то $x < f(\infty) \equiv f^*(x) = y(\infty) \equiv y^*(x) < \theta$. Из этого следует, в частности, что при $\tau \rightarrow \infty$ предельные значения кривой доходности и форвардной кривой всегда меньше стационарного среднего θ краткосрочной процентной ставки $r(t)$.

При малых сроках погашения кривые $y(\tau)$ и $f(\tau)$ имеют представления

$$y(\tau) = r + \frac{1}{2} (\theta - x) [k - (V - v) \zeta] \tau + O(\tau^2),$$

$$f(\tau) = r + (\theta - x) [k - (V - v) \zeta] \tau + O(\tau^2).$$

Эти формулы показывают, что кривые $y(\tau)$ и $f(\tau)$ при $\tau = 0$ стартуют из одной точки $y(0) = f(0) = r$, причем форвардная кривая $f(\tau)$ убывает (возрастает) в 2 раза быстрее, чем кривая доходности $y(\tau)$.

Модель Васичека ($x = -\infty$) часто критикуется за то, что допускает отрицательные значения краткосрочных ставок $r(t)$. Это приводит к тому, что кривые доходности $y(\tau)$ и форвардные ставки $f(\tau)$ также могут принимать отрицательные значения. Вместе с тем в модели CIR ($x = 0$) гарантируется неотрицательность крат-

косрочных ставок $r(t)$, а следовательно, и кривых $y(\tau)$ и $f(\tau)$. Поэтому желательно выяснить, каким является минимальное значение границы x в модели ДК, которое обеспечивает положительность кривых доходности $y(\tau)$ и форвардных ставок $f(\tau)$. Необходимыми условиями для этого являются, например, такие: положительный наклон кривых $y(\tau)$ и $f(\tau)$ в окрестности точки $\tau = 0$ при $r = 0$ и положительность предельного при $\tau \rightarrow \infty$ значения ставки $f(\infty) = y(\infty) \equiv f^*(x) \equiv y^*(x)$, определяемого равенством (14).

Предельное при $\tau \rightarrow \infty$ значение $f^*(x)$ форвардной кривой (и кривой доходности), определяемое формулой (14), является монотонно возрастающей функцией границы x и на интервале $[-\infty, \theta]$ принимает значения

$$f^*(-\infty) = \theta - (D + \lambda \sqrt{2kD})/k \leq f^*(x) \leq f^*(\theta) = \theta.$$

Таким образом, если $k\theta \geq D + \lambda \sqrt{2kD}$, то предельное значение форвардной кривой $f^*(x)$ – положительное для всякого $x < \theta$. Если выполняется неравенство $k\theta \leq D + \lambda \sqrt{2kD}$, минимальное значение $x = x^*$, при котором $f^*(x) \geq 0$, определяется выражением

$$x^* = -\theta \frac{k\theta + \sqrt{k\theta D + \lambda^2 kD/2} - \lambda \sqrt{kD/2}}{D - k\theta + \lambda \sqrt{2kD}}.$$

Многие авторы при анализе кривых доходности и форвардных кривых отмечали, что эти кривые могут иметь максимумы. Найдем условия, при которых существуют максимумы этих кривых, и определим их характеристики.

Заметим, что из формулы (6) следует, что обратная функция $B(\tau)$ имеет вид

$$\tau(B) = [\ln(1 + vB) - \ln(1 - VB)]/\varepsilon. \quad (15)$$

В дальнейшем удобно рассматривать форвардную кривую $f(\tau)$ и кривую доходности $y(\tau)$ как сложные функции, зависящие от срока погашения τ только через функцию аффинной структуры $B(\tau)$, т. е. $y(\tau) \equiv Y(B(\tau))$ и $f(\tau) \equiv F(B(\tau))$. Во-первых, это удобно, потому что интервал возможных значений функции $B(\tau)$ является конечным согласно (12), в связи с чем свойства функций $Y(B)$ и $F(B)$ можно иллюстрировать наглядно с помощью графиков на всем интервале возможных значений сроков погашения τ . Во-вторых, как отмечалось в CIR [14, с. 57], функцию $B(\tau)$ можно рассматривать как меру дюрации, поскольку подобно стандартной дюрации цены облигации по отношению к процентной ставке (в этом случае по отношению к спот-ставке) она определяется формулой $[\partial P / \partial r] / P = -B(\tau)$.

Из выражений (11), (13) и (15) получается, что

$$Y(B) \equiv x + (\theta - x) \left(\frac{k}{V} + \varepsilon \frac{B\zeta - k \ln(1 + vB)/vV}{\ln(1 + vB) - \ln(1 - VB)} \right); \quad (16)$$

$$F(B) \equiv r + (\theta - x)[kB - B(V - v)\zeta - vVB^2\zeta]. \quad (17)$$

Если ζ удовлетворяет неравенствам

$$k/(V + v) \leq \zeta \leq k/(V - v),$$

то форвардная кривая $F(B)$ на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$ имеет максимум в точке $B^* = (k\zeta - V + v) / 2vV$, а максимальное значение функции $F(B)$ вычисляется по формуле

$$F(B^*) = r + (\theta - x)[k - (V - v)\zeta]^2 / 4vV\zeta.$$

Если параметр ζ удовлетворяет неравенству

$$\zeta < k/(V + v), \quad (18)$$

то кривая $F(B)$ строго возрастает на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Если параметр ζ удовлетворяет неравенству

$$\zeta > k/(V - v), \quad (19)$$

то форвардная кривая $F(B)$ строго убывает на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Так что для значения краткосрочной ставки r , определяемого равенством $\zeta = k/(V - v)$, максимум форвардной кривой встречается при $B = 0$ (при $\tau = 0$), из чего следует, что форвардная ставка максимальна для коротких сроков погашения. Для значения краткосрочной процентной ставки r , определяемого равенством $\zeta = k/(V + v)$, максимум форвардной кривой встречается при $B = V^{-1}$ (т. е. при $\tau = \infty$), откуда следует, что в этом случае форвардная ставка максимальна для длительных сроков погашения. Форвардная кривая $F(B)$, определяемая выражением (17), является вогнутой функцией. Ранее свойство вогнутости форвардной кривой было отмечено Брауном и Шейфером [15, с. 566].

Характер изменения кривой доходности $y(\tau) \equiv Y(B(\tau))$ в зависимости от $B(\tau)$ является более сложным.

Если параметр ζ удовлетворяет неравенству $\zeta \geq (k/v) \ln(1 + v/V)$, тогда кривая доходности $Y(B)$ – вогнутая на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Если значение ζ удовлетворяет неравенству (18), то кривая доходности $Y(B)$ – выпуклая на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Если значение параметра ζ удовлетворяет неравенствам

$$k/(V + v) \leq \zeta \leq (k/v) \ln(1 + v/V), \quad (20)$$

то кривая доходности $Y(B)$ на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$ имеет точку перегиба B_{π} . Причем кривая доходности $Y(B)$ – вогнутая на интервале $0 \leq B < B_{\pi}$ и выпуклая на интервале $B_{\pi} < B \leq V^{-1}$.

Заметим, что при $\tau \rightarrow \infty$ для предельного значения кривой доходности (14) можно записать неравенство

$$\frac{y(\infty) - x}{\theta - x} \equiv \frac{Y(V^{-1}) - x}{\theta - x} = \frac{k}{V} > \frac{k}{v} \ln\left(1 + \frac{v}{V}\right) > \zeta.$$

При выполнении этого неравенства кривая доходности $Y(B)$ возрастает на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$.

Кривая доходности $Y(B)$ имеет максимум на интервале $0 < B < V^{-1}$, если ζ удовлетворяет неравенствам

$$(k/v) \ln(1 + v/V) < \zeta < k/(V - v), \quad (21)$$

В этом случае кривая доходности $Y(B)$ пересекает форвардную кривую $F(B)$ в точке B_0 (т. е. $Y(B_0) = F(B_0)$) и точка B_0 является точкой максимума кривой доходности $Y(B)$. При этом

$$\begin{aligned} Y(B) &< F(B), \quad \text{если } 0 < B < B_0; \\ Y(B) &> F(B), \quad \text{если } B_0 < B < V^{-1}. \end{aligned}$$

Другими словами, кривая доходности $Y(B)$ пересекает форвардную кривую $F(B)$ в точке B_0 своего максимума. Из этого, в частности, следует, что если максимум кривой доходности $Y(B)$ существует, то максимальное значение $Y(B_0)$ всегда меньше максимального значения форвардной кривой $F(B^*)$, так как $B^* < B_0$.

Взаимные свойства кривых $Y(B)$ и $F(B)$ сведены в табл. 1.

Таблица 1

Формы кривой доходности $Y(B)$ и форвардной кривой $F(B)$
в зависимости от величины процентной ставки

Кривые	Параметры модели удовлетворяют неравенствам			
	(19)	(21)	(20)	(18)
$F(B)$	вогнутая			
	убывает	имеет максимум в точке B^*		возрастает
$Y(B)$	вогнутая		имеет перегиб	выпуклая
	убывает	имеет максимум в точке $B_0, B_0 > B^*$	возрастает	
	$Y(B) > F(B)$	имеется пересечение в точке $B_0, B_0 > B^*$	$Y(B) < F(B)$	

На рис. 1 иллюстрируются взаимные свойства кривых $F(B)$ и $Y(B)$. Кривые на рис. 1 рассчитывались для значений параметров, представленных в табл. 2. Сплошными толстыми линиями изображены форвардные кривые $F(B)$, а сплошными тонкими линиями – кривые доходности $Y(B)$. Круглые маркеры отмечают предельные точки. Пунктирной линией изображен отрезок прямой, соединяющий предельные точки. Интересно отметить, что производная $dY(B)/dB$ по абсолютной величине при $B \rightarrow V^{-1}$ стремится к бесконечности, причем она положительная, если $\zeta > (k/v) \ln(1 + v/V)$, и отрицательная в обратном случае.

Таблица 2

Значения параметров для кривых рис. 1

k	θ	D	x	λ
0,05	0,06	0,001	0,02	0,01

Параметр $r = r(t)$, вообще говоря, является случайным. Остальные параметры детерминированные. В [8, с. 61] показано, что процесс $r(t)$ имеет стационарную плотность вероятностей $p(r)$, которая является сдвинутой плотностью гамма с параметром сдвига x , параметром формы q и параметром масштаба c , т. е.

$$p(r) = c^q (r - x)^{q-1} e^{-c(r-x)} / \Gamma(q), \quad x < r < \infty,$$

где $q = (\theta - x)^2 / D$, $c = (\theta - x) / D > 0$. Поэтому имеется возможность рассчитать вероятности появления той или иной формы кривых доходности при наблюдаемом процессе краткосрочной ставки.

На рис. 2 представлена иллюстрация того, каким образом нижний предельный уровень влияет на характер взаимного положения форвардной кривой $F(B)$ и кривой доходности $Y(B)$. На рис. 2 сплошными толстыми линиями изображены форвардные кривые $F(B)$, а сплошными тонкими линиями – кривые доходности $Y(B)$.

Значения параметров для кривых рис. 2 выбраны те же, что и в табл. 2 за исключением параметра x , который принимает 5 различных значений, соответственно каждой паре кривых. Параметр $r = 0,07$. Нижняя пара кривых соответствует значению $x = -\infty$ (модель Васичека). Выше показана пара кривых для $x = -0,01$. Третья снизу пара кривых рассчитана для $x = 0$ (модель CIR). Далее следуют кривые для $x = 0,03$ и $x = 0,05$. Таким образом, для выбранных значений параметров с повышением нижнего предельного уровня x доходности увеличиваются.

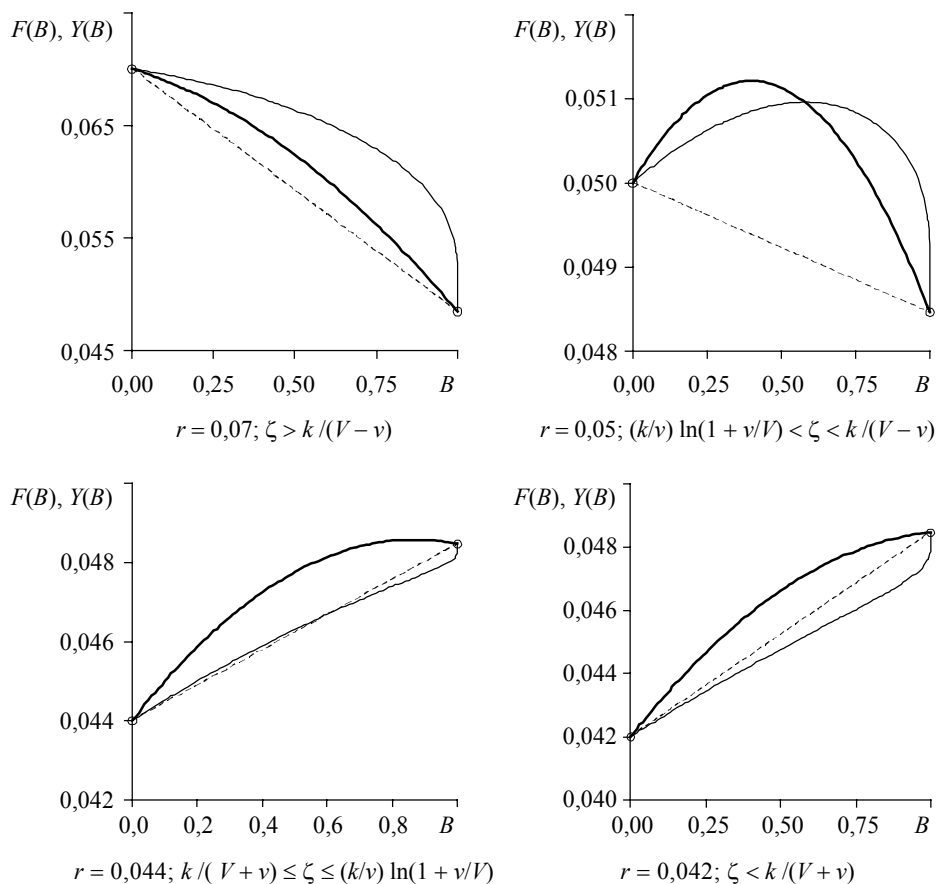


Рис. 1. Четыре возможных вида кривых доходности $Y(B)$ в сравнении с поведением форвардной кривой $F(B)$

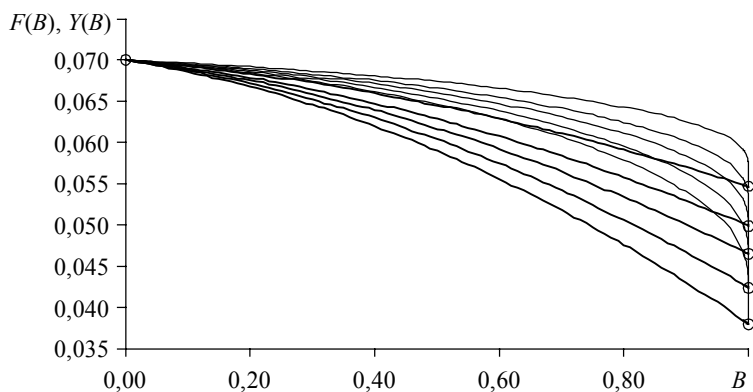


Рис. 2. Влияние нижнего предельного уровня на поведение форвардной кривой $F(B)$ и кривой доходности $Y(B)$

Заключение

Для однофакторной модели аффинной доходности Даффи – Кана найдены аналитические представления кривых доходности и форвардных кривых и исследованы их свойства, когда в качестве временной переменной используется мера дюрации безрисковой ставки. Показано, что для всего многообразия параметров существует только четыре возможных вида кривой доходности. Для малых сроков погашения актива доходность определяется, в основном, текущим уровнем безрисковой ставки, в то время как для очень продолжительных сроков до погашения доходность определяется стационарным математическим ожиданием безрисковой ставки. В связи с этим можно было бы ожидать, что влияние текущего уровня безрисковой ставки на доходность будет с увеличением времени затухать. Однако это не так. Оказалось, что текущий уровень безрисковой ставки существенным образом влияет на вид всей кривой доходности и форвардной кривой. Отметим также, что кривая доходности и форвардная кривая стартуют при $\tau = 0$ из одной точки и при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к одному и тому же пределу, что отличается от обычно принятой точки зрения, что с увеличением τ эти кривые расходятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 102.
2. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 2. Модель Кокса – Ингерсолла – Росса // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 102.
3. *Feller W.* Two singular diffusion problems // Ann. Math. 1951. V. 54. 173–181.
4. *Vasiček O.* An equilibrium characterization of the term structure // J. Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
5. *Cox J., Ingersoll J., Ross S.* A theory of the term structure of interest rate // Econometrica. 1985. V. 53. P. 385–407.
6. *Duffie D., Kan R.* A yield-factor model of interest rates // Mathematical Finance. 1996. V. 6. P. 379–406.
7. *Medvedev G., Cox S.* The market price of risk for affine interest rate term structures // Proc. of the 6th Intern. AFIR Symposium. Nuremberg. 1996. P. 913–924.
8. *Медведев Г.А.* Стохастические процессы финансовой математики. Минск: БГУ, 2005. 243 с.
9. *Schlogl E., Sommer D.* Factor Models and the Shape of the Term Structures. Working paper No. B-395, 1997.
10. *Hull J.* Options, Futures, and other Derivative Securities. Englewood: Prentice Hall, 1993. 492 p.
11. *Bodie Z., Kane A., Marcus J.* Investment. Chicago: Irwin Prof. Publ., 1996.
12. *Campbell J., Lo A., MacKinlay A.* The Econometrics of Financial Markets. Princeton: Princeton Univ. Press, 1997.
13. *Kortanek K., Medvedev V.* Building and Using Dynamic Interest Rate Models. N.Y.: John Wiley & Sons, 2001.
14. *Cox J., Ingersoll J., Ross S.* Duration and the measurement of basis risk // J. Business. 1979. Vol. 52. P. 51–61.
15. *Brown R., Schaefer S.* Interest rate volatility and shape of the term structure // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1994. V. A 347. P. 563–576.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University). **On term structure of yield rates. 3. The Duffie – Kan one-factor model.**

Keywords: yield interest rates, affine model, yield curve, forward curve, Vasiček model, model CIR, Duffie-Kan model.

The time structure of interest rates plays a key role at the bond pricing. Therefore its properties interest many financial analysts. However in the available literature usually there is a schematic description of these properties. Attempt of the detailed description of all possible forms of time structure for a class of affine models of interest rates as for these models it is possible to write down decisions in the closed form here becomes. As the basic the model of Duffie – Kan (DK) with any bottom border for risk free (spot) interest rate is accepted. Results for widely known models CIR and Vasiček turn out as special cases.

For one-factor model of affine yield of Duffie – Kan analytical representations of yield curves and forward curves are found and their properties when the duration measure of risk free rates as a time variable is used are investigated. It is shown that for all variety of parameters exists only four possible kinds of yield curves. For small terms to maturity an bond yield is defined, basically, current level of risk free rates while for very long terms to maturity the yield is defined by a stationary expectation of risk free rates. In this connection it would be possible to expect that influence of current level of risk free rates on yield with time increase will damp. However it not so. It has appeared that current level of risk free rates essentially influences on sight of entire yield curve and a forward curve. Let's notice also that yield curve and a forward curve start from one point and at increase in term to maturity converge to the same limit that differs from usually accepted point of view that these curves diverge when the term to maturity increase.