ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(8)

УДК 519.872, 519.21

А.А. Назаров, М.Г. Носова

О НЕЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОЦЕССА РОЖДАЕМОСТИ ПОТОКАМИ ПУАССОНА ПРИ ДОЛГОСРОЧНОМ ПРОГНОЗИРОВАНИИ[1]

Исследуются системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов с входящим нестационарным пуассоновским потоком и случайным потоком, управляемым цепью Маркова. Показывается нецелесообразность аппроксимации процесса рождаемости потоками Пуассона при долгосрочном прогнозировании.

Ключевые слова: *система массового обслуживания*, *пуассоновский поток*, *цепь Маркова*, *рождаемость*.

В математической демографии случайный поток однородных событий моментов рождения младенцев, как правило, аппроксимируют потоком Пуассона [1], например в [2]. Такая модель представляется достаточно адекватной реальной ситуации при краткосрочном прогнозировании на сроки не более 10 – 15 лет. Однако для среднесрочных прогнозов порядка 20 – 50 лет необходимо рассматривать более адекватные математические модели процесса рождаемости, учитывающие изменения во времени численности женщин репродуктивного возраста, и более того, учитывающие распределение численностей возрастных групп данных женщин, так как коэффициенты рождаемости существенно меняются в рамках репродуктивного возраста (15 – 49 лет) в зависимости от возраста женщин.

В качестве таких математических моделей процесса рождаемости могут выступать случайные потоки со случайной интенсивностью (потоки Кокса) или дважды стохастические потоки, или, другими словами, случайные потоки, управляемые случайными процессами, среди которых наиболее популярны MMP-потоки или MAP-потоки [3].

В данной работе рассматривается наиболее простая для исследования математическая модель случайного потока, управляемого цепью Маркова. Такая модель определяется как поток заявок в автономной системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и средним значением $m(t)$ числа занятых приборов.

Далее исследуется система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает нестационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$, выбираемой из условия совпадения средних значений числа приборов, занятых в автономной системе и в системе с пуассоновским входящим потоком.

Показывается, что характеристики таких систем массового обслуживания существенно различаются, что говорит о нецелесообразности аппроксимации процесса рождаемости потоком Пуассона.

[1] Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 гг.)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

1. Математическая модель автономной системы массового обслуживания

Рассмотрим марковскую автономную систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов (рис. 1), функционирующую следующим образом:

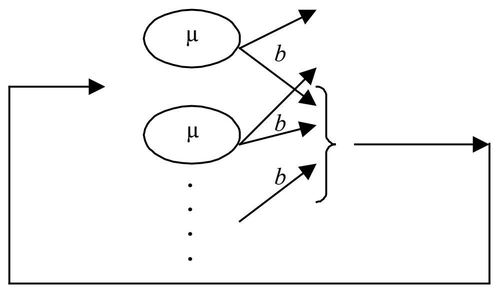

Рис. 1. Марковская автономная система массового обслуживания

Поступающая заявка занимает любой свободный прибор. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. В течение времени обслуживания заявка с интенсивностью b генерирует новые заявки, которые занимают другие свободные приборы, то есть с вероятностью $b\Delta t + o(\Delta t)$ за бесконечно малый интервал времени $(t, t+\Delta t)$ обслуживаемая заявка генерирует новую. Завершив обслуживание на приборе, заявка покидает систему. Времена обслуживания различных заявок и процедуры генерирования новых заявок стохастически независимы. Очевидно, что число приборов $i(t)$, занятых в рассматриваемой системе, является цепью Маркова, поэтому поток заявок, поступающих на приборы, – случайный поток, управляемый цепью Маркова.

2. Исследование автономной системы массового обслуживания

Так как процесс $i(t)$ является цепью Маркова, то для его распределения вероятностей

$$P(i,t) = P\{i(t) = i\}$$

по формуле полной вероятности запишем равенство

$$P(i,t+\Delta t) = P(i,t)(1-i\mu\Delta t)(1-ib\Delta t) + P(i-1,t)(i-1)b\Delta t + P(i+1,t)(i+1)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

из которого нетрудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(i,t)}{\partial t} = -i(\mu+b)P(i,t) + (i-1)bP(i-1,t) + (i+1)\mu P(i+1,t). \tag{1}$$

Обозначая характеристическую функцию числа занятых приборов

$$H(u,t) = Me^{jui(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(i,t),$$

из (1) получим уравнение для $H(u,t)$ в виде

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} + j\left\{(e^{ju}-1)b + (e^{-ju}-1)\mu\right\}\frac{\partial H(u,t)}{\partial u} = 0, \tag{2}$$

решение $H(u,t)$ которого найдем методом характеристик. Уравнение для характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{j\left\{(e^{ju}-1)b+(e^{-ju}-1)\mu\right\}} \tag{3}$$

является уравнением с разделенными переменными, решение которого определяется интегрированием левой и правой его частей. Первый интеграл уравнения (3) запишем в виде

$$C = e^{bt}\left(\frac{e^{ju}-1}{e^{ju}-\frac{\mu}{b}}\right)^{\frac{b}{b-\mu}},$$

поэтому общее решение уравнения (2) можно записать следующим образом:

$$H(u,t) = \varphi\left(e^{bt}\left(\frac{e^{ju}-1}{e^{ju}-\frac{\mu}{b}}\right)^{\frac{b}{b-\mu}}\right), \tag{4}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Будем полагать, что в начальный момент времени t=0 в рассматриваемой СМО занято N приборов, то есть для уравнения (2) задано начальное условие $H(u,0)=e^{juN}$, из которого следует, что

$$\varphi(z) = \left(\frac{1-\frac{\mu}{b}z^{\frac{b-\mu}{b}}}{1-z^{\frac{b-\mu}{b}}}\right)^N,$$

поэтому в силу (4) для характеристической функции $H(u,t)$ можно записать

$$H(u,t) = \left\{\frac{e^{ju}-\frac{\mu}{b}-\frac{\mu}{b}(e^{ju}-1)\exp\{(b-\mu)t\}}{e^{ju}-\frac{\mu}{b}-(e^{ju}-1)\exp\{(b-\mu)t\}}\right\}^N. \tag{5}$$

При b=μ характеристическая функция (5) принимает вид

$$H(u,t) = \left\{\frac{(e^{ju}-1)bt-e^{ju}}{(e^{ju}-1)bt-1}\right\}^N. \tag{6}$$

Из (5) нетрудно получить, что среднее значение $m(t)$ числа занятых приборов составляет

$$m(t) = N\exp\{(b-\mu)t\}. \tag{7}$$

3. Исследование системы с неограниченным числом приборов при пуассоновском входящем потоке

Рассмотрим марковскую систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает нестационарный пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$. Вид функции $\lambda(t)$ определим ниже. Времена обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены. Функция распределения времени обслуживания экспоненциальная с параметром μ.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в системе занято N приборов. Нетрудно показать, что характеристическая функция

$$G(u,t) = Me^{jui(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(i,t)$$

числа занятых приборов в такой системе имеет вид

$$G(u,t) = \left\{1 - e^{-\mu t} + e^{ju} e^{-\mu t}\right\}^N \exp\left\{\left(e^{ju} - 1\right) e^{-\mu t} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\mu\tau} d\tau\right\}. \qquad (8)$$

В силу этого равенства среднее значение $m(t)$ числа занятых приборов

$$m(t) = Ne^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\mu\tau} d\tau. \qquad (9)$$

Вид функции $\lambda(t)$ выберем из условия совпадения математических ожиданий числа занятых приборов в рассматриваемых системах обслуживания. Тогда в силу равенств (7) и (9) можно записать

$$N \exp\{(b - \mu)t\} = Ne^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\mu\tau} d\tau,$$

из которого получим, что интенсивность $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda(t) = bN \exp\{(b - \mu)t\}. \qquad (10)$$

Для такой интенсивности входящего пуассоновского потока в системе $M(t)|M|\infty$ и автономной системе средние значения числа занятых приборов одинаковы и определяются равенством (7). Для интенсивности $\lambda(t)$ вида (10), характеристическая функция (8) примет вид

$$G(u,t) = \left\{1 - e^{-\mu t} + e^{ju} e^{-\mu t}\right\}^N \exp\left\{\left(e^{ju} - 1\right) Ne^{-\mu t} \left(e^{bt} - 1\right)\right\}. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что $G(u,t)$ является характеристической функцией суммы двух независимых случайных величин, первая из которых имеет биномиальное распределение с вероятность успеха $e^{-\mu t}$ и N – числом опытов, а вторая имеет пуассоновское распределение с параметром $Ne^{-\mu t}\left(e^{bt} - 1\right)$.

4. О нецелесообразности аппроксимации процесса рождаемости потоком Пуассона

Найдем распределения вероятностей $P(i,t)$ и $PA(i,t)$, определяемых характеристическими функциями $G(u,t)$ и $H(u,t)$. Определяя обратное преобразование Фурье, получим равенства

$$P(i,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} G(u,t) du; \qquad (12)$$

$$PA(i,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u,t) du. \qquad (13)$$

Подставляя (5) и (11) в равенства (12) и (13) и выполняя здесь численное интегрирование, найдем распределения вероятностей $P(i,t)$ и $PA(i,t)$ для заданных значений параметров μ, b, N и времени t. Определим расстояние между распределениями $P(i,t)$ и $PA(i,t)$ равенством

$$\rho(b,t) = \max_{0 \le i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} (P(n,t) - PA(n,t)) \right| .$$

Для значений параметров $\mu = 1$ и $N = 15$ найдем значения расстояния $\rho(b,t)$ для различных значений параметров b и t, которые приведены в таблице. Здесь, в силу равенства $\mu = 1$, единицей времени является среднее значение продолжительности жизни человека (60 – 70 лет).

Расстояние между распределениями *P*(*i*, *t*) и *PA*(*i*, *t*)
для различных значений параметров *b* и *t*

b	t				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,8	0,019	0,039	0,057	0,075	0,090
1,2	0,030	0,059	0,086	0,112	0,136
1,5	0,038	0,073	0,107	0,139	0,167

Результаты, приведенные в таблице, показывают, что расстояние $\rho(b,t)$ возрастает с ростом значений параметра b и времени t.

Заключение

Полагая, что аппроксимация одного распределения вероятностей другим возможна, когда расхождение между ними не превосходит 0,03, можно сделать вывод о допустимости аппроксимации процесса рождаемости потоком Пуассона при краткосрочном прогнозировании, когда $t < 0,2$. Однако при рассмотрении среднесрочных прогнозов на 20 – 50 лет, а тем более долгосрочных прогнозов на периоды более 50 лет аппроксимация процесса рождаемости пуассоновским потоком нецелесообразна, так как приводит к значительным расхождениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
2. *Староверов О.В.* Модели движения населения. М.: Наука, 1979. 230 с.
3. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Назаров Анатолий Андреевич
Носова Мария Геннадьевна
Томский государственный университет
E- mail: nazarov@fpmk.tsu.ru; nosova_mg@mail.ru
Поступила в редакцию 11 мая 2009 г.