

УДК 681.5

С.В. Смагин

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВЫХОДОМ ОБЪЕКТА ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассматривается алгоритм синтеза локально-оптимальной следящей системы управления выходом линейного дискретного объекта с неизвестными аддитивными возмущениями. Предлагается формировать динамический закон управления.

**Ключевые слова:** *следящие системы, дискретные системы, динамическое управление.*

Задача слежения широко используется при управлении в технических системах. В экономике следящие системы применяются при управлении запасами [1, 2], при управлении производством [3, 4] и в задачах управления портфелем ценных бумаг [5].

В теории оптимального управления наиболее распространен подход синтеза управлений на основе оптимизации интегральных и суммарных критериев. Однако для нелинейных объектов он требует решения двухточечных краевых задач, а для линейных – решения матричных дифференциальных уравнений в обратном времени. Метод синтеза управлений по локальным критериям [6, 7] существенно упрощает решение задачи. В этом случае уже не требуется решения двухточечных краевых задач, процедура синтеза сводится к решению матричных разностных уравнений с граничными значениями на левом конце.

В настоящей работе рассмотрена задача синтеза дискретных следящих систем управления выходом объекта при неизвестных возмущениях. Задача рассмотрена для локального критерия. Для математической модели производства, сбыта и хранения товаров [8, 9] выполнено моделирование динамической следящей системы управления. Предлагаемый алгоритм обобщает результаты работы [10] на дискретные системы с неполной информацией о возмущениях.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается дискретная система, которая описывается следующими разностными уравнениями:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + f + q(k), \quad (1)$$

где  $x(k)$  –  $n$ -мерный вектор состояния (полностью доступен наблюдению),  $u(k)$  –  $m$ -мерный вектор управления,  $A$  –  $n \times n$ -матрица динамики системы,  $B$  –  $n \times m$ -матрица влияния управляющих воздействий,  $f$  – детерминированная неизвестная постоянная составляющая возмущений,  $q(k)$  – случайная составляющая возмущений, гауссовский белый шум с характеристиками:

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}, \quad (2)$$

где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера.

Вектор выхода системы определяется соотношением

$$y(k) = Fx(k), \quad (3)$$

где  $y(k)$  –  $r$ -мерный вектор выхода системы, отслеживающий заданный вектор  $z(k)$ ,  $F$  – матрица выхода размерности  $r \times n$ .

Оптимизируемый локальный критерий задается в виде

$$J(k) = M\{(y(k+1) - z(k))^T C(y(k+1) - z(k)) + u^T(k) Du(k)\}, \quad (4)$$

где  $C > 0$  и  $D \geq 0$  – весовые матрицы критерия,  $z(k)$  – отслеживаемый вектор размерности  $r$ .

Требуется найти управление  $u(k)$ , минимизирующее критерий (4).

## 2. Синтез динамического закона управления

Для решения задачи осуществляется преобразование объекта (1) и критерия (4). Далее исключается постоянная составляющая возмущений из описания объекта посредством вычитания из уравнения (1) такого же уравнения, но со сдвигом на один такт. Результатом является следующее уравнение:

$$x(k+1) = (A + E_n)x(k) - Ax(k-1) + Bu(k) - Bu(k-1) + q(k) - q(k-1). \quad (5)$$

Расширение пространства состояния системы осуществляется посредством добавления к уравнению (5) тождества вида

$$x(k) = x(k). \quad (6)$$

Вводятся следующие обозначения:

$$X(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{pmatrix}, \quad \Psi(k-1) = \begin{pmatrix} -Bu(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{q}(k) = \begin{pmatrix} q(k) - q(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тогда система (5) и (6) в векторно-матричной форме имеет вид

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}u(k) + \Psi(k-1) + \bar{q}(k), \quad (8)$$

где  $\bar{A} - 2n \times 2n$ -матрица,  $\bar{B} - 2n \times m$ -матрица имеют следующую блочную структуру:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A + E_n & -A \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В (5) и (9)  $E_n$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ .

Локальный критерий (4) и вектор выхода расширенной системы представляются в эквивалентном виде:

$$J^*(k) = M\{(Y(k+1) - \bar{z}(k))^T \bar{C}(Y(k+1) - \bar{z}(k)) + u^T(k) Du(k)\}; \quad (10)$$

$$Y(k+1) = \bar{F}X(k+1), \quad (11)$$

где 
$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} z(k) \\ z(k-1) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Оптимальное управление объектом (8) по критерию (10) примет вид

$$u(k) = -(\bar{B}^T \bar{F}^T \bar{C} \bar{F} \bar{B} + D)^{-1} \bar{B}^T \bar{F}^T \bar{C} (\bar{F} \bar{A} X(k) - \bar{z}(k) + \bar{F} \Psi(k-1)). \quad (13)$$

Учитывая представление блочных матриц (7), (9) и (12), вместо (13) получаем следующее выражение для управлений:

$$u(k) = -(B^T F^T C F B + D)^{-1} B^T F^T C ((F A + F)x(k) - F A x(k-1) - z(k) - F B u(k-1)). \quad (14)$$

Полученный закон управления (14) является динамическим, для его реализации требуется задать начальное условие:  $u(0) = u_0$ .

### 3. Задача управления сбытом и хранения товаров

Рассмотрим применение алгоритма (14) к задаче управления производством, сбытом и хранением для одного вида товара в условиях непредсказуемых изменений параметров модели. В модели объекта используются следующие переменные:  $z(k)$  – количество товаров на рынке в момент времени  $k$ ,  $u(k)$  – количество произведенного товара в момент времени  $k$ ,  $v(k)$  – количество товаров у потребителя,  $w(k)$  – прибыль, полученная в момент времени  $k$ .

Уравнения для переменных  $z$ ,  $v$ ,  $w$  имеют вид [8]

$$z(k+1) = (1 - k_1)z(k) + u(k) - s(k), \quad z(0) = z_0; \quad (15)$$

$$v(k+1) = (1 - k_2)v(k) + s(k), \quad v(0) = v_0; \quad (16)$$

$$w(k+1) = w(k) + cs(k) - c_0u(k) - k_3z(k), \quad w(0) = w_0, \quad (17)$$

где  $k_1$  – коэффициент порчи товара на рынке,  $k_2$  – коэффициент потребления,  $k_3$  – стоимость хранения единицы товара на рынке.

Функция продаж  $s(k)$  имеет вид

$$s(k) = n(c) \left(1 - \frac{v(k)}{P}\right) z(k), \quad (18)$$

где  $n(c) = n_0 \exp(-c)$ .

Здесь  $c$  – цена товара,  $c_0$  – его себестоимость,  $n_0$  – коэффициент продаж,  $P$  – характеризует покупательскую способность рынка (это количество товара, которое необходимо для полного насыщения рынка – потенциальный спрос),

Для рассматриваемой модели должны быть выполнены ограничения:

$$s(k) \leq z(k), \quad z(k) \geq 0, \quad v(k) \geq 0. \quad (19)$$

В частном случае, когда величина потенциального спроса  $P$  велика (потенциальный спрос неограничен) модель (15) – (17) становится линейной:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \quad (20)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 - k_1 - n(c) & 0 & 0 \\ n(c) & 1 - k_2 & 0 \\ cn(c) - k_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -c_0 \end{pmatrix}, \quad x(k) = \begin{pmatrix} z(k) \\ v(k) \\ w(k) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Выходом системы (20) является прибыль  $w(k)$ , поэтому выход системы можно представить в виде

$$w(k) = Fx(k), \quad (21)$$

где  $F = (0 \ 0 \ 1)$ .

Зададим уравнение, определяющее желаемое изменение прибыли, в виде

$$\bar{w}(k) = (1 + r_0)\bar{w}(k), \quad \bar{w}(0) = w_0, \quad (22)$$

где  $r_0$  – желаемый темп роста прибыли.

Управление производством, сбытом и хранением товара по модели (20) выполним на основе минимизации следующего критерия:

$$J(k) = (y(k+1) - \bar{w}(k))^2 C + u(k)^2 D, \quad (23)$$

где  $C$  и  $D$  – положительные весовые коэффициенты.

Отметим, что ограничения вида (19) можно учесть, применяя для оптимизации квадратичного критерия процедуру `quadprog` системы Matlab.

Качество управления по алгоритму (14) сравнивалось со статическим локально-оптимальным законом управления [7] для объекта (20):

$$u(k) = -(B^T F^T CFB + D)^{-1} B^T F^T C(FAx(k) - \bar{w}(k)). \quad (24)$$

Моделирование управления производством, сбытом и хранением товара по модели (20) выполнено для следующих значений параметров:

$$k_1 = 0,01, \quad k_2 = 0,02, \quad k_3 = 0,01, \quad n_0 = 0,6, \quad n_0 = 0,004, \quad c = 5, \quad c_0 = 1, \\ z_0 = 100, \quad v_0 = 150, \quad w_0 = 1, \quad C = 1, \quad D = 0,01, \quad (25)$$

с учетом аддитивных случайных возмущений для модели вида

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + q(k). \quad (26)$$

В (26) процесс  $q(k)$  имеет характеристики, определяющиеся по формуле (2), где  $Q = \text{diag}(2; 2; 0)$ .

На рис. 1 приведен результат моделирования для статического закона управления (24) при не точно известном параметре  $n_0$  (коэффициенте продаж), для случая, когда в реальной модели значение этого коэффициента изменяется по формуле

$$n_0 = 0,6 + 0,1 \sin(0,05k). \quad (27)$$

Как видно из графика для управления вида (24) наблюдается срыв слежения за желаемой прибылью  $\bar{w}(k)$ , здесь также необходимо отметить, что при точно известном значении параметра  $n_0$ , как показали результаты моделирования, алгоритм (24) вполне работоспособен.

Отметим, что непредсказуемое изменение параметров экономического объекта является характерным для рыночной экономики. Это означает, что при управлении реальным экономическим объектом алгоритм (24) может оказаться неработоспособным в случае, когда параметры реального известны не точно.

На рис. 2 приведены результаты моделирования алгоритма динамического локально-оптимального управления (14), когда в реальной модели значение  $n_0$  также изменяется по закону (27). Введение выражения (27) можно интерпретировать как

наличие в моделируемом объекте дополнительных неконтролируемых возмущений в виде следующего вектора:

$$f = \begin{pmatrix} -0,1 \sin(0,05k)z(k) \\ 0,1 \sin(0,05k)z(k) \\ 0,1 \sin(0,05k)z(k) \end{pmatrix}.$$

Из графика на рис. 2 видно, что наблюдается устойчивое слежение за желаемой прибылью  $\bar{w}(k)$ . Следовательно, алгоритм (14) остается работоспособным при не точно известных параметрах модели.

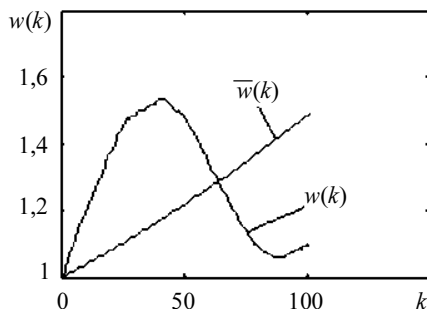


Рис. 1

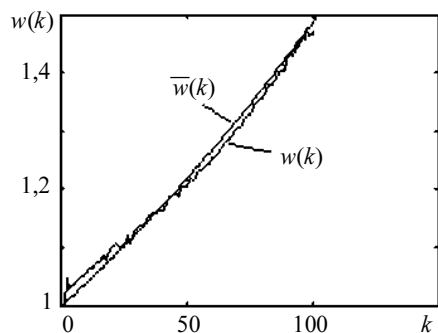


Рис. 2

### Заключение

Предложен алгоритм динамического локально-оптимального управления выходом системы, обеспечивающий инвариантность управления к ненаблюдаемым возмущениям. С использованием пакета Matlab 7.2 выполнено моделирование системы управления производством, сбытом и хранением для одного вида товара. Результаты моделирования показали, что динамическое локально-оптимальное слежение может быть работоспособным и в реальных условиях при не точно известных параметрах экономической модели.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991. 189 с.
2. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975. 616 с.
3. *Симон Г.А.* О применении теории следящих систем для изучения процессов регулирования производства // Процессы регулирования в моделях экономических систем: Сб. статей / ред. В.Я. Фридман, Л.П. Якименко. М.: ИЛ, 1961. 290 с.
4. *Перепелкин Е.А.* Прогнозирующее управление экономической системой производства, хранения и поставок товара потребителям // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 1. С. 125 – 128.
5. *Герасимов Е.С., Домбровский В.В.* Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратической функции риска // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С.119 – 128.
6. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
7. *Смагин В.И., Параев Ю.И.* Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. 171 с.
8. *Горский А.А., Колпакова Н.Г., Локиин Б.Я.* Динамическая модель производства, хранения и сбыта товара повседневного спроса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 144 – 149.
9. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С.103 – 107.
10. *Смагин С.В.* Управление выходом линейной дискретной системы с мультипликативными возмущениями // Вестник ТГУ. № 293. 2006. С. 126 – 128.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 октября 2007 г.