УДК 517. 95

Т.К. Юлдашев

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В данной работе предлагается методика изучения разрешимости обратной задачи для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. С помощью нелинейного метода характеристик, основанного на введении дополнительного аргумента, задача сводится к изучению нелинейного интегрального уравнения. Восстанавливаемая функция находится из нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода с помощью нелинейного интегрального преобразования.

Ключевые слова: *обратная задача*, *квазилинейное уравнение*, *дополнительный аргумент*, *нелинейное интегральное преобразование*, *метод сжимающих отображений.*

1. Постановка задачи

В области D рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_1(t,x,y,u(t,x,y))\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(t,x,y,u(t,x,y))\frac{\partial u}{\partial y}=$$

$$=f(t,x,y,u(t,x,y),\sigma(t)) \tag{1}$$

с начальным

$$u(t,x,y)\big|_{t=t_0}=\varphi(x,y) \tag{2}$$

и дополнительным условием

$$u(t,x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\psi(t), \tag{3}$$

где $A_i(t,x,y,u)\in C(D\times R)$, $i=1,2$, $f(t,x,y,u,\sigma)\in C\left(D\times R\times\left[t_0;T\right]\right)$,

$$\varphi(x,y)\in C\left(R^2\right),\quad \psi(t)\in C\left[t_0;T\right],\ x_0,y_0\in R,\ \psi(t_0)=\varphi\left(x_0,y_0\right),$$

$$D\equiv\left[t_0;T\right]\times R^2,\ 0<t_0<T<\infty,\quad R\equiv(-\infty;\infty).$$

Уравнения вида (1) встречаются при решении многих задач механики. Стандартные методы позволяют найти точные (частные) решения квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка при конкретных случаях нелинейных функций, входящих в данное уравнение [1]. Для нахождения общих решений квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с общими нелинейными функциями эффективным является метод, который позволяет поставленную задачу заменить эквивалентным ей нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

В данной работе изучается обратная задача для нелинейного дифференциального уравнения, где восстанавливаемая функция $\sigma(t)$ находится в нелинейной правой части данного уравнения. При решении обратной задачи (1) – (3) относительно восстанавливаемой функции получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое с помощью нелинейного интегрального преобразования сводим к специальному виду нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Отметим, что изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиография публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, приведена в [2, 3].

Определение. Решением обратной задачи называется пара непрерывных функций $\{u(t,x,y)\,,\ \sigma(t)\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2), (3).

2. Сведение задачи Коши (1), (2) к нелинейному интегральному уравнению

Рассмотрим параметрическое задание характеристики как решения системы

$$dt = \frac{dx}{A_1(t,\,x,y,\,u)} = \frac{dy}{A_2(t,\,x,y,\,u)} = d\tau$$

или
$$\frac{dx}{d\tau} = A_1(t,\,x,y,\,u)\,,\quad \frac{dy}{d\tau} = A_2(t,\,x,y,\,u)\,. \tag{4}$$

Изменение переменной τ перемещает точку с координатами t, x, y по характеристике. Интегрируя уравнения в (4) по τ, получаем

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = f(\tau,\,t,\,p(\tau,t,x,y,\vartheta),\,q(\tau,t,x,y,\vartheta),\,\vartheta) \qquad y \equiv q(\tau,t,x,y,\vartheta)\,,$$

где $p(\tau,t,x,y,\vartheta)$ и $q(\tau,t,x,y,\vartheta)$ определяются из следующей системы:

$$\begin{cases} p(\tau,\,t,x,y,\vartheta) = x - \displaystyle\int_\tau^t A_1(\,s,\,p,q,\,\vartheta)\,ds, \\ q(\tau,\,t,x,y,\vartheta) = y - \displaystyle\int_\tau^t A_2(\,s,\,p,q,\,\vartheta)\,ds; \end{cases}$$

$$\vartheta\,(\tau,\,t,x,y) = \vartheta\,(\tau,\,t,\,p(\tau,\,t,x,y,\vartheta),q(\tau,\,t,x,y,\vartheta)\,).$$

Отсюда очевидно, что $\vartheta\,(t,\,t,x,y) = u(t,x,y)$.

Положим

$$f(\,t,x,\,y,\,u,\sigma\,)\Big|_{\substack{x=p(\tau,\,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,\,t,x,y,\vartheta)}} = f(\tau,\,t,\,p,\,q,\,\vartheta,\sigma\,).$$

Тогда имеем

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{du}{d\tau}\Big|_{\substack{x=p(\tau,\,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,\,t,x,y,\vartheta)}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}\right)\Big|_{\substack{x=p(\tau,\,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,\,t,x,y,\vartheta)}} =$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}A_1(t,x,y,u)+\frac{\partial u}{\partial y}A_2(t,x,y,u)\right)\Bigg|_{\substack{x=p(\tau,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,t,x,y,\vartheta)}}=$$

$$=f(\tau,t,p,q,\vartheta,\sigma),$$

т.е. мы получили уравнение

$$\frac{d\vartheta}{d\tau}=f(\tau,t,p(\tau,t,x,y,\vartheta),q(\tau,t,x,y,\vartheta),\vartheta,\sigma) \tag{5}$$

с начальным условием

$$\vartheta(\tau,t,x,y)\big|_{t=\tau=t_0}=\varphi(x,y). \tag{6}$$

Интегрируя (5) по τ и используя начальное условие (6), получаем нелинейное интегральное уравнение

$$\vartheta(\tau,t,x,y)=\varphi\left(p(t_0,t,x,y,\vartheta),q(t_0,t,x,y,\vartheta)\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{\tau}f(\theta,t,p(\theta,t,x,y,\vartheta),q(\theta,t,x,y,\vartheta),\vartheta(\theta,t,x,y),\sigma(\theta))\,d\theta. \tag{7}$$

При $\tau=t$ из (7) получаем следующее уравнение:

$$u(t,x,y)=\Theta(t,x,y;u)\equiv$$

$$\equiv\varphi\left(x-\int_{t_0}^{t}A_1(s,x,y,u(s,x,y))\,ds,\ y-\int_{t_0}^{t}A_2(s,x,y,u(s,x,y))\,ds\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}f(s,x,y,u(s,x,y),\sigma(s))ds. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что нелинейное интегральное уравнение (8) и задача Коши (1), (2) являются эквивалентными. Действительно, функция

$$\varphi\left(p(t_0,t,x,y,u),q(t_0,t,x,y,u)\right) \tag{9}$$

является первым интегралом уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_1(t,x,y,u(t,x,y))\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(t,x,y,u(t,x,y))\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{10}$$

и постоянна вдоль решения уравнения (10). Производные решения уравнения (10) вдоль характеристик равны нулю, и функция (9) удовлетворяет уравнению (10). В самом деле, любая достаточно гладкая функция $\Phi(x,y)$, постоянная вдоль характеристик уравнения (10), удовлетворяет его.

Очевидно, что уравнение (8) удовлетворяет начальному условию (2). Теперь из (8) получаем

$$\frac{du}{dt}=f(t,x,y,u,\sigma).$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Так как $\dfrac{dx}{dt} = A_1(t, x, y, u)$, $\dfrac{dy}{dt} = A_2(t, x, y, u)$,

то из последних двух соотношений следует, что уравнение (8) удовлетворяет уравнению (1).

3. Сведение обратной задачи (1) – (3) к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

Используя условие (3) из (8), получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $\sigma(t)$:

$$\int_{t_0}^{t} h(s, \sigma(s))\, ds = g(t), \tag{11}$$

где $h(s, \sigma(s)) = f\left(s, x_0, y_0, \psi(s), \sigma(s)\right)$,

$$g(t) = \psi(t) - \varphi\left(x_0 - \int_{t_0}^{t} A_1\left(s, x_0, y_0, \psi(s)\right) ds,\ y_0 - \int_{t_0}^{t} A_2\left(s, x_0, y_0, \psi(s)\right) ds\right),$$

$g(t_0) = 0$, так как $\psi(t_0) = \varphi\left(x_0, y_0\right)$.

Уравнение (11) с помощью классических методов невозможно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, к которому мы могли бы применить метод последовательных приближений и метод сжимающих отображений.

Уравнение (11) запишем в виде

$$\sigma(t) + \int_{t_0}^{t} K(s)\,\sigma(s)\, ds = \sigma(t) + \int_{t_0}^{t} [K(s)\,\sigma(s) - h(s, \sigma(s))]\, ds + g(t), \tag{12}$$

$0 < K(t)$ – произвольная функция, такая, что $\int_{t_0}^{t} K(s)ds < 1$.

Применяя к (12) интегральное преобразование из [4, глава 1], получаем

$$\sigma(t) = I(t;\sigma) \equiv \left\{ \sigma(t) + \int_{t_0}^{t} [K(s)\,\sigma(s) - h(s, \sigma(s))]\, ds + g(t) \right\} \times$$

$$\times \exp(-\mu(t)) + \int_{t_0}^{t} K(s) \cdot \exp(-\mu(t, s)) \cdot \{ \sigma(t) - \sigma(s) + g(t) - g(s) +$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} [K(s)\,\sigma(s) - h(s, \sigma(s))]\, ds - \int_{t_0}^{s} [K(\theta)\,\sigma(\theta) - h(\theta, \sigma(\theta))]\, d\theta \right\} ds, \tag{13}$$

где $\mu(t, s) = \int_{s}^{t} K(\theta)\, d\theta$, $\mu(t, t_0) = \mu(t)$.

Уравнения (11) и (13) являются эквивалентными.

4. Разрешимость нелинейного интегрального уравнения (13)

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} \sigma_0(t) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} h(s, 0)\, ds + g(t) \right) \cdot \exp(-\mu(t)), \\ \sigma_{k+1}(t) = I(t; \sigma_k), \quad k = 0,1,2,\dots . \end{cases} \tag{14}$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $h(t, \sigma(t)) \in Bnd(M_0) \cap Lip\left(L_0(t)|_{\sigma}\right)$,

где $$0 < M_0 = \text{const}, \; 0 < L_0(t) \in C[t_0; T];$$

2. $\rho_0 = \max\limits_{t} \{ P(t) \cdot Q(t) \} < 1$,

где $$P(t) = 1 + \mu(t) + \int\limits_{t_0}^{t} L_0(s)\, ds,$$

$$Q(t) = \exp(-\mu(t)) \cdot \left\{ 1 + 2 \int\limits_{t_0}^{t} K(s) \cdot \exp(\mu(s))\, ds \right\}.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода (11) имеет единственное решение на отрезке $[t_0; T]$.

Доказательство. Для произвольной непрерывной на отрезке $[t_0; T]$ функции $a(t)$ примем норму следующим образом: $\| a(t) \| = \max\limits_{t_0 \le t \le T} | a(t) |$.

Пусть

$$\| \sigma_0(t) \| \le \left(M_0 T + \| g(t) \| \right) \cdot \exp(-\mu(t)) < 1. \tag{15}$$

Тогда для разности

$$\sigma_1(t) - \sigma_0(t) =$$

$$= \left\{ \sigma_0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \left[K(s)\sigma_0(s) + h(s,0) - h(s, \sigma_0(s)) \right] ds \right\} \cdot \exp(-\mu(t)) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} K(s) \exp(-\mu(t,s)) \left\{ \sigma_0(t) - \sigma_0(s) + \right.$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left[K(s)\sigma_0(s) + h(s,0) - h(s, \sigma_0(s)) \right] ds -$$

$$\left. - \int\limits_{t_0}^{s} \left[K(\theta)\sigma_0(\theta) + h(\theta,0) - h(\theta, \sigma_0(\theta)) \right] d\theta \right\} ds,$$

в силу первого условия теоремы и (15), получаем оценки

$$\left\| \sigma_1(t) - \sigma_0(t) \right\| \le \left\| \sigma_0(t) \right\| P(t) Q(t) \le \max_t \{ P(t) \cdot Q(t) \} = \rho_0 < 1 , \tag{16}$$

где
$$P(t) = 1 + \mu(t) + \int_{t_0}^{t} L_0(s) ds ,$$

$$Q(t) = \exp(-\mu (t)) \cdot \left\{ 1 + 2 \int_{t_0}^{t} K(s) \cdot \exp(-\mu (s)) ds \right\} .$$

Аналогично для произвольной разности приближения (14) имеем оценку

$$\left\| \sigma_{k+1}(t) - \sigma_k(t) \right\| \le \rho_0 \left\| \sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t) \right\| < \left\| \sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t) \right\| .$$

Отсюда и из (16) следует, что оператор в правой части (13) является сжимающим и, следовательно, уравнение (11) имеет единственное решение на отрезке $\left[t_0 ; T \right]$.

Таким образом, мы определили функцию $\sigma(t)$ в правой части уравнения (1) из нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода (11).

5. Однозначная разрешимость нелинейного интегрального уравнения (8)

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$u_0(t,x,y) = \varphi \left(x - \int_{t_0}^{t} A_1(s, x, y, 0) ds , \ y - \int_{t_0}^{t} A_2(s, x, y, 0) ds \right) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f(s, x, y, 0, \sigma(s)) ds, \tag{17}$$

$$u_{k+1}(t,x,y) = \Theta (t,x,y ; u_k) , \ k = 0,1,2, \ldots . \tag{18}$$

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1) $\varphi(x,y) \in Bnd(M_1) \cap Lip\left(L_{11|x}; L_{12|y}\right)$, $0 < L_{1i} = \text{const}$, $i = 1,2$;

2) $f(t,x,y,u,\sigma) \in Bnd(M_2) \cap Lip\left(L_{20|u}\right)$, $0 < L_{20} = \text{const}$;

3) $A_i(t,x,y,u) \in Lip\left(L_{3i|u}\right)$, $0 < L_{3i} = \text{const}$, $i = 1,2$;

4) $\rho_1 = \left(L_{11} L_{31} + L_{12} L_{32} + L_{20}\right) T < 1$.

Тогда нелинейное интегральное уравнение (8) имеет единственное решение в области D.

Доказательство. В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (17) имеем оценку

$$\left\| u_0(t,x,y) \right\| \le M_1 + M_2 T . \tag{19}$$

С учетом (19), в силу условий теоремы, из (17) и (18) для первой разности приближения имеем оценку

$$\| u_1(t,x,y) - u_0(t,x,y) \| \leq$$

$$\leq L_{11} \int_{t_0}^{t} \| A_1(s, x, y, u_0) - A_1(s, x, y, 0) \| \, ds +$$

$$+ L_{12} \int_{t_0}^{t} \| A_2(s, x, y, u_0) - A_2(s, x, y, 0) \| \, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \| f(s, x, y, u_0, \sigma(s)) - f(s, x, y, 0, \sigma(s)) \| \, ds \leq$$

$$\leq \left(L_{11} L_{31} + L_{12} L_{32} + L_{20} \right) T \, \| u_0(t,x,y) \| \leq$$

$$\leq (M_1 + M_2 T) \, \rho_1 < M_1 + M_2 T. \tag{20}$$

Аналогично, в силу условий теоремы, для произвольной разности приближения (18) по индукции получаем

$$\| u_{k+1}(t,x,y) - u_k(t,x,y) \| \leq$$

$$\leq \rho_1 \, \| u_k(t,x,y) - u_{k-1}(t,x,y) \| < \| u_k(t,x,y) - u_{k-1}(t,x,y) \| . \tag{21}$$

Из оценок (20) и (21) следует, что, согласно принципу Шаудера, оператор в правой части (8) имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (8) имеет единственное решение в области D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев В.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003. 416 с.
2. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 285 с.
3. *Романов В.Г.* Обратные задачи для математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
4. *Юлдашев Т.К.* Нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. Ош: ОшГЮИ, 2010. 107 с.

Статья поступила 25.10.2011 г.

Yuldashev T. K. ON THE INVERSE PROBLEM FOR THE QUASILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER. A method of studying the solvability of the inverse problem for a quasilinear partial differential equation of first order is proposed. Using the nonlinear method of characteristics based on the introduction of an additional argument, the problem is reduced to the study of a nonlinear integral equation. The restored function is found from a nonlinear Volterra integral equation of the first kind by use of a nonlinear integral transformation.

Keywords: inverse problem, quasilinear equation, additional parameter, nonlinear integral transform, method of compression mappings.

YULDASHEV Tursun Kamaldinovich (Siberian State Aerospace University)
E-mail: tursunbay@rambler.ru