

УДК 517.95

Т.К. Юлдашев

**О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ,
СОДЕРЖАЩЕГО КВАДРАТ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И
НЕЛИНЕЙНОЕ ОТРАЖАЮЩЕЕ ОТКЛОНЕНИЕ**

Рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение. С помощью нелинейного метода ряда Фурье задача сводится к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений. Доказывается сходимость полученного ряда.

Ключевые слова: квадрат гиперболического оператора, нелинейное отражающее отклонение, счетная система нелинейных интегральных уравнений, обобщенные производные, сходимость ряда.

1. Постановка задачи

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u(t, x) = f(t, x, u(t, x), u(\delta(t, x, u(-t, x)), x)) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t \in (-\infty; -T]} = 0, u(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x), u(t, x)|_{t \in [T, \infty)} = 0, \\ u_t(t, x)|_{t=0} = \varphi_2(x), u_{tt}(t, x)|_{t=0} = \varphi_3(x), u_{ttt}(t, x)|_{t=0} = \varphi_4(x); \end{cases} \tag{2}$$

$$u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=l} = u_{xx}(t, x)|_{x=0} = u_{xx}(t, x)|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где

$$f(t, x, u) \in C(D \times R^2), \varphi_i(x) \in C^5(D_l),$$

$$\varphi_i(x)|_{x=0} = \varphi_i(x)|_{x=l} = \varphi_i''(x)|_{x=0} = \varphi_i''(x)|_{x=l} = 0, i = \overline{1, 4},$$

$$D \equiv D_T \times D_l, D_T \equiv [-T, T], D_l \equiv [0, l], 0 < l < \infty, 0 < T < \infty, \delta(t, x) \neq t.$$

Отметим, что в работах [1,2] изучены краевые задачи для однородных и линейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков. В работе [3] обосновано применение метода разделения переменных к смешанным задачам для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

В данной работе используется другая методика применения метода разделения переменных: ищем решение смешанной задачи (1) – (3) в виде ряда Фурье. Обычная методика разделения переменных в случае уравнения (1) не применима, т.е. переменные в этом уравнении не разделяются. А применение ряда Фурье позволяет нам в отличие от других работ (напр.см. [3,4]) отказываться от непрерывности дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме того, такой подход по-

зволяет нам с помощью интегрального тождества свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой легко доказывается методом последовательных приближений.

2. Сведение решение смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

Решение данной задачи (1) – (3) ищем в виде ряда Фурье [5]:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x), \quad (t, x) \in D, \quad (4)$$

где $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \dots$.

В множестве $\{\bar{a}(t) = (a_n(t)) \mid a_n(t) \in C[-T; T], n = 1, 2, \dots\}$ определим операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покомпонентно. Тогда данное множество становится линейным векторным пространством. Берем те элементы этого векторного пространства, которые удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)|^p < \infty$. Это множество обозначим через $B_p(T)$ и снабдим его нормой

$$\|\bar{a}(t)\|_{B_p(T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Для каждого элемента $\bar{a}(t) \in B_p(T)$ определим оператор Q следующим образом:

$$Q\bar{a}(t) = u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x).$$

Обозначим через $E_p(D)$ множество значений оператора Q . Очевидно, что $Q: B_p(T) \rightarrow E_p(D)$. Обозначим через $W_{k,p}(D)$ множество функций $\Phi(t, x)$ таких, что $\Phi(t, x)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(t, x)$ имеют k -е обобщенные производные по t , принадлежащие $L_p(D_l)$, и обращаются в нуль при $t \geq T - \delta$ ($0 < \delta$ – зависит от $\Phi(t, x)$). Для функций из $W_{k,p}(D)$ справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \pm T} \int_0^l \Phi(t, x) dx = \lim_{t \rightarrow \pm T} \int_0^l \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} dx = \lim_{t \rightarrow \pm T} \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi(t, x)}{\partial t^2} dx = \lim_{t \rightarrow \pm T} \int_0^l \frac{\partial^3 \Phi(t, x)}{\partial t^3} dx = 0.$$

при $k = 4$.

Определение. Если функция $u(t, x) \in E_p(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\iint_{0,0}^{l,l} \left\{ u(s, x) \left[\frac{\partial^4}{\partial s^4} \Phi - 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi \right] - f \Phi \right\} dx ds =$$

$$= \int_0^l \varphi_1 \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Phi - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) \right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right]_{t=0} dx + \\ + \int_0^l \varphi_3 \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi \right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_4 [\Phi]_{t=0} dx$$

для любого $\Phi(t, x) \in W_{k,p}(D)$, то функция $u(t, x)$ называется решением смешанной задачи (1) – (3).

Согласно определению, решение задачи (1) – (3) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям дифференциального оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ почти для всех $t \in D_T$, причем единственным образом. Если $u(t, x)$ является решением смешанной задачи (1) – (3), то имеет место разложение (4) почти при всех $t \in D_T$ в смысле $L_q(D)$ и

$$a_n(t) = \int_0^l u(t, x) b_n(x) dx,$$

$$G_n(t, s) = \frac{1}{2\lambda_n^2} (\lambda_n(t-s) \cos \lambda_n(t-s) + \sin \lambda_n(t-s)). \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n=1, 2, \dots$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Функция $f(t, x, u, \vartheta)$ непрерывна.
2. $\|\tilde{\omega}(t)\|_{B_p(T)} < \infty$.

Тогда коэффициенты Фурье $a_n(t)$ решения смешанной задачи (1) – (3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t) = \omega_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) \times \\ \times b_n(x) G_n(t, s) dx ds, \quad t \in D_T, \quad (5)$$

где

$$\omega_n(t) = \frac{2\lambda_n^2 \varphi_{1n} - t(\lambda_n^2 \varphi_{2n} + \varphi_{4n}) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{2\lambda_n^2} \cos \lambda_n t + \\ + \frac{\lambda_n^4 t \varphi_{1n} + 3\lambda_n^2 \varphi_{2n} + \lambda_n^2 t \varphi_{3n} + \varphi_{4n}}{2\lambda_n^3} \sin \lambda_n t,$$

$$G_n(t, s) = \frac{1}{2\lambda_n^2} (\lambda_n(t-s) \cos \lambda_n(t-s) + \sin \lambda_n(t-s)). \quad (5)$$

Доказательство. Согласно определению решения смешанной задачи (1) – (3), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) \cdot b_n(x) \left[\frac{\partial^4}{\partial s^4} \Phi - 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi \right] - f \Phi \right\} dx ds = \\ & = \int_0^l \varphi_1 \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Phi - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) \right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right]_{t=0} dx + \\ & \quad + \int_0^l \varphi_3 \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi \right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_4 [\Phi]_{t=0} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть в (6) $\Phi = \Phi_m(t, x) = g(t)b_m(x) \in W_{k,p}(D)$, где $0 \neq g(t) \in C^3(D_T)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) \cdot b_n(x) \times \right. \\ & \quad \times \left[g^{IV}(s)b_m(x) + 2\lambda_m^2 g''(s)b_m(x) + \lambda_m^4 g(s)b_m(x) \right] - \\ & \quad \left. - f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) g(s)b_m(x) \right\} dx ds = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что система функций $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована, из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[a_n(s) \cdot \left(g^{IV}(s)b_m(x) + 2\lambda_m^2 g''(s)b_m(x) + \lambda_m^4 g(s)b_m(x) \right) - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) g(s)b_n(x) dx \right] ds = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойство обобщенного решения, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(s) \left[a_n^{IV}(s) + 2\lambda_m^2 a_n''(s) + \lambda_m^4 a_n(s) - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) b_n(x) dx \right] ds = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $g(t)$ любая функция, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, то $a_n(t)$ имеет обобщенные производные третьего порядка по t в смысле Соболева на интервале D_T . Поскольку $g(t) \neq 0$ для всех $t \in D_T$, то из (7) получим

$$\begin{aligned} & a_n^{IV}(t) + 2\lambda_m^2 a_n''(t) + \lambda_m^4 a_n(t) = \\ & = \int_0^l f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x, Q\bar{a}(-t)))) b_n(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получим

$$a_n(t) = (C_{1n} + C_{2n}t) \cos \lambda_n t + (C_{3n} + C_{4n}t) \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) b_n(x) G_n(t, s) dx ds, \quad t \in D_T, \quad (9)$$

где $G_n(t, s)$ определяется из (5₁).

Для того чтобы определить коэффициенты $C_{in} (i = \overline{1, 4})$, используем условия:

$$a_n(0) = \varphi_{1n}, \quad a_n'(0) = \varphi_{2n}, \quad a_n''(0) = \varphi_{3n}, \quad a_n'''(0) = \varphi_{4n},$$

$$\text{где } \varphi_{in} = \int_0^l \varphi_i(x) b_n(x) dx, \quad i = \overline{1, 4}, \quad x \in D_l.$$

Тогда из (9) получим счетную систему нелинейных интегральных уравнений (5).

3. Однозначная разрешимость счетной системы нелинейных интегральных уравнений

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

$$1. \left\| \int_0^t f(s, x, Q\bar{a}^0(s), Q\bar{a}^0(\delta(s, x, Q\bar{a}^0(-s)))) ds \right\|_{L_p(D_l)} \leq \Delta < \infty;$$

$$2. f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\{h_1(t, x)|_{u, \vartheta}\}, \quad \text{где } \int_0^t \|h_1(s, x)\|_{L_p(D_l)} ds < \infty;$$

$$3. \delta(t, x, u) \in Lip\{h_2(t, x)|_u\}, \quad \text{где } \int_0^t \|h_2(s, x)\|_{L_p(D_l)} ds < \infty;$$

$$4. \|\bar{\omega}(t)\|_{B_p(T)} < \infty.$$

Тогда счетная система нелинейных интегральных уравнений (5) имеет единственное решение в пространстве $B_p(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = \omega_n(t), \quad t \in D_T, \\ a_n^{k+1}(t) = \omega_n(t) + \\ + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}^k(s), Q\bar{a}^k(\delta(s, x, Q\bar{a}^k(-s)))) \times \\ \times b_n(x) \cdot G_n(t, s) dx ds, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t \in D_T. \end{cases} \quad (10)$$

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (10) получим

$$\begin{aligned} & \|\bar{a}^1(t) - \bar{a}^0(t)\|_{B_p(T)} \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \int_0^t \int_0^l |f_0| \cdot |b_n(x)| \cdot |G_n(t, s)| dx ds \right| \leq M_1 M_2 M_3 l^{\frac{1}{q}} \Delta, \end{aligned} \quad (11')$$

где

$$f_k \equiv f\left(s, x, Q\bar{a}^k(s), Q\bar{a}^k(\delta(s, x, Q\bar{a}^k(-s)))\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M_1 = \max_{(t,s)} |\bar{G}(t, s)|, \quad M_2 = \left\| \frac{1}{\lambda} \right\|_{\ell_p}, \quad M_3 = \max_x \|\bar{b}(x)\|_{B_q(t)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Аналогично получим, что

$$\|\bar{a}^1(-t) - \bar{a}^0(-t)\|_{B_p(T)} \leq M_1 M_2 M_3 l^{\frac{1}{q}} \Delta, \quad (11^2)$$

В силу второго условия теоремы для второй разности $a_n^2(t) - a_n^1(t)$ имеем

$$\|\bar{a}^2(t) - \bar{a}^1(t)\|_{B_p(T)} \leq M_1 M_2 M_3 \int_0^t \int_0^l |f_1 - f_0| dx ds.$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left| f\left(s, x, Q\bar{a}^1(s), Q\bar{a}^1(\delta(s, x, Q\bar{a}^1(-s)))\right) - f\left(s, x, Q\bar{a}^0(s), Q\bar{a}^0(\delta(s, x, Q\bar{a}^0(-s)))\right) \right| \leq \\ & \leq h_1(s, x) \cdot \left[\sum_{v=1}^{\infty} |a_v^1(s) - a_v^0(s)| \cdot |b_v(x)| + \sum_{v=1}^{\infty} \left| a_v^1 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - a_v^0 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) \right| \cdot |b_v(x)| \right] \end{aligned}$$

и в силу третьего условия теоремы

$$\begin{aligned} & \left| a_v^1 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) - a_v^0 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) \right| \leq \\ & \leq \left| a_v^1 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) - a_v^0 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) \right| + \\ & + \left| a_v^0 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) - a_v^0 \left(\delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right) \right) \right| \leq \\ & \leq |a_v^1(s) - a_v^0(s)| + \Delta \cdot \left| \delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) \right) - \delta \left(s, x, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right) \right| \leq \\ & \leq |a_v^1(s) - a_v^0(s)| + \Delta \cdot h_2(s, x) \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right|, \end{aligned}$$

то из последнего неравенства с учетом (11¹) и (11²) получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|\bar{a}^2(t) - \bar{a}^1(t)\|_{B_p(T)} & \leq M_1 M_2 M_3 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s, x) \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \left[2 |a_v^1(s) - a_v^0(s)| + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Delta \cdot h_2(s, x) \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1(-s) \cdot b_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0(-s) \cdot b_i(x) \right| \right] \cdot |b_v(x)| dx ds \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s, x) \left(2 \left\| \bar{a}^1(s) - \bar{a}^0(s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta \cdot h_2(s, x) \cdot \left\| \bar{a}^1(-s) - \bar{a}^0(-s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx ds \right| \leq \\ &\leq \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| h(s, x) \right\|_{L_p(D_t)} ds \right|, \quad (t, x) \in D, \end{aligned} \quad (12^1)$$

где $h(s, x) \equiv h_1(s, x)(2 + \Delta \cdot h_2(s, x))$.

Меняя в (12¹) t на $-t$, s на $-s$, получим

$$\begin{aligned} &\left\| \bar{a}^2(-t) - \bar{a}^1(-t) \right\|_{B_p(T)} \leq M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(-s, x) \left(2 \left\| \bar{a}^1(-s) - \bar{a}^0(-s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta \cdot h_2(-s, x) \cdot \left\| \bar{a}^1(s) - \bar{a}^0(s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx ds \right| \leq \\ &\leq \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \bar{h}(s, x) \right\|_{L_p(D_t)} ds \right|, \quad (t, x) \in D, \end{aligned} \quad (12^2)$$

где $\bar{h}(s, x) \equiv h_1(-s, x)(2 + \Delta \cdot h_2(-s, x))$.

Пусть $\bar{\bar{h}}(s, x) \equiv \frac{1}{2} [h(s, x) + \bar{h}(s, x)]$. Тогда из (12¹) и (12²) получим

$$\left\| \bar{U}^2(t) - \bar{U}^1(t) \right\|_{B_p(T)} \leq \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s, x) \right\|_{L_p(D_t)} ds \right|, \quad (t, x) \in D, \quad (12^3)$$

где $\left\| \bar{U}^k(t) - \bar{U}^{k-1}(t) \right\| \equiv \max \left\{ \left\| \bar{a}^k(t) - \bar{a}^{k-1}(t) \right\|; \left\| \bar{a}^k(-t) - \bar{a}^{k-1}(-t) \right\| \right\}$.

Для последующей разности $a_n^3(t) - a_n^2(t)$ из (10) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} &\left\| \bar{a}^3(t) - \bar{a}^2(t) \right\|_{B_p(T)} \leq M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s, x) \left(2 \left\| \bar{a}^2(s) - \bar{a}^1(s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta \cdot h_2(s, x) \cdot \left\| \bar{a}^2(-s) - \bar{a}^1(-s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx ds \right|. \end{aligned} \quad (13^1)$$

В неравенстве (13¹) t меняем на $-t$ и s на $-s$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \bar{a}^3(-t) - \bar{a}^2(-t) \right\|_{B_p(T)} \leq M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(-s, x) \left(2 \left\| \bar{a}^2(-s) - \bar{a}^1(-s) \right\|_{B_p(t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta \cdot h_2(-s, x) \cdot \left\| \bar{a}^2(s) - \bar{a}^1(s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx ds \right|. \end{aligned} \quad (13^2)$$

С учетом (12³) из (13¹) и (13²) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\bar{U}^3(t) - \bar{U}^2(t)\|_{B_p(T)} &\leq M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{h}(s, x) \|\bar{U}^2(s) - \bar{U}^1(s)\|_{B_p(t)} dx ds \right| \\ &\leq M_1 M_2 M_3^2 l^q \left| \int_0^t \left\{ \int_0^l \bar{h}^p(s, x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \|\bar{U}^2(s) - \bar{U}^1(s)\|_{B_p(t)} ds \right| \\ &\leq \left(M_1 M_2 l^q \right)^3 M_3^5 \Delta \frac{\left[\int_0^t \|\bar{h}(s, x)\|_{L_p(D_t)} ds \right]^2}{2!}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k , аналогичным образом получим

$$\|\bar{U}^{k+1}(t) - \bar{U}^k(t)\|_{B_p(T)} \leq \left(M_1 M_2 l^q \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\int_0^t \|\bar{h}(s, x)\|_{L_p(D_t)} ds \right]^k}{k!}. \quad (14)$$

Далее, в силу (14) имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{U}(t) - \bar{U}^{k+1}(t)\|_{B_p(T)} &\leq M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{h}(s, x) \|\bar{U}(s) - \bar{U}^{k+1}(s)\|_{B_p(t)} dx ds \right| + \\ &+ M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{h}(s, x) \|\bar{U}^{k+1}(s) - \bar{U}^k(s)\|_{B_p(t)} dx ds \right| \leq \\ &\leq \left(M_1 M_2 l^q \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\int_0^t \|\bar{h}(s, x)\|_{L_p(D_t)} ds \right]^k}{k!} + \\ &+ M_1 M_2 M_3^2 l^q \left| \int_0^t \|\bar{h}(s, x)\|_{L_p(D_t)} \|\bar{U}(s) - \bar{U}^{k+1}(s)\|_{B_p(t)} ds \right|. \quad (15) \end{aligned}$$

Применяя к (15) неравенство типа Гронуолла – Беллмана, получим

$$\begin{aligned} \|\bar{U}(t) - \bar{U}^{k+1}(t)\|_{B_p(T)} &\leq \left(M_1 M_2 l^q \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\int_0^t \|\bar{h}(s, x)\|_{L_p(D_t)} ds \right]^k}{k!} \times \\ &\times \exp \left\{ M_1 M_2 M_3^2 l^q \left| \int_0^t \|\bar{h}(s, x)\|_{L_p(D_t)} ds \right| \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\|\bar{a}^{k+1}(t) - \bar{a}^k(t)\|_{B_p(T)} \leq \|\bar{U}^{k+1}(t) - \bar{U}^k(t)\|_{B_p(T)},$$

то из оценки (14) следует, что при $k \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{\bar{a}^k(t)\}_{k=1}^\infty$ сходится равномерно по t к функции $\bar{a}(t) \in B_p(T)$. Отсюда следует существование решения системы (5). Покажем единственность этого решения в пространстве $B_p(T)$. Пусть счетная система нелинейных интегральных уравнений (5) имеет два решения: $\bar{a}(t) \in B_p(T)$ и $\bar{\mathfrak{A}}(t) \in B_p(T)$. Тогда для их разности получим

$$\|\bar{U}(t) - \bar{V}(t)\|_{B_p(T)} \leq M_1 M_2 M_3^2 l^q \left\| \int_0^t \bar{h}(s, x) \right\|_{L_p(D_t)} \|\bar{U}(s) - \bar{V}(s)\|_{B_p(t)} ds, \quad (16)$$

где $\|\bar{U}(t) - \bar{V}(t)\| \equiv \max \{ \|\bar{a}(t) - \bar{\mathfrak{A}}(t)\|; \|\bar{a}(-t) - \bar{\mathfrak{A}}(-t)\| \}$.

Применяя к (16) неравенство типа Гронуолла – Беллмана, имеем, что $\|\bar{a}(t) - \bar{\mathfrak{A}}(t)\|_{B_p(T)} = 0$ для всех $t \in [0; T]$. Отсюда следует единственность решения счетной системы (5) в пространстве $B_p(T)$.

4. Однозначная разрешимость смешанной задачи (1) – (3)

Подставляя счетную систему нелинейных интегральных уравнений (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1) – (3):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^l \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) \cdot b_n(x) G_n(t, s) dx ds \right] \cdot b_n(x). \quad (17)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если $\bar{a}(t) \in B_p(T)$ является решением счетной системы (5), то ряд (17) будет решением смешанной задачи (1) – (3).

Доказательство. Так как $\bar{a}(t) \in B_p(T)$, то из равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^k(t, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n(t) \cdot b_n(x) = u(t, x)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(t, x, u^k(t, x), u^k(\delta(t, x, u^k(-t, x)), x)) &= \\ &= f(t, x, u(t, x), u(\delta(t, x, u(-t, x)), x)) \end{aligned} \quad (18)$$

в смысле метрики $L_p(D)$.

Строим последовательность функций:

$$\begin{aligned}
 P_k = & \int_0^l \int_0^l \left\{ u^k(s, x) \left[\Phi_{ssss} - 2\Phi_{ssxx} + \Phi_{xxxx} \right] - \right. \\
 & \left. - f(s, x, u^k(s, x), u^k(\delta(s, x, u^k(-s, x)), x)) \cdot \Phi(s, x) \right\} dx ds - \\
 & - \int_0^l \varphi_1^k \left[\Phi_{ttt} - 2\Phi_{txx} \right] dx + \\
 & + \int_0^l \varphi_2^k \left[\Phi_{tt} - 2\Phi_{xx} \right] dx - \int_0^l \varphi_3^k \left[\Phi_t \right] dx - \int_0^l \varphi_4^k \left[\Phi \right] dx. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Покажем, что при $k \rightarrow \infty$ (19) есть интегральное тождество (6), т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = 0$. Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (19) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_n(0) = \varphi_{1n}, a_n'(0) = \varphi_{2n}, a_n''(0) = \varphi_{3n}, a_n'''(0) = \varphi_{4n},$$

имеем

$$\begin{aligned}
 P_k = & \int_0^l \left(\varphi_1(x) - \sum_{n=1}^k \varphi_{1n} b_n(x) \right) \left[\Phi_{ttt} - 2\Phi_{txx} \right] dx - \\
 & - \int_0^l \left(\varphi_2(x) - \sum_{n=1}^k \varphi_{2n} b_n(x) \right) \left[\Phi_{tt} - 2\Phi_{xx} \right] dx + \\
 & + \int_0^l \left(\varphi_3(x) - \sum_{n=1}^k \varphi_{3n} b_n(x) \right) \left[\Phi_t \right] dx - \int_0^l \left(\varphi_4(x) - \sum_{n=1}^k \varphi_{4n} b_n(x) \right) \left[\Phi \right] dx + \\
 & + \int_0^l \int_0^l \Phi(s, x) \sum_{n=1}^k \left\{ \int_0^l f(s, y, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, y, Q\bar{a}(-s)))) \cdot b_n(y) dy - \right. \\
 & \left. - f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x, Q\bar{a}(-s)))) \right\} \cdot b_n(x) dx ds. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что первые три интеграла в (20) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, так как $\varphi_i(x) \in L_p(D_l)$. Сходимость разности двух последних интегралов в (20) при $k \rightarrow \infty$ следует из (18). Отсюда следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = 0$. Это и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д., Логинов Б.В., Малюгина И.А. Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 24–36.
2. Бекиев А.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: тез. докл. М.: ФВМиК МГУ им. Ломоносова, 2009. С. 140–141.

3. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: МГУ, 1991. 112 с.
4. Вагабов А.И., Абдурахманов З.А. Аналитический метод решения смешанной задачи для квазилинейной параболической системы // Изв. вузов. Математика. 2006. № 7. С. 3–12.
5. Юлдашев Т.К. Уравнения в частных производных четвертого порядка. Ош: ОшГЮИ, 2010. 136 с.

Статья поступила 19.01.2011 г.

Yuldashev T. K. ON A MIXED VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING A SQUARED HYPERBOLIC OPERATOR AND NON-LINEAR REFLECTING DEVIATION. In this paper we consider the questions of one-valued solvability of the mixed problem for a nonlinear partial differential equation containing a squared hyperbolic operator and nonlinear reflecting deviation. Using the Fourier nonlinear method, we obtain a countable system of nonlinear integral equations. It is proved that the obtained series converges.

Keywords: quadrate of hyperbolic operator, reflecting deviation, countable system of nonlinear integral equations, general derivatives, convergence of series.

YULDASHEV Tursun Kamaldinovich (Siberian State Aerospace University)

E-mail: tursunbay@rambler.ru