ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Математика и механика № 3(4)

УДК 517.982.2

Т.Е. Хмылёва, Л.В. Гензе

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО КЛАССА БЭРА, НАДЕЛЕННЫЕ ТОПОЛОГИЕЙ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ И ИХ *l*-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

В статье даны достаточные условия линейной гомеоморфности пространств всех вещественнозначных функций первого класса Бэра, определенных на ординалах, с топологией поточечной сходимости. Аналогичные достаточные условия даны и для пространств двузначных функций первого класса Бэра.

Ключевые слова: *функции первого класса Бэра*, *линейные гомеоморфизмы*, *ординалы*, *топология поточечной сходимости*.

В данной работе рассматривается вопрос о линейной гомеоморфности пространств функций первого класса Бэра, заданных на отрезках ординалов. Эти пространства наделяются топологией поточечной сходимости. Для нормированных пространств непрерывных функций на счетных отрезках ординалов полная изоморфная классификация была дана в работе С. Бессаги и А. Пелчинского [1], а затем была продолжена в работе З. Семадени [2] и полностью завершена в работах С.П. Гулько и А.В. Оськина [3] и С.В. Кислякова [4]. Затем С.П. Гулько в работе [5] доказал, что аналогичная классификация имеет место и в том случае, когда пространства непрерывных функций снабжены топологией поточечной сходимости. В данной работе приведены достаточные условия линейной гомеоморфности пространств функций первого класса Бэра, заданных на двух произвольных отрезках ординалов.

Соглашения и обозначения. Строчными греческими буквами обозначаются ординалы. Отрезки ординалов $[1, \alpha]$ и их подмножества снабжаются порядковой топологией. Множество $A \subset [1, \alpha)$ называется конфинальным в $[1, \alpha)$, если для каждого $\xi \in [1, \alpha)$ существует такой $\eta \in A$, что $\eta > \xi$. Известно [6, стр. 282], что наименьший порядковый тип множеств A, конфинальных в $[1, \alpha)$, является начальным ординалом. Будем его обозначать $cf(\alpha)$. Как обычно, $C(X, Y)$ – множество всех непрерывных отображений из топологического пространства X в топологическое пространство Y. Функция первого класса Бэра – это функция, являющаяся поточечным пределом последовательности функций из $C(X, Y)$. Символом $B[1, \alpha]$ мы будем обозначать множество всех функций первого класса Бэра, определенных на отрезке ординалов $[1, \alpha]$ со значениями в Y (Y – это либо вещественная прямая $\mathbf{R}$, либо дискретное двоеточие $D = \{0,1\}$). В последнем случае сложение и умножение функций происходит как в поле $\mathbf{Z_2}$. Множество $B[1, \alpha]$ снабжается топологией поточечной сходимости и обозначается $B_p[1, \alpha]$. Если A – подмножество в $[1, \alpha]$, то символом $B_p^0([1,\alpha], A)$ обозначается множество $\{x \in B_p[1,\alpha]; x|_A \equiv 0\}$. Если $A = \{\alpha\}$, то вместо $B_p^0([1,\alpha], \{\alpha\})$ пишем просто $B_p^0[1,\alpha]$. Тот факт, что два топологических векторных пространства L и M линейно гомеоморфны, будем обозначать $L \sim M$. Так же как и в [1], можно доказать, что

$B_p^0[1,\alpha] \sim B_p[1,\alpha]$. Если $\{X_s \mid s \in S\}$ – семейство топологических векторных пространств, то символом $\Sigma\{X_s\,; s \in S\}$ будем обозначать Σ-произведение пространств X_s, т.е. множество $\{x = \{x_s\} \in \Pi\{X_s \mid s \in S\}; |\{s \in S \mid x_s \neq 0\}| \leq \aleph_0\}$. Если $X_s = X$ для всех s, то вместо $\Sigma\{X_s\,; s \in S\}$ будем писать $\Sigma\{X\,; \tau\}$, где τ – мощность множества S.

Теорема 1. Функция x: $[1, \alpha]\to Y$ принадлежит пространству $B_p[1, \alpha]$ тогда и только тогда, когда она непрерывна во всех таких точках $\beta \in [1, \alpha]$, что $cf(\beta) > \omega$.

Доказательство. Пусть $x \in B_p[1, \alpha]$. Тогда существует последовательность функций $x_n \in C([1, \alpha], Y)$, сходящаяся к $x(\gamma)$ в каждой точке. Зафиксируем $\beta \in [1, \alpha]$ со свойством $cf(\beta) > \omega$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существуют такие $\beta_n < \beta$, что $x_n(\gamma) = x_n(\beta)$ при всех $\gamma \in (\beta_n, \beta]$ [7. С. 206] (другими словами, в некоторой окрестности точки β функции x_n становятся постоянными). Пусть $\beta_0 = \sup\{\beta_n\,; n = 1, 2, \ldots\}$. Так как $cf(\beta) > \omega$, то $\beta_0 < \beta$. Окончательно, при $\gamma \in (\beta_0, \beta]$ $x(\gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(\gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(\beta) = x(\beta)$, следовательно, функция x непрерывна в точке β.

Обратно, пусть x – функция, заданная на отрезке $[1, \alpha]$ со значениями в Y, непрерывна во всех точках несчетной конфинальности. Построим последовательность непрерывных функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, поточечно сходящуюся к x. Доказательство проведем по трансфинитной индукции. Ясно, что если α – конечный ординал, то утверждение теоремы верно.

Предположим, что для всех ординалов, меньших α, утверждение доказано.

Случай 1: α – непредельный бесконечный ординал. По индуктивному предположению существует такая последовательность непрерывных функций $\{\tilde{x}_n : [1,\alpha-1] \to Y\}_{n=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n(\gamma) = x(\gamma)$ для всех $\gamma \in [1, \alpha - 1]$. Продолжим функции $\tilde{x}_n$ на отрезок $[1, \alpha]$, полагая

$$x_n(\gamma) = \begin{cases} \tilde{x}_n(\gamma), \ \gamma \in [1, \alpha-1]; \\ x(\alpha), \ \gamma = \alpha. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – требуемая последовательность непрерывных функций.

Случай 2: α – предельный ординал и $cf(\alpha) = \omega$. Тогда существует возрастающая последовательность ординалов $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Рассмотрим следующее разбиение отрезка $[1, \alpha]$:

$$[1, \alpha] = [1, \alpha_1] \cup (\alpha_1, \alpha_2] \cup \ldots \cup (\alpha_{k-1}, \alpha_k] \cup \ldots \cup \{\alpha\}.$$

На отрезке $[1, \alpha_1]$ и на каждом из отрезков $(\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ существует последовательность непрерывных функций $\{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к x. Положим

$$x_n(\gamma) = \begin{cases} x_n^1(\gamma), \ \gamma \in [1, \alpha_1]; \\ x_n^2(\gamma), \ \gamma \in (\alpha_1, \alpha_2]; \\ \vdots \\ x_n^n(\gamma), \ \gamma \in (\alpha_{n-1}, \alpha_n]; \\ x(\alpha), \ \gamma \in (\alpha_n, \alpha]. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что все функции x_n непрерывны на отрезке $[1, \alpha]$ и поточечно сходятся на этом отрезке к функции x.

Случай 3: α – предельный ординал и $cf(\alpha) > \omega$. Тогда существует такой ординал $\gamma_0 < \alpha$, что $x(\gamma) = x(\alpha)$ при всех $\gamma \in (\gamma_0, \alpha]$. По предположению индукции существует последовательность непрерывных функций $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на отрезке $[1, \gamma_0]$, поточечно сходящаяся к x. Продолжим эти функции на отрезок $[1, \alpha]$, полагая

$$x_n(\gamma) = \begin{cases} \tilde{x}_n(\gamma), \gamma \in [1, \gamma_0]; \\ x(\alpha), \gamma \in (\gamma_0, \alpha]. \end{cases}$$

Понятно, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к x. Теорема доказана.

Замечание 1. Эта теорема верна и для функций со значениями в произвольном топологическом пространстве Y с первой аксиомой счетности.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что для любого счетного ординала α функции класса α по классификации Бэра совпадают с функциями первого класса Бэра [8], поэтому вместо обозначения $B_1[1, \gamma]$ мы используем обозначение B $[1, \gamma]$.

Следствие 2. Если $\alpha, \beta \in [\omega, \omega_1)$, то $B_p[1, \alpha] \sim B_p[1, \beta]$.

Доказательство. Так как для каждого $\gamma \in [\omega, \omega_1)$ выполнено $cf(\gamma) \le \omega$, то $B_p[1, \gamma] \sim Y^{\aleph_0}$ (напомним, что Y – это либо вещественная прямая, либо дискретное двоеточие).

Лемма 3. Пусть α и β – произвольные ординалы. Тогда

$$B_p[1, \alpha\cdot\beta] \sim B_p[1, \beta] \times \Sigma\{B_p[1, \alpha]; |\beta|\}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{\alpha\cdot\gamma;\ 1 \le \gamma \le \beta\}$. Нетрудно видеть, что A – замкнутое подмножество отрезка $[1, \alpha\cdot\beta]$, гомеоморфное отрезку $[1, \beta]$. Дополнение множества A распадается на непересекающиеся открытые интервалы $I_\gamma = (\alpha\cdot\gamma, \alpha\cdot(\gamma+1)) = [\alpha\cdot\gamma+1, \alpha\cdot(\gamma+1))$, т.е. $[1, \alpha\cdot\beta] \setminus A = \cup\{I_\gamma;\ 1 \le \gamma < \beta\}$ и каждый интервал I_γ гомеоморфен отрезку $[1, \alpha)$.

Для каждой функции $x \in B_p[1, \alpha\cdot\beta]$ построим функцию

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), t \in A; \\ x(\alpha\cdot(\gamma+1)), t \in I_\gamma. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{x} \in B_p[1, \alpha\cdot\beta]$. Тогда отображение $Tx = (x|_A, x - \tilde{x})$ определяет линейный гомеоморфизм между пространствами $B_p[1, \alpha\cdot\beta]$ и $B_p(A) \times B_p^0([1, \alpha\cdot\beta], A)$. Так как множество A гомеоморфно отрезку $[1, \beta]$, то $B_p(A) \sim B_p[1, \beta]$.

Покажем теперь, что для каждой функции $x \in B_p^0([1, \alpha\cdot\beta], A)$ множество $\Gamma = \{\gamma < \beta; x|_{I_\gamma} \ne 0\}$ не более чем счетно. Действительно, если Γ – несчетное множество, то для некоторого $\varepsilon > 0$ существует несчетное множество $\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \Gamma;\ \sup\{|x(t)|;\ t \in I_\gamma\} > \varepsilon\}$. Для каждого $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$ выберем такую точку $t_\gamma \in I_\gamma$, что $|x(t)| > \varepsilon$. Пусть $T = \{t_\gamma;\ \gamma \in \Gamma_\varepsilon\}$. Положим $\gamma_0 = \min\{\gamma;\ |T \cap [1, \alpha\cdot\gamma]| > \aleph_0\}$. Нетрудно видеть, что ординал γ_0 является предельным и что $cf(\gamma_0) > \omega$. Действительно, если предположить, что $cf(\gamma_0) = \omega$, то существует возрастающая последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma_0$. По определению γ_0 множество $T \cap [1, \alpha\cdot\gamma_0]$ несчетно, а множества T X $[1, \alpha\cdot\gamma_n]$ счетны. Но это противоречит тому, что $T \cap [1, \alpha\cdot\gamma_0] = \cup\{T$ X $[1, \alpha\cdot\gamma_n]; n = 1, 2, \ldots\}$. Итак, $cf(\gamma_0) > \omega$. По теореме 1 функция x непрерывна в точке $\alpha\cdot\gamma_0 \in A$, следовательно, существует ординал $\gamma < \gamma_0$, такой, что $x(t) = 0$ для всех t I $[\alpha\cdot\gamma, \alpha\cdot\gamma_0]$, что противоречит определению γ_0.

Итак доказано, что каждая функция $x \in B_p^0([1, \alpha\cdot\beta], A)$ лишь на счетном числе интервалов I_γ отлична от нулевой функции. Это означает, что отображение $Ux = \{x|_{[\alpha\cdot\gamma+1, \alpha\cdot(\gamma+1)]}\}_{\alpha<\beta}$ является линейным гомеоморфизмом пространства $B_p^0([1, \alpha\cdot\beta], A)$ на Σ-произведение $\Sigma\{B_p^0[\alpha\cdot\gamma+1, \alpha\cdot(\gamma+1)]; \gamma<\beta\}$. Учитывая, что отрезки $[\alpha\cdot\gamma+1, \alpha\cdot(\gamma+1)]$ и $[1, \alpha]$ гомеоморфны, получаем

$$\Sigma\{B_p^0[\alpha\cdot\gamma+1, \alpha\cdot(\gamma+1)]; \gamma<\beta\} \sim \Sigma\{B_p^0[1, \alpha]; |\beta|\} \sim \Sigma\{B_p[1, \alpha]; |\beta|\}. \qquad (1)$$

Таким образом, применяя к пространству $B_p[1, \alpha\cdot\beta]$ линейные гомеоморфизмы T, U и цепочку линейных гомеоморфизмов (1), получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. Пусть ω_σ и ω_τ – начальные ординалы и $\omega \le \omega_\sigma < \omega_\tau$. Тогда для любого $\alpha \in [\omega_\tau\cdot\omega_\sigma, \omega_\tau\cdot\omega_{\sigma+1})$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \omega_\tau\cdot\omega_\sigma]$ линейно гомеоморфны.

Доказательство. Ординал α можно единственным образом представить в виде $\alpha = \omega_\tau\cdot\beta + \rho$, где $\omega_\sigma \le \beta < \omega_{\sigma+1}$, $\rho < \omega_\tau$. Имеем цепочку линейных гомеоморфизмов:

$$B_p[1, \alpha] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot\beta + \rho] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot\beta] \times B_p[1, \rho] \sim B_p[1, \rho + \omega_\tau\cdot\beta] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot\beta].$$

По лемме 3, с учетом равенства $\beta + \omega_\tau = \omega_\tau$ получаем

$$B_p[1, \omega_\tau\cdot\beta] \sim B_p[1, \beta] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\beta|\} \sim B_p[1, \beta] \times B_p[1, \omega_\tau] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\beta|\} \sim$$
$$\sim B_p[1, \beta + \omega_\tau] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\beta|\} \sim B_p[1, \omega_\tau] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\beta|\} \sim \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\beta|\}.$$

С другой стороны, также по лемме 3, с учетом равенства $\omega_\sigma + \omega_\tau = \omega_\tau$ получаем

$$B_p[1, \omega_\tau\cdot\omega_\sigma] \sim B_p[1, \omega_\sigma] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\omega_\sigma|\} \sim B_p[1, \omega_\sigma] \times B_p[1, \omega_\tau] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\omega_\sigma|\} \sim$$
$$\sim B_p[1, \omega_\sigma + \omega_\tau] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\omega_\sigma|\} \sim B_p[1, \omega_\tau] \times \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\omega_\sigma|\} \sim \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; |\omega_\sigma|\}.$$

Так как $|\beta| = |\omega_\sigma|$, то $B_p[1, \alpha] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot\omega_\sigma]$ и теорема доказана.

Теорема 5. Пусть ω_τ – начальный ординал и $n < \omega$. Тогда для любого $\alpha \in [\omega_\tau\cdot n, \omega_\tau\cdot(n+1))$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \omega_\tau\cdot n]$ линейно гомеоморфны.

Доказательство. Ординал α можно единственным образом представить в виде $\alpha = \omega_\tau\cdot n + \rho$, где $\rho < \omega_\tau$. Тогда нужная цепочка линейных гомеоморфизмов выглядит следующим образом:

$$B_p[1, \alpha] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot n + \rho] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot n] \times B_p[1, \rho] \sim B_p[1, \rho + \omega_\tau\cdot n] \sim B_p[1, \omega_\tau\cdot n].$$

Теорема 6. Пусть ω_τ – начальный ординал. Тогда для любого $\alpha \in [\omega_\tau^2, \omega_{\tau+1})$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \omega_\tau^2]$ линейно гомеоморфны.

Доказательство. Произвольный ординал $\alpha \in [\omega_\tau^2, \omega_{\tau+1})$ можно представить в виде $\alpha = \omega_\tau^{\gamma_1}\cdot\eta_1 + \omega_\tau^{\gamma_2}\cdot\eta_2 + \ldots + \omega_\tau^{\gamma_m}\cdot\eta_m)$, где $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_m$, причем $\gamma_1 \ge 2$, $1 \le \eta_i < \omega_\tau$, $i = 1, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что отрезок $[1, \alpha]$ гомеоморфен отрезку $[1, \omega_\tau^{\gamma_1}\cdot\eta_1]$ и, следовательно, мы можем считать, что $\alpha = \omega_\tau^{\gamma}\cdot\eta$, $\gamma \ge 2$, $1 \le \eta < \omega_\tau$.

Покажем сначала, что для любого $\alpha=\omega_\tau^\gamma$, $\gamma\geq 2$, пространства $B_p[1,\omega_\tau^\gamma]$ и $B_p[1,\omega_\tau^2]$ линейно гомеоморфны. Доказательство проведем по трансфинитной индукции.

Для $\gamma = 2$ утверждение очевидно. Пусть теперь $\gamma_0 > 2$ и для всех $\gamma \in [2, \gamma_0)$ верно, что $B_p[1,\omega_\tau^\gamma]\sim B_p[1,\omega_\tau^2]$.

Случай 1 : γ_0 – непредельный ординал, т.е. $\gamma_0 = (\gamma_0 - 1)+1$. Тогда по лемме 3

$$B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]\sim B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0-1}\cdot\omega_\tau]\sim B_p[1,\omega_\tau]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0-1}];|\omega_\tau|\}\sim B_p[1,\omega_\tau]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau^2];|\omega_\tau|\}\sim$$
$$B_p[1,\omega_\tau]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau|\};|\omega_\tau|\}\sim B_p[1,\omega_\tau]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau|\}\sim B_p[1,\omega_\tau^2].$$

Случай 2: $cf(\gamma_0)=\omega$. Тогда существует последовательность ординалов $2<\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_0$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma_0$ и $B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_n}]\sim B_p[1,\omega_\tau^2]$. Применяя лемму 3, получаем, что

$$B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]\sim B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_1}]\times\Pi\{B_p[\omega_\tau^{\gamma_n}+1,\omega_\tau^{\gamma_{n+1}}];n=1,2\ldots\}\sim\Pi\{B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_n}];n=1,2\ldots\}\sim$$
$$\sim(B_p[1,\omega_\tau^2])^{\aleph_0}\sim(\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\,\omega_\tau|\})^{\aleph_0}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\,\omega_\tau|\}\sim B_p[1,\omega_\tau^2].$$

Случай 3 : $cf(\gamma_0) = \omega_\sigma$, где $\omega_1 \leq \omega_\sigma \leq \omega_\tau$. В этом случае существует замкнутое множество $A \subset [1, \gamma_0]$, гомеоморфное отрезку $[1, \omega_\sigma]$, $A = \{\delta_\beta\,;\,\beta\leq\omega_\sigma\}$, причем при $\beta_1 < \beta_2$ выполняется неравенство $\delta_{\beta_1}<\delta_{\beta_2}$ и $\delta_{\omega_\sigma}=\gamma_0$. Рассмотрим множество $\Gamma=\{\omega_\tau^{\delta_\beta};\beta\leq\omega_\sigma\}\subset[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]$. Оно замкнуто и гомеоморфно отрезку $[1, \omega_\sigma]$. Открытое подмножество $[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]\setminus\Gamma$ распадается на объединение открытых интервалов вида $I_0=[1,\omega_\tau^{\delta_1})$ и $I_\beta=(\omega_\tau^{\delta_\beta},\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}})$, $1 \leq \beta < \omega_\sigma$. Для каждой функции $x\in B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]$ построим функцию $\tilde{x}(t)=\begin{cases}x(t),\, t\in\Gamma;\\ x(\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}),\, t\in I_\beta.\end{cases}$ Нетрудно понять, что $\tilde{x}\in B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]$. Тогда отображение $Tx=(x|_\Gamma,x-\tilde{x})$ будет линейным гомеоморфизмом пространства $B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0}]$ на произведение $B_p[1,\omega_\sigma]\times B_p^0([1,\omega_\tau^{\gamma_0}],\Gamma)$. Так же, как в лемме 3, покажем, что для любой функции $x\in B_p^0([1,\omega_\tau^{\gamma_0}],\Gamma)$ множество $\{\beta<\omega_\sigma;x|_{I_\beta}\neq 0\}$ не более чем счетно.

Действительно, если предположить противное, то для некоторого $\varepsilon > 0$ существует несчетное множество $T = \{t_\beta \in I_\beta;\, |x(t_\beta)| > \varepsilon\}$. Положим $\beta_0=\min\{\beta;|\,T\cap[1,\omega_\tau^{\delta_\beta}]\,|>\aleph_0\}$. Ординал β_0 является предельным и $cf(\beta_0) > \omega$. По теореме 1 функция x непрерывна в точке $\omega_\tau^{\delta_{\beta_0}}\in\Gamma$ и, значит, существует ее такая окрестность $(\omega_\tau^{\delta_\beta},\omega_\tau^{\delta_{\beta_0}}]$, что $x(t)=x(\omega_\tau^{\delta_{\beta_0}})=0$ для любого $t\in(\omega_\tau^{\delta_\beta},\omega_\tau^{\delta_{\beta_0}}]$, что противоречит определению числа β_0.

Итак, мы показали, что любая функция $x\in B_p^0([1,\omega_\tau^{\gamma_0}],\Gamma)$ лишь на счетном множестве интервалов I_β отлична от нулевой функции. Следовательно, отображение $Ux = \{x_\beta ; \beta < \omega_\sigma\}$, где x_β – сужение функции x на отрезок $[\omega_\tau^{\delta_\beta}+1, \omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}]$, является линейным гомеоморфизмом пространства $x \in B_p^0([1,\omega_\tau^{\gamma_0}],\Gamma)$ на $\Sigma\{B_p^0[\omega_\tau^{\delta_\beta}+1,\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}];\beta<\omega_\sigma\}$. Так как отрезки $[\omega_\tau^{\delta_\beta}+1,\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}]$ и $[1,\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}]$ гомеоморфны и по предположению индукции $B_p[1,\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}] \sim B_p[1,\omega_\tau^2]$, получаем, что

$$B_p[1,\omega_\tau^{\gamma_0}] \sim B_p[1,\omega_\sigma]\times B_p^0([1,\omega_\tau^{\gamma_0}],\Gamma) \sim B_p[1,\omega_\sigma]\times\Sigma\{B_p^0[\omega_\tau^{\delta_\beta}+1,\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}];\beta<\omega_\sigma\}\sim$$
$$\sim B_p[1,\omega_\sigma]\times\Sigma\{B_p^0[1,\omega_\tau^{\delta_{\beta+1}}];\beta<\omega_\sigma\}\sim B_p[1,\omega_\sigma]\times\Sigma\{B_p^0[1,\omega_\tau^2];|\omega_\sigma|\}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau^2];|\omega_\sigma|\}\sim$$
$$\sim\Sigma\{\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau|\};|\omega_\sigma|\}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau\cdot\omega_\sigma|\}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau|\}\sim B_p[1,\omega_\tau^2].$$

Итак, мы показали, что для любого ординала $\alpha=\omega_\tau^\gamma\in[\omega_\tau^2,\omega_{\tau+1})$ пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\omega_\tau^2]$ линейно гомеоморфны.

Пусть теперь $\alpha=\omega_\tau^\gamma\cdot\eta$, где $\eta<\omega_\tau$. Применяя лемму 3, получаем цепочку линейных гомеоморфизмов:

$$B_p[1,\omega_\tau^\gamma\cdot\eta]\sim B_p[1,\eta]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau^\gamma];|\eta|\}\sim B_p[1,\eta]\times\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau^2];|\eta|\}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau^2];|\eta|\}\sim$$
$$\sim\Sigma\{\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau|\};|\eta|\}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau\cdot\eta|\}\sim\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau];|\omega_\tau|\}\sim B_p[1,\omega_\tau^2].$$

Теорема доказана.

Теорема 7. Каждое из пространств $B_p[1, \omega_1\cdot n]$, $n\in\mathbf{N}$, $B_p[1, \omega_1\cdot\omega]$ и $B_p[1,\omega_1^2]$ линейно гомеоморфно пространству $B_p[1, \omega_1]$.

Доказательство. Пусть β – один из ординалов $n\in\mathbf{N}$, ω или ω_1. В отрезке $[1, \omega_1\cdot\beta]$ рассмотрим замкнутое подмножество $A = \{\omega_1\cdot\gamma;\ 1\le\gamma\le\beta\}$. Как показано в лемме 3,

$$B_p[1,\omega_1\cdot\beta]\sim B_p[1,\beta]\times B_p^0([1,\omega_1\cdot\beta],A) \tag{2}$$

и существует не более чем счетное множество интервалов $I_\gamma = (\omega_1\cdot\gamma,\ \omega_1\cdot(\gamma+1))$, $0\le\gamma<\beta$, на которых функция $x\in B_p^0([1,\omega_1\cdot\beta],A)$ отлична от нулевой функции. Так как по теореме 1 функция x непрерывна в каждой точке вида $\omega_1\cdot(\gamma+1)$ и $x(\omega_1\cdot(\gamma+1)) = 0$, то в каждом интервале I_γ функция x лишь в счетном числе точек может быть отлична от нуля. Таким образом, для любой функции $x\in B_p^0([1,\omega_1\cdot\beta],A)$ множество $T_x = \{t\in[1,\omega_1\cdot\beta];\ x(t)\ne 0\}$ не более чем счетно. Заметим, что $T_x\subset[1,\omega_1\cdot\beta]\setminus A$ и обозначим через φ произвольную биекцию интервала $[1,\omega_1)$ на множество $[1,\omega_1\cdot\beta]\setminus A$. Определим отображение $U: B_p^0([1,\omega_1\cdot\beta],A)\to B_p^0[1,\omega_1]$ по формуле

$$Ux(\alpha)=\begin{cases}x(\phi(\alpha)),\ \alpha\in[1,\omega_1);\\ 0,\ \alpha=\omega_1.\end{cases}$$

Функция Ux будет отлична от нуля лишь в тех точках α, для которых $\varphi(\alpha)\in T_x$, т.е. не более, чем в счетном числе точек. Это означает, что функция Ux непрерывна в точке ω_1 и, следовательно, $Ux\in B_p^0[1,\omega_1]$. Нетрудно видеть, что отображение U является линейным гомеоморфизмом пространств $B_p^0([1,\omega_1\cdot\beta],A)$ и $B_p^0[1,\omega_1]$.

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$B_p[1,\omega_1\cdot\beta]\sim B_p[1,\beta]\times B_p^0[1,\omega_1]\sim B_p[1,\beta]\times B_p[1,\omega_1]\sim B_p[1,\beta+\omega_1]\,. \qquad (3).$$

Если $\beta = n$ или $\beta = \omega$, то очевидно, что $B_p[1, \beta + \omega_1] \sim B_p[1, \omega_1]$. Если же $\beta = \omega_1$, то $B_p[1, \beta + \omega_1] \sim B_p[1, \omega_1\cdot 2]$. Используя (3) для $\beta = 2$, получаем, что $B_p[1, \omega_1\cdot 2] \sim B_p[1, 2 + \omega_1] \sim B_p[1, \omega_1]$. Теорема доказана.

Из теорем 4 – 7 получаем

Следствие 8. Для любого ординала $\alpha \in [\omega_1, \omega_2)$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \omega_1]$, линейно гомеоморфны.

Итак, подводя итог, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 9. Пусть ω_τ, ω_σ – произвольные начальные ординалы, такие, что $1 \le \omega_\sigma \le \omega_\tau$, $\omega_\tau > \omega_1$, и ординалы α, β удовлетворяют условию $\omega_\tau\,\omega_\sigma \le \alpha \le \beta < \omega_\tau\,\omega_{\sigma+1}$. Тогда пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.

Если $\omega_\tau = \omega_1$, то для любых $\alpha, \beta \in [\omega_1, \omega_2)$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.

Если $\omega_\tau = \omega$, то для любых $\alpha, \beta \in [\omega, \omega_1)$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bessaga C.*, *Pelczynski A.* Spaces of continuous functions (IV). On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. V. 19. P. 53 – 62.
2. *Semadeni Z.* Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., Astron. et Phys. 1960. V. 8. P. 81 – 84.
3. *Гулько С.П.*, *Оськин А.В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах // Функц. анализ и прил. 1975. Т. 9. № 1. С. 61 – 62.
4. *Кисляков С.В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. С. 293 – 300.
5. *Гулько С.П.* Свободные топологические группы и пространства непрерывных функций на ординалах // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 34 – 38.
6. *Куратовский К.*, *Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
8. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Статья принята в печать 27.10.2008 г.