

УДК 620.179.152

В.И. Солодушкин

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕКТОРА ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЁТОМ ОБЪЁМНОСТИ ОБЪЕКТА КОНТРОЛЯ

В работе решается задача оптимального выбора функции пространственной чувствительности детектора применительно к радиометрической системе, предназначенной для обнаружения инородных включений в объекте контроля (с учетом их трехмерной объемности). Дан полный анализ влияния всевозможных сложнопрофильных барьеров на обнаружение (выявление) произвольных однородных дефектов (неоднородностей).

Ключевые слова: оптимальные функции пространственной чувствительности, объект контроля, однородные дефекты.

При проектировании радиометрических систем радиационного контроля одной из основных является задача выбора функции пространственной чувствительности детектора (ФПЧД) ионизирующего излучения [1 – 4]. Ранее эта задача решалась путем оптимального выбора отдельных параметров апертур при использовании детекторов с однородной (в пределах его рабочей зоны) чувствительностью к падающему на него излучению [5 – 8]. Между тем, естественно предположить, что для эффективного обнаружения радиометрической системой в объекте контроля (ОК) инородных включений (ИВ) сложной конфигурации целесообразно использовать детекторы с неоднородной чувствительностью (ДНЧ). На практике такие детекторы используются в некоторых системах рентгеновской вычислительной томографии [1].

Между тем, насколько известно, теоретически не исследованы предельные возможности ДНЧ и не найдена оптимальная ФПЧД.

1. Постановка оптимизационной задачи

Указанную задачу будем решать при следующих предположениях и ограничениях:

1) Источник излучения – моноэнергетический, мононаправленный, пуассоновский.

2) Барьер (ОК) – однородный, сложнопрофильный с априорно известными геометрическими характеристиками и с линейным коэффициентом ослабления (ЛКО) излучения μ_1 .

3) ИВ (дефект) – произвольное трехмерное однородное тело, с заданными формой и размерами, ограниченное в пространстве (локальное образование), однородное. ЛКО ИВ – μ_2 .

4) ФП – однородный фильтрующий поглотитель с переменной толщиной, ЛКО ФП – μ_3 .

5) ОК перемещается дискретно с малым (по сравнению с размерами ИВ) шагом.

6) Время измерения потока излучения детектором постоянно на каждом шаге и равно τ .

7) Критерий качества – отношение сигнал/шум (ОСШ) [9, 10]:

$$M = \frac{\Delta N}{\sigma}, \quad (1)$$

где ΔN – изменение среднего числа квантов, регистрируемых детектором, обусловленное наличием ИВ в ОК (сигнал); σ – среднее квадратическое отклонение числа квантов, регистрируемых детектором при отсутствии ИВ в ОК (шум).

Введем декартову систему координат. Плоскость XOY расположим на рабочей поверхности детектора, ось OZ направим перпендикулярно плоскости XOY (если излучение мононаправлено, то параллельно падающему пучку излучения).

Зададим геометрические условия контроля: лучевую длину вдоль прямой, параллельной оси OZ и проходящей через точку $(x, y, 0)$, для объекта контроля обозначим $H(x, y)$; для инородного включения – $g(x, y)$; для фильтрующего поглотителя – $p(x, y)$.

Пусть Ω – рабочая поверхность детектора излучения (Ω – подмножество плоскости OXY). Предположим, что источник излучения мононаправленный с направлением, параллельным оси OZ . Тогда среднее число квантов излучения, зарегистрированных детектором за время τ при отсутствии ИВ, согласно [5, 10, 11]

$$N_1 = N_0 \tau \varepsilon \iint_{\Omega} \exp(-\mu_1 H(x, y) - \mu_3 p(x, y)) dx dy,$$

где $p = p(x, y)$ – лучевой размер ФП, μ_3 – ЛКО ФП, N_0 – плотность потока излучения, ε – эффективность регистрации излучения детектором. Среднее число зарегистрированных детектором квантов за время τ при наличии ИВ составит:

$$N_2 = N_0 \tau \varepsilon \iint_{\Omega} \exp(\mu_3 p(x, y) - \mu_1 H(x, y) + (\mu_1 - \mu_2) g(x, y)) dx dy.$$

Тогда величина сигнала от дефекта

$$\Delta N = |N_1 - N_2|$$

или в развернутом виде

$$\Delta N = N_0 \tau \varepsilon \iint_{\Omega} (|1 - \exp(-\mu g(x, y))| \exp(-\mu_1 H(x, y) - \mu_3 p(x, y))) dx dy, \quad (2)$$

где $\mu = \mu_2 - \mu_1$. Среднее квадратическое отклонение числа квантов, регистрируемых детектором, для пуассоновского потока излучения

$$\sigma = \sqrt{N_1} = \sqrt{N_0 \tau \varepsilon \iint_{\Omega} \exp(-\mu_1 H(x, y) - \mu_3 p(x, y)) dx dy}. \quad (3)$$

При подстановке (2), (3) в (1) получаем развернутое выражение для ОСШ:

$$M = \frac{\Delta N}{\sigma} = \sqrt{N_0 \tau \varepsilon} \frac{\iint_{\Omega} |1 - \exp(-\mu g(x, y))| \exp(-\mu_1 H(x, y) - \mu_3 p(x, y)) dx dy}{\sqrt{\iint_{\Omega} \exp(-\mu_1 H(x, y) - \mu_3 p(x, y)) dx dy}}. \quad (4)$$

Таким образом, в математическом отношении стоящая перед нами задача заключается в нахождении максимума выражения (4) по всем неотрицательным, измеримым по Лебегу [12, 13] функциям $p(x, y)$.

Обозначим

$$f(x, y) = \exp(-\mu_3 p(x, y)),$$

$$\varphi_1(x, y) = \exp(-\mu_1 H(x, y)), \quad \varphi_2(x, y) = |1 - \exp(-\mu g(x, y))|,$$

$$c = \sqrt{N_0 \varepsilon \tau}.$$

Введем нелинейный функционал:

$$F(f) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot \varphi_1 \, dx dy}}, \quad (5)$$

где $f \in G = \{f \mid 0 \leq f \leq 1, f - \text{измеримая по Лебегу функция } f: R^2 \rightarrow R^1\}$,
 $\varphi_1 \in G_1 = \{f: R^2 \rightarrow R^1 \mid 0 \leq f \leq 1, f - \text{измеримая по Лебегу функция}\}$,
 $\varphi_2 \in G_2 = \{f: R^2 \rightarrow R^1 \mid f - \text{ограниченная неотрицательная функция, принимающая положительные значения на ограниченном с ненулевой мерой множестве, измеримая по Лебегу функция}\}$.

2. Решение оптимизационной задачи

Зафиксируем функции φ_1 и φ_2 , тогда получим нелинейный функционал

$$F: G \rightarrow R^1.$$

Из (4) и (5) следует, что ОСШ равно

$$M = cF(f).$$

Таким образом, необходимо найти максимум функционала F на множестве G , а также необходимо найти множество экстремалей этого функционала (множество функций, где функционал принимает максимальное значение). Обозначим

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_2(x, y) > 0\};$$

$L = \sup \varphi_2$, χ_D – характеристическая функция множества D . Так как φ_2 – финитная, то множество D – ограничено ($D \subseteq \Omega$), следовательно,

$$v_0(D) = \iint_D dx dy < +\infty,$$

а так как φ_2 ограничена и неотрицательна, то $0 \leq L < +\infty$.

Покажем, что функционал $F(f)$ ограничен сверху. Действительно,

$$\begin{aligned} F(f) &= \frac{\iint_{R^2} f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy}{\sqrt{\iint_{R^2} f \cdot \varphi_1 \, dx dy}} = \frac{\iint_D f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy}{\sqrt{\iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy + \iint_{R^2 \setminus D} f \cdot \varphi_1 \, dx dy}} \leq \\ &\leq \frac{\iint_D f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy}{\sqrt{\iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy}} = F(f \cdot \chi_D) \leq L \cdot \frac{\iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy}{\sqrt{\iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy}} = L \cdot \sqrt{\iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy} \leq \\ &\leq L \cdot \sqrt{\iint_D dx dy} = L \cdot \sqrt{v_0(D)} < +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что функционал F ограничен на G и $\exists \sup F(f) = F_0 < +\infty$.

Также получаем, что

$$F(f) \leq F(f \cdot \chi_D)$$

и равенство

$$F(f) = F(f \cdot \chi_D)$$

выполняется только для тех f , для которых $f = 0$ на множестве $R^2 \setminus D$ (то есть $f = f \cdot \chi_D$ с точностью до меры нуль). Кроме того, видим, что если множество

$$P = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) > 0\}$$

имеет нулевую меру, то $F(f) = 0$. Отсюда можно сделать вывод: если f – экстремаль, то $f(x, y) = f \cdot \chi_D$ и $v_0(P) > 0$. Поэтому везде в дальнейшем (не оговаривая особо) будем считать

$$f = f \cdot \chi_D \text{ и } v_0(P) > 0.$$

Обозначим множество экстремалей:

$$G_3 = \{f \in G \mid F(f) = F_0\}.$$

Заметим, что если множество экстремалей $G_3 \neq \emptyset$, то $\sup_{f \in G}$ можно заменить на

$\max_{f \in G}$. Для любого $\lambda \geq 0$ введем множества

$$D_\lambda = \{(x, y) \mid \varphi_2(x, y) > \lambda\}, \quad B_\lambda = \{(x, y) \mid \varphi_2(x, y) = \lambda\},$$

$$A_\lambda = \{(x, y) \mid \varphi_2(x, y) \geq \lambda\};$$

$$M = \{f \in G \mid \exists \lambda \geq 0 : f = \chi_{D_\lambda}\}, \quad K = \{f \in G \mid \exists \lambda > 0 : f = \chi_{A_\lambda}\},$$

где χ_X – характеристическая функция множества $X \subseteq R^2$. Ясно, что $D_0 = D$. Особо не оговаривая, будем считать, что две функции равны, если они совпадают с точностью до меры нуль (почти всюду).

Докажем, что $G_3 \subseteq M \cup K$. Доказательство состоит из двух частей:

1) $\forall f \in G \exists \lambda, \exists B \subseteq B_\lambda$, такие, что

$$F(f) \leq F(\chi_{D_\lambda \cup B}),$$

причем равенство достигается только тогда, когда

$$f = \chi_{D_\lambda \cup B}.$$

Отсюда вытекает, что G_3 состоит из функций вида $\chi_{D_\lambda \cup B}$, то есть

$$G_3 \subseteq G_4 = \{f \in G \mid \exists \lambda \text{ и } \exists B \subseteq B_\lambda \text{ такие, что } f = \chi_{D_\lambda \cup B}\}.$$

2) Докажем, что если $f \in G_3$, то $\exists \lambda$ такое, что $f = \chi_{D_\lambda}$ или $f = \chi_{A_\lambda}$, то есть $B = \emptyset$ или $B = B_\lambda$ (равенства здесь выполняются с точностью до меры нуль).

Поэтому

$$G_3 \subseteq M \cup K.$$

Итак,

1) Обозначим

$$v(X) = \iint_X \varphi_1 \, dx dy, \quad S(\lambda) = v(D_\lambda) = \iint_{D_\lambda} dv = \iint_{D_\lambda} \varphi_1 \, dx dy,$$

$$S_1(\lambda) = v(A_\lambda) = \iint_{A_\lambda} dv = \iint_{A_\lambda} \varphi_1 \, dx dy.$$

Ясно, что

$$v(B_\lambda) = S_1(\lambda) - S(\lambda),$$

S_1 – непрерывная слева, S – непрерывная справа. Обозначим

$$a = \iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy, \quad S(0) = \iint_D \varphi_1 \, dx dy.$$

Получим

$$0 \leq a \leq S(0), \quad 0 \leq S(\lambda) \leq S_1(\lambda) \leq S(0).$$

Так как $\varphi_1 > 0$, то при $\lambda_1 < \lambda_\lambda$ получим $D_{\lambda_2} \subseteq D_{\lambda_1}$, следовательно, $S(\lambda)$ и $S_1(\lambda)$ – невозрастающие функции и выполняется равенство

$$S(\lambda - 0) - S(\lambda + 0) = S_1(\lambda - 0) - S_1(\lambda + 0) = v(B_\lambda).$$

Отсюда вытекает, что если площадь (мера Лебега) множества B_λ равна нулю, то S и S_1 непрерывны в точке λ . Для заданной функции f выберем такие λ и $B \subseteq B_\lambda$, что $a = S(\lambda) + v(B)$. Покажем, что $F(f) \leq F(\chi_{D_\lambda \cup B})$. Для удобства обозначим $Q = D_\lambda \cup B$. Тогда

$$\begin{aligned} F(f) - F(\chi_Q) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\iint_D f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy - \iint_Q \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\iint_{D \setminus Q} f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy - \iint_Q (1-f) \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\iint_{D \setminus Q} f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy - \iint_Q \lambda (1-f) \varphi_1 \, dx dy \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\iint_{D \setminus Q} f \cdot \varphi_1 \cdot \lambda \, dx dy - \iint_Q \lambda \cdot (1-f) \varphi_1 \, dx dy \right) = \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \left(\iint_D f \cdot \varphi_1 \, dx dy - \iint_{D_\lambda} \varphi_2 \, dx dy - \iint_B \varphi_1 \, dx dy \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} (a - S(\lambda) - v(B)) = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

То есть $F(f) \leq F(\chi_Q)$. Если $f \in G_3 \Rightarrow F(f) = F(\chi_Q)$, а это равенство верно только в том случае, когда выполнена система равенств:

$$\begin{cases} \iint_Q (\varphi_2 - \lambda)(1-f) \varphi_1 \, dx dy = 0, \\ \iint_{D \setminus Q} (\lambda - \varphi_2) f \cdot \varphi_1 \, dx dy = 0. \end{cases}$$

Так как $\varphi_1 > 0$ и $\varphi_2(x, y) = \lambda$ при $(x, y) \in B_\lambda$, то данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \iint_{D_\lambda} (1-f) dx dy = 0, \\ \iint_{D \setminus A_\lambda} f dx dy = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает [12 – 14]:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_\lambda, \\ 0, & (x, y) \in D \setminus A_\lambda. \end{cases}$$

Остается вопрос о значениях экстремали $f \in G_3$ на множестве B_λ .

Но для экстремали $f \in G_3$

$$F(f) = \frac{\iint_D f \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 dx dy}{\sqrt{\iint_D f \cdot \varphi_1 dx dy}} = \frac{\iint_{D_\lambda} \varphi_1 \cdot \varphi_2 dx dy + \lambda \iint_{B_\lambda} f \cdot \varphi_1 dx dy}{\sqrt{\iint_{D_\lambda} \varphi_1 dx dy + \iint_{B_\lambda} f \cdot \varphi_1 dx dy}}.$$

Обозначим

$$\alpha = \iint_{D_\lambda} \varphi_1 \cdot \varphi_2 dx dy, \quad \beta = \iint_{D_\lambda} \varphi_1 dx dy, \quad t = \iint_{B_\lambda} f \cdot \varphi_1 dx dy, \quad b = v(B_\lambda) = \iint_{B_\lambda} \varphi_1 dx dy,$$

тогда

$$F(f) = \frac{\alpha + \lambda t}{\sqrt{\beta + t}}$$

– функция от аргумента t , где $t \in [0; b]$, $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $\lambda > 0$; $b > 0$.

Исследуем на экстремум функцию

$$g(t) = \frac{\alpha + \lambda t}{\sqrt{\beta + t}} \text{ на отрезке } t \in [0, b]. \text{ Производная } \frac{dg}{dt} = \frac{\lambda t + (2\lambda\beta - \alpha)}{2\sqrt{(t + \beta)^3}}.$$

Поэтому, если $2\lambda\beta - \alpha \geq 0$, то $g(t)$ – возрастающая, и, следовательно, глобальный максимум функции достигается при $t = b$. Если $2\lambda\beta - \alpha < 0$, то $g(t)$ при возрастании t сначала убывает до значения $t = \alpha / \pi - 2\beta$, а затем $g(t)$ возрастает. То есть при $2\lambda\beta - \alpha < 0$ функция принимает максимальное значение либо при $t = 0$, либо при $t = b$.

Таким образом, для оптимальной $f \in G_3$ имеем

$$\iint_{B_\lambda} f \cdot \varphi_1 dx dy = 0,$$

следовательно, $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in B_\lambda$ либо

$$\iint_{B_\lambda} f(x, y) \varphi_1 dx dy = b = \iint_{B_\lambda} \varphi_1 dx dy,$$

поэтому

$$\iint_{B_\lambda} (f - 1) \varphi_1 dx dy = 0,$$

следовательно,

$$f = 1 \text{ при } (x, y) \in B_\lambda.$$

То есть, если $f \in G_3$, то либо $f = \chi_{D_\lambda}$, либо $f = \chi_{D_\lambda \cup B_\lambda} = \chi_{A_\lambda}$, следовательно, $G_3 \subseteq M \cup K$ (равенства функций понимаются с точностью до меры нуль, то есть почти всюду). Заметим, что если $S(\lambda)$ непрерывна в точке λ (то есть $v(B_\lambda) = 0$), то с точностью до меры нуль

$$\chi_{D_\lambda \cup B_\lambda} = \chi_{D_\lambda},$$

а если $S(\lambda)$ непрерывна в любой точке, то $M = K$.

Таким образом, если функция f доставляет максимум функционалу F , то f – характеристическая функция χ_{D_λ} или χ_{A_λ} . То есть оптимальный фильтрующий поглотитель имеет один из видов:

$$p_1(x, y) = \begin{cases} 0, & \varphi_2(x, y) > \lambda, \\ +\infty, & \varphi_2(x, y) \leq \lambda \end{cases}$$

или

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 0, & \varphi_2(x, y) \geq \lambda, \\ +\infty, & \varphi_2(x, y) < \lambda. \end{cases}$$

Следовательно, задача свелась к классической задаче нахождения максимума одномерных функций $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$, зависящих от одного аргумента λ :

$$F(\chi_{D_\lambda}) = \frac{\iint_{D_\lambda} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy}{\sqrt{\iint_{D_\lambda} \varphi_1 \, dx dy}} = u_1(\lambda) \quad \text{и} \quad F(\chi_{A_\lambda}) = \frac{\iint_{A_\lambda} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx dy}{\sqrt{\iint_{A_\lambda} \varphi_1 \, dx dy}} = u_2(\lambda).$$

Оптимальную апертуру определяют множества D_λ или A_λ , где λ определяется из максимума (супремума) функций $u_1(\lambda)$ или $u_2(\lambda)$.

Из теоремы Д.Ф.Егорова [14] вытекает, что функции φ_1 и φ_2 можно заменить на «близкие» им (относительно меры Лебега), но достаточно «гладкие» функции, причем так, что $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ совпадут и будут непрерывно дифференцируемы.

В случае непрерывной дифференцируемости функций $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ получим (дифференцированием) соотношение для нахождения оптимального значения λ :

$$\iint_{D_\lambda} \varphi_1(\varphi_2 - \lambda) dx dy = \lambda \cdot \iint_{D_\lambda} \varphi_1 dx dy. \quad (6)$$

Соотношение (6) можно записать в эквивалентном виде:

$$\iint_{D_\lambda} (\varphi_2 - \lambda) dv = \lambda \cdot v(D_\lambda), \quad (7)$$

где

$$v(X) = \iint_X \varphi_1(x, y) dx dy$$

– весовая мера Лебега [14]. Равенство (7) можно интерпретировать геометрически (см. рис. 1). На этом рисунке оптимальное значение λ находится из равенства объемов фигур Φ_1 («шاپочки», определяемой поверхностью $z = \varphi_2(x, y)$ и лежащей выше уровня λ) и Φ_2 (лежащей ниже уровня λ и ограниченной с боков цилиндрической поверхностью, а сверху и снизу – плоскостями). Объем здесь понимается относительно весовой меры Лебега $v(*)$.

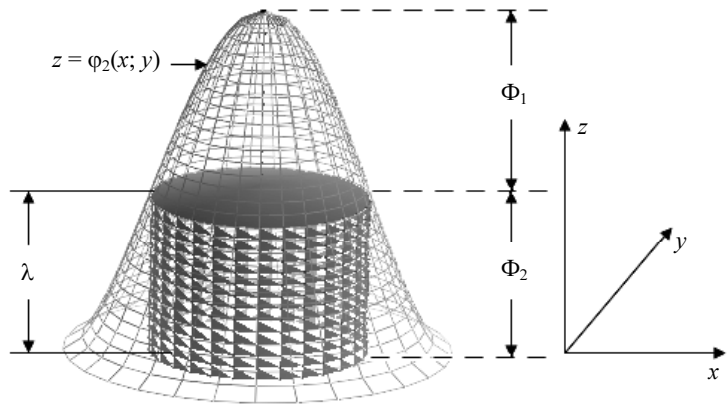


Рис. 1. К расчету оптимального значения уровня λ

Теперь приведем пример численного расчета выигрыша от применения оптимальной апертуры для дефекта, имеющего ступенчатую форму (см. рис. 2, 3 и 4).

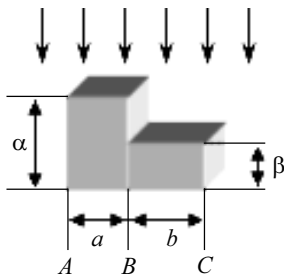


Рис. 2. Дефект ступенчатой формы

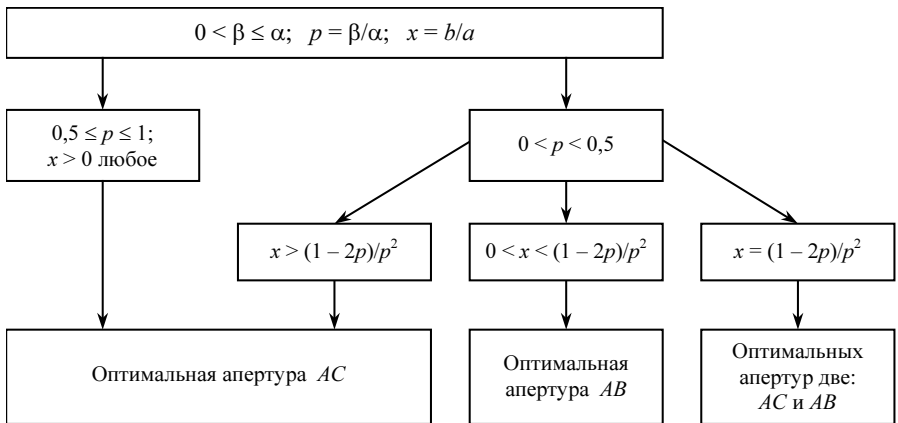


Рис.3.Алгоритм нахождения оптимальной апертуры для дефекта ступенчатой формы

Если

$$0 < p < 0,5; \quad 0 < x < \frac{1-2p}{p^2},$$

то выигрыш в ОСШ равен:

$$\delta = \frac{\text{ОСШ}(AB)}{\text{ОСШ}(AC)} = \frac{\alpha\sqrt{a}}{\left(\frac{\alpha a + \beta b}{\sqrt{a+b}}\right)} = \frac{\alpha\sqrt{a(a+b)}}{\alpha a + \beta b} = \frac{\sqrt{1+x}}{1+px}.$$

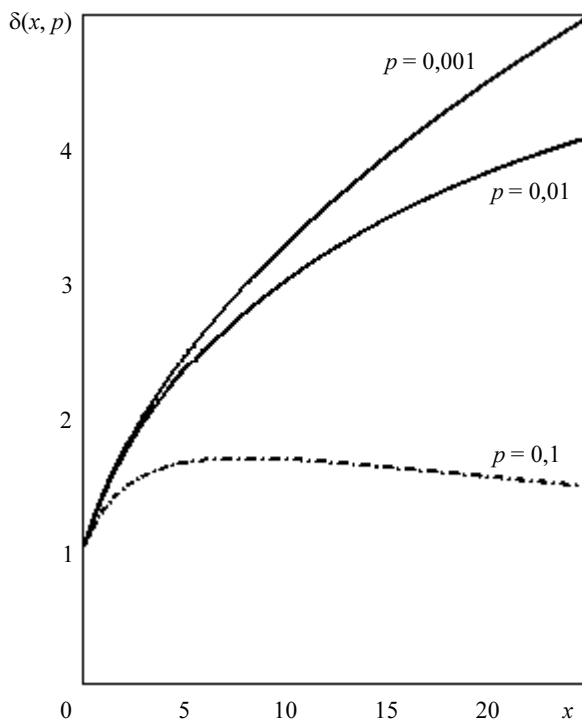


Рис. 4. Величина выигрыша от применения оптимальной апертуры для дефекта, имеющего ступенчатую форму

Заключение

Показано, что наилучшее обнаружение инородного включения достигается при использовании детектора, пространственная чувствительность которого описывается характеристической функцией некоторого специального множества.

Выведено соотношение, позволяющее найти оптимальную функцию пространственной чувствительности детектора, используемого в радиометрической системе при обнаружении ею в контролируемом объекте инородных включений. Показано, что если лучевой размер инородного включения описывается выпуклой функцией, то оптимальная функция пространственной чувствительности детектора существует и единственна. Предложена простая геометрическая интерпретация основных результатов исследования. Отмечена область преимущественного использования полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Henkelman R.M., Preiss B.R.* A nonuniform detector aperture for CT-IN // J. Comput. Assist. Tomogr. 1981. No. 3. P. 401 – 408.
2. *Сидуленко О.А., Солодушкин В.И., Удод В.А.* Фильтрация изображений с переменной разрешающей способностью на основе применения аподизированных приемников изображений // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2001. Вып. 1. С. 350 – 351.
3. *Солодушкин В.И.* О выборе апертуры детектора излучения радиометрической системы контроля // Научно-практическая конференция «Молодые ученые и специалисты – народному хозяйству»: Тез. докл. Томск, 1983. С. 6.
4. *Солодушкин В.И., Удод В.А.* Оптимизация характеристик сканирующих систем по модифицированному критерию пространственной разрешающей способности // Региональная конференция «Обработка изображений и дистанционные исследования»: Тез. докл. Новосибирск, 1987. С. 173 – 174.
5. *Рентгенотехника: Справочник.* В 2 кн. Кн. 1. / Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1986. 383 с.
6. *Гурвич А.М.* Физические основы радиационного контроля и диагностики. М.: Энергоиздат, 1989. 168 с.
7. *Вагин А.Е., Зыков И.К., Клейнер В.Д.* К вопросу о выборе параметров ионизационно-радиометрического дефектоскопа // Дефектоскопия. 1968. № 6 С. 83 – 85.
8. *Васильев В.Д., Покровский А.В.* Расчет оптимальных параметров многоканальных радиометрических дефектоскопов // Дефектоскопия. 1978. № 3. С. 100 – 102.
9. *Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий:* В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. В.В. Клюева. 2 -е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1986. 488 с.
10. *Солодушкин В.И.* Выбор оптимальной формы апертуры детектора излучения в радиометрических системах контроля // Томский государственный архитектурно-строительный университет. Томск, 1999. 8 с. Деп. в ВИНТИ 01.12.99, № 3564-В99.
11. *Добромыслов В.А., Румянцев С.В.* Радиационная интроскопия. М.: Атомиздат, 1981. 352 с.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа: Пер. с англ. В.П. Хавина. М.: Мир, 1966. 320 с.
13. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 720 с.
14. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 360 с.

Статья представлена кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 марта 2008 г.