УДК 517.97

Н.М. Махмудов, В.И. Салманов

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ЛИОНСА

Работа посвящена изучению задачи оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которой критерием качества является функционал Лионса. При этом исследована корректность задачи оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и доказаны теоремы существования и единственности решения задачи оптимального управления.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнение второго порядка, оптимальное управление, критерий Лионса.*

В этой работе изучена задача оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с критерием качества типа функционала Лионса. Отметим, что задачи оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений, и в том числе случай одномерного эллиптического уравнения, ранее изучены в работах различных авторов [1,2] и др. Однако здесь исследуемая задача с точки зрения целевого функционала и рассматриваемых функциональных пространств отличается от ранее изученных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления о минимизации функционала

$$J_\alpha(u) = \int_0^T \left|x_1(t;u) - x_2(t;u)\right|^2 dt + \alpha \left\|u - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{1}$$

на множестве

$$U \equiv \left\{ u = u(t), u \in L_2(0,T), u(t) \ge b_0 > 0, \overset{\circ}{\forall} t \in [0,T], \|u\|_{L_2(0,T)} \le b_1 \right\}$$

при условиях

$$-\frac{d^2 x_p(t)}{dt^2} + u(t)x_p(t) = f_p(t), \quad t \in [0,T], \; p = 1, 2; \tag{2}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0; \tag{3}$$

$$\frac{dx_1(0)}{dt} = \frac{dx_2(T)}{dt} = 0, \tag{4}$$

где $T > 0, b_0 > 0, b_1 > 0$, $\alpha \ge 0$ – заданные числа, $u_0 \in L_2(0,T)$ – заданный элемент, $f_p = f_p(t)$, $p = 1, 2$ – заданные функции из $L_2(0,T)$.

При каждом заданном $u \in U$ задача об определении функции $x_1 = x_1(t) \equiv x_1(t; u)$ из условий (2), (3) является первой краевой задачей, а функции $x_2 = x_2(t) \equiv x_2(t; u)$ из условий (2), (4) – второй краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которую в дальнейшем будем называть редуцированной задачей (2) – (4). Здесь обозначения $x_p(t; u), p = 1, 2$ показывают явную зависимость по независимой переменной t и неявную зависимость от этой переменной по управлению $u = u(t)$, и поэтому эти переменные отделены друг от друга точкой с запятой.

Под решением редуцированной задачи (2) – (4) будем понимать функции $x_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)$, $x_2 \in W_2^1(0, T)$, удовлетворяющие следующим интегральным тождествам:

$$\int_0^T \left[\frac{dx_p(t)}{dt} \frac{d\eta_p(t)}{dt} + u(t) x_p(t) \eta_p(t) \right] dt = \int_0^T f_p(t) \eta_p(t) dt, \quad p = 1, 2, \tag{5}$$

для любых функций $\eta_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)$, $\eta_2 \in W_2^1(0, T)$.

Редуцированная задача, состоящая из двух краевых задач для одномерного эллиптического уравнения, подробно изучена, например, в работах [3,4] и др. Из результатов этих работ следует, что при каждом $u \in U$ редуцированная задача (2) – (4) имеет единственное решение и для этих решений справедливы оценки

$$\|x_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_1 \|f_1\|_{L_2(0, T)}; \tag{6}$$

$$\|x_2\|_{W_2^1(0, T)} \le c_2 \|f_2\|_{L_2(0, T)}, \tag{7}$$

где $c_1 > 0, c_2 > 0$ – некоторые постоянные.

2. Корректность задачи оптимального управления

Рассмотрим вопрос корректности постановки задачи оптимального управления (1) – (4). Для этого сначала приведем вспомогательную теорему из работы [5]:

Теорема 1 (Goebel M. [5]). Пусть $\tilde{X}$ – равномерно выпуклое пространство, $\tilde{U}$ – замкнутое ограниченное множество из пространства $\tilde{X}$, функционал $I(u)$ на $\tilde{U}$ полунепрерывен снизу и снизу ограничен, $\alpha > 0, \beta \ge 1$ – заданные числа. Тогда существует плотное подмножество G пространства $\tilde{X}$, такое, что для любого $\omega \in G$ функционал

$$J_\alpha(u) = I(u) + \alpha \|u - \omega\|_{\tilde{X}}^\beta$$

достигает своего наименьщего значения на $\tilde{U}$. Если $\beta > 1$, то наименьщее значение функционала $J_\alpha(u)$ на $\tilde{U}$ достигается на единственном элементе.

С помощью этой теоремы докажем следующее утверждение:

Теорема 2. Существует всюду плотное подмножество G пространства $L_2(0, T)$, такое, что для любого $u_0 \in G$ и $\alpha > 0$ задача оптимального управления (1) – (4) имеет единственное решение.

Доказательство. Сначала докажем непрерывность функционала $J_0(u)$ на множестве U. Для этого $\forall u_0 \in G$ придадим приращение $\Delta u \in L_2(0, T)$, такое, что $u + \Delta u \in U$. Пусть $x_p(t) = x_p(t; u)$, $p = 1, 2$ – решение редуцированной задачи (2) – (4) при $u \in U$, $x_{p\Delta}(t) \equiv x_p(t; u + \Delta u)$, $p = 1, 2$, – решение редуцированной задачи (2) – (4) при $u + \Delta u \in U$. Тогда ясно, что функции $\Delta x_p(t) \equiv x_p(t; u + \Delta u) - x_p(t; u)$, $p = 1, 2$, будут решениями следующей краевой задачи:

$$-\frac{d^2 \Delta x_p(t)}{dt^2} + (u(t) + \Delta u(t)) \Delta x_p(t) = -\Delta u(t) x_p(t), \quad p = 1, 2,\ 0 < t < T; \tag{8}$$

$$\Delta x_1(0) = \Delta x_1(T) = 0; \tag{9}$$

$$\frac{d\Delta x_2(0)}{dt} = \frac{d\Delta x_2(T)}{dt} = 0, \tag{10}$$

где $x_p(t) \equiv x_p(t; u)$, $p = 1, 2$, – решение редуцированной задачи (2) – (4) при $u \in U$.

В силу теоремы вложения Соболева [6, с. 74] имеем

$$\|x_1\|_{C[0, T]} \le c_3 \|x_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)}; \tag{11}$$

$$\|x_2\|_{C[0, T]} \le c_4 \|x_2\|_{W_2^1(0, T)}, \tag{12}$$

где $c_3 > 0,\ c_4 > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от x_1 и x_2. Из этих неравенств и (6), (7) получим справедливость следующих оценок:

$$\|x_1\|_{C[0, T]} \le c_5 \|f_1\|_{L_2(0, T)}; \tag{13}$$

$$\|x_2\|_{C[0, T]} \le c_6 \|f_2\|_{L_2(0, T)}, \tag{14}$$

где $c_5 > 0,\ c_6 > 0$ – некоторые постоянные. В силу этих оценок из условия $\Delta u \in L_2(0, T)$ получаем, что функции $\Delta u(t) x_p(t)$, $p = 1, 2$, являются элементами пространства $L_2(0, T)$. Кроме того, из (8) – (10) ясно, что краевая задача (8) – (10) является краевой задачей вида редуцированной задачи (2) – (4). С учетом вышесделанных замечаний и условия $\Delta u\, x_p \in L_2(0, T)$, $p = 1, 2$, можем утверждать справедливость оценок

$$\|\Delta x_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_7 \|\Delta u\, x_1\|_{L_2(0, T)}; \tag{15}$$

$$\|\Delta x_2\|_{W_2^1(0, T)} \le c_8 \|\Delta u\, x_2\|_{L_2(0, T)}, \tag{16}$$

где $c_7 > 0,\ c_8 > 0$ – постоянные, не зависящие от Δu. С учетом оценок (11), (12), из последних неравенств получаем

$$\|\Delta x_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_9 \|\Delta u\|_{L_2(0, T)}; \tag{17}$$

$$\|\Delta x_2\|_{W_2^1(0, T)} \le c_{10} \|\Delta u\|_{L_2(0, T)}, \tag{18}$$

где $c_9 > 0,\ c_{10} > 0$ – постоянные, не зависящие от Δu. Опять в силу теоремы вложения Соболева из оценок (17), (18) можем утверждать справедливость оценок

$$\left\|\Delta x_p\right\|_{C[0,T]} \le c_{11}\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)},\ p=1,2, \tag{19}$$

где $c_{11}>0$ – постоянная, не зависящая от Δu.

Рассмотрим далее приращение функционала $J_0(u)$ на элементе U. По формуле (1) при $\alpha=0$ имеем

$$\Delta J_0(u)=J_0(u+\Delta u)-J_0(u)=2\int_0^T (x_1(t;u)-x_2(t;u))(\Delta x_1(t)-\Delta x_2(t))\,dt+$$

$$+\left\|\Delta x_1\right\|^2_{L_2(0,T)}+\left\|\Delta x_2\right\|^2_{L_2(0,T)}-2\int_0^T \Delta x_1(t)\Delta x_2(t)\,dt. \tag{20}$$

Отсюда в силу оценок (6), (7), (17), (18) и неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\left|\Delta J_0(u)\right| \le c_{12}\left(\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(0,T)}\right),\ \forall u\in U, \tag{21}$$

где $c_{12}>0$ – постоянная, не зависящая от Δu. Из этой оценки следует непрерывность функционала $J_0(u)$ на любом элементе $u\in U$, то есть непрерывность на множестве U. Таким образом,

$$\Delta J_0(u)\to 0 \text{ при } \left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)}\to 0.$$

Кроме того, $J_0(u)\ge 0$, $\forall u\in U$. Наряду с этими множество U – замкнутое ограниченное множество в $L_2(0,T)$. Тогда в силу равномерной выпуклости пространства $L_2(0,T)$ [7] получаем, что удовлетворяются все условия теоремы 1, известной из работы [5]. По утверждению этой теоремы существует всюду плотное подмножество $G\subset L_2(0,T)$, такое, что для $\forall u_0\in G$ и $\forall\alpha>0$ задача оптимального управления (1) – (4) имеет единственное решение. Теорема 2 доказана.

Легко видеть, что эта теорема гарантирует существование и единственность решения задачи (1) – (4) при $\alpha>0$ не для всякого $u_0\in L_2(0,T)$. Ниже мы д окажем теорему существовании решения для всякого $u_0\in L_2(0,T)$ при $\alpha\ge 0$, однако единственности решения задачи оптимального управления (1) – (4) отсутствует.

Теорема 3. Задача оптимального управления (1) – (4) при $\alpha\ge 0$ имеет хотя бы одно решение для любого $u_0\in L_2(0,T)$.

Доказательство. Пусть $\{u_k\}\subset U$ – минимизирующая последовательность в задаче (1) – (4), то есть

$$\lim_{k\to\infty} J_\alpha(u_k)=J_{\alpha*}=\inf_{u\in U} J(u).$$

По структуре множества U ясно, что оно является слабо компактным и слабо замкнутым множеством из $L_2(0,T)$. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, которую ради удобства снова обозначим через $\{u_k\}$ и которая слабо сходится к элементу $u\in U$. Поэтому при $k\to\infty$ имеем

$$\int_0^T u_k(t)q(t)\,dt\to\int_0^T u(t)q(t)\,dt \tag{22}$$

для $\forall q = q(t)$ из $L_2(0, T)$.

Пусть функции $x_{pk}(t) \equiv x_p(t; u_k)$, $p = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$, являются решениями редуцированной задачи (2) – (4) при каждом $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу сделанных выше замечаний относительно решения редуцированной задачи и оценок (6), (7) имеем для $k = 1, 2, \ldots$

$$\|x_{1k}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)} \le c_{12} \|f_1\|_{L_2(0,T)} = c_{13}, \tag{23}$$

$$\|x_{2k}\|_{W_2^1(0,T)} \le c_{14} \|f_2\|_{L_2(0,T)} = c_{15}, \tag{24}$$

где, $c_{12} > 0$, $c_{13} > 0, c_{14} > 0, c_{15} > 0$ – постоянные, не зависящие от k.

Из этих оценок следует равномерная ограниченность последовательностей $\{x_{pk}(t)\}$, $p = 1, 2$, в пространстве $W_2^1(0, T)$. Поэтому из них можем выделить подпоследовательности, которые ради удобства снова обозначим через $\{x_{pk}(t)\}$, $p = 1, 2$, и которые слабо сходятся к функциям $x_p(t)$, $p = 1, 2$, соответственно из $W_2^1(0, T)$. Тогда можем написать следующие предельные соотношения:

$$x_{pk}(t) \to x_p(t),\ p = 1, 2, \text{ в } L_2(0, T) \text{ слабо;} \tag{25}$$

$$\frac{dx_{pk}(t)}{dt} \to \frac{dx_p(t)}{dx},\ p = 1, 2, \text{ в } L_2(0, T) \text{ слабо,} \tag{26}$$

при $k \to \infty$. Ввиду того, что пространство $W_2^1(0, T)$ компактно вложено в $C[0, T]$, получаем, что при $k \to \infty$

$$x_{pk}(t) \to x_p(t),\ p = 1, 2, \text{ сильно в } C[0, T], \tag{27}$$

то есть последовательность сходиться равномерно на отрезке $[0, T]$.

В силу слабой сходимости (26) имеем

$$\int_0^T \frac{dx_{pk}(t)}{dt} \frac{d\eta_p(t)}{dx} dt \to \int_0^T \frac{dx_p(t)}{dt} \frac{d\eta_p(t)}{dx} dt, \tag{28}$$

при $k \to \infty$, $p = 1, 2$.

Теперь докажем, что при $k \to \infty$

$$\int_0^T u_k(t) x_{pk}(t) \eta_p(t) dt \to \int_0^T u(t) x_p(t) \eta_p(t) dt \tag{29}$$

для $\eta_p \in L_2(0, T)$, $p = 1, 2$. Действительно, имеем

$$\int_0^T u_k(t) x_{pk}(t) \eta_p(t) dt = \int_0^T u_k(t)\big(x_{pk}(t) - x_p(t)\big)\eta_p(t) dt + \int_0^T (u_k(t) - u(t)) x_p(t) \eta_p(t) dt +$$

$$+ \int_0^T u(t) x_p(t) \eta_p(t) dt, \quad p = 1, 2,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Сначала оценим первое слагаемое правой части этого равенства. Используя неравенство Коши – Буняковского, получаем неравенства

$$\left|\int_0^T u_k(t)\left(x_{pk}(t)-x_p(t)\right)\eta_p(t)dt\right| \le b_1 \left\|\eta_p\right\|_{L_2(0,T)} \left\|x_{pk}-x_p\right\|_{C[0,T]},$$
$$k=1,2,\ldots,\ p=1,2. \qquad (31)$$

В силу предельного соотношения (27) правая часть (31) стремится к нулю при $k\to\infty$, тогда и левая часть будет стремиться к нулю при $k\to\infty$.

В силу оценок (13), (14) и условия $\eta_p\in L_2(0,T)$, $p=1,2$, имеем $x_p\eta_p\in L_2(0,T)$, $p=1,2$. Поэтому, учитывая это и предельное соотношение вида (22), получаем, что

$$\int_0^T\left(u_k(t)-u(t)\right)x_p(t)\eta_p(t)dt\to 0,\ p=1,2, \qquad (32)$$

при $k\to\infty$. Таким образом, учитывая (32), предельные соотношения (27) и неравенства (31), переходим к пределу в обеих частях равенства (30) при $k\to\infty$. Тогда получаем справедливость предельных соотношений (29).

Ясно, что последовательности $\left\{x_{pk}(t)\right\}$ удовлетворяют следующим интегральным тождествам:

$$\int_0^T\left[\frac{dx_{pk}(t)}{dt}\frac{d\eta_p(t)}{dt}-u_k(t)x_{pk}(t)\eta_p(t)\right]dt=\int_0^T f_p(t)\eta_p(t)dt,\ p=1,2,\ k=1,2,\ldots, \qquad (33)$$

для $\forall\eta_1\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$, $\forall\eta_2\in W_2^1(0,T)$. Учитывая предельные соотношения (28), (29), переходим к пределу в интегральных тождествах (33) при $k\to\infty$. Отсюда получаем справедливость интегральных тождеств (5) для предельных функций $x_p(t)$, $p=1,2$. Кроме того, учитывая слабую сходимость последовательностей $\left\{x_{pk}(t)\right\}$, $p=1,2$, в пространстве $W_2^1(0,T)$, если переходить к нижнему пределу в (23), (24), то при $k\to\infty$ получим справедливость оценок (6), (7) для предельных функций $x_p(t)$, $p=1,2$, так как в силу единственности решения редуцированной задачи все последовательности $\left\{x_{pk}(t)\right\}$, $p=1,2$, будут сходиться к функциям $x_p(t)$, $p=1,2$, слабо в $W_2^1(0,T)$. Легко показать, что $x_1=x_1(t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)$. Действительно, в силу теоремы вложения Соболева элементы последовательности $\left\{x_{1k}(t)\right\}$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)$ принадлежат пространству $C[0,T]$ и справедливо предельное соотношение (27) при $p=1$. Кроме того, из условия $x_{1k}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)$, $k=1,2,\ldots$, следует, что $x_{1k}\in W_2^1(0,T)$ и $x_{1k}(0)=x_{1k}(T)=0, k=1,2,\ldots$. Тогда с учетом предельного соотношения (27) при $p=1$ и при $t=0$, $t=T$ получим $x_1(0)=x_1(T)=0$. Из этих равенств и условия $x_1 \in W_2^1(0,T)$ следует справедливость того, что $x_1 = x_1(t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)$. Поэтому можем утверждать, что $x_p(t) \equiv x_p(t;\, u), p = 1, 2,$ – есть решение редуцированной задачи (2) – (4) при $u \in U$.

Используя слабую полунепрерывность снизу норм в пространстве $L_2(0,\, T)$ и $\alpha \ge 0$ для $\forall u_0 \in L_2(0,\, T)$, получим слабую полунепрерывность $J_\alpha(u)$ на множестве U , то есть

$$J_{\alpha *} \le J_\alpha(u) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} J_\alpha(u_k) = J_{\alpha *}.$$

Отсюда имеем $J_\alpha(u) = J_{\alpha *}$. Здесь $J_{\alpha *}$ – точная нижняя грань функционала $J_\alpha(u)$ на множестве U . Это означает, что $u \in U$ есть решение задачи оптимального управления (1) – (4). Теорема 3 доказана.

Ниже докажем теорему о существовании и единственности решения задачи (1) – (4) для $\forall u_0 \in L_2(0,\, T)$ и $\forall \alpha \ge \alpha_0$, где $\alpha_0 > 0$ – некоторое число, зависящее только от данных задачи.

Теорема 4. Пусть $u_0 \in L_2(0,\, T)$ – заданная функция. Существует некоторое число $\alpha_0 > 0$, зависящее только от данных задачи (1) – (4), такое, что для $\forall \alpha > \alpha_0$ задача оптимального управления (1) – (4) имеет единственное решение.

Доказательство. Для доказательства теоремы сначала покажем сильную выпуклость функционала $J_\alpha(u)$ на множестве $U \subset L_2(0,\, T)$:

$$J_\alpha\left(\beta u^1 + (1-\beta)u^0\right) \le \beta J_\alpha\left(u^1\right) + (1-\beta) J_\alpha\left(u^0\right) - \chi\beta(1-\beta)\left\|u^1 - u^0\right\|^2_{L_2(0,\, T)} \qquad (34)$$

для $\forall \beta \in [0,\, 1]$ с константой сильной выпуклости $\chi > 0$ (см. [8, с. 24]) .

Пусть $u^0,\, u^1 \in U$ – любые допустимые управления и $\beta \in [0,\, 1]$ – любое число. Обозначим $u_\beta = \beta u^1 + (1-\beta)u^0$. В силу выпуклости множества U получаем, что $u_\beta \in U$, $\forall \beta \in [0,\, 1]$. Пусть $x_p{}^0(t) = x_p\left(t;\, u^0\right)$, $p = 1,\, 2$, являются решением редуцированной задачи при $u = u^0 \in U$, а $x_p{}^1(t) = x_p\left(t;\, u^1\right)$, $p = 1,\, 2$, – есть решение редуцированной задачи при $u = u^1 \in U$. Тогда в силу оценок (6), (7) имеем

$$\left\|x_1{}^m\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\, T)} \le c_{16} \left\|f_1\right\|_{L_2(0,\, T)},\ m = 0,\, 1; \qquad (35)$$

$$\left\|x_2{}^m\right\|_{W_2^1(0,\, T)} \le c_{17} \left\|f_2\right\|_{L_2(0,\, T)},\ m = 0,\, 1. \qquad (36)$$

При $u_\beta \in U$ решение редуцированной задачи (2) – (4) обозначим через $x_p{}^\beta(t) \equiv x_p\left(t;\, u_\beta\right)$, $p = 1,\, 2$. Тогда аналогично оценкам (35), (36) имеем

$$\left\|x_1{}^\beta\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\, T)} \le c_{18} \left\|f_1\right\|_{L_2(0,\, T)}; \qquad (37)$$

$$\left\|x_2{}^\beta\right\|_{W_2^1(0,\, T)} \le c_{19} \left\|f_2\right\|_{L_2(0,\, T)}, \qquad (38)$$

для $\forall \beta \in [0,\, 1]$.

Рассмотрим разности $z_p^\beta(t)=x_p^\beta(t)-\beta\left(x_p^1+(1-\beta)x_p^0\right)$, $p=1,2$. Ясно, что эти функции будут решением следующей краевой задачи:

$$-\frac{d^2 z_p^\beta}{dt^2}+u^\beta(t)z_p^\beta=F_p^\beta,\ p=1,2,\ t\in[0,T]; \tag{39}$$

$$z_1^\beta(0)=z_1^\beta(T)=0; \tag{40}$$

$$\frac{dz_2^\beta(0)}{dt}=\frac{dz_2^\beta(T)}{dt}=0, \tag{41}$$

где $F_p^\beta(t)$, $p=1,2$, определяются формулами

$$F_p^\beta(t)=\beta(1-\beta)\left(u^1(t)-u^0(t)\right)\left(x_p^1(t)-x_p^0(t)\right),\ p=1,2,\ \beta\in[0,1],\ t\in(0,T). \tag{42}$$

В силу оценок (35) и (36) для функций $x_p^m(t)$, $p=1,2$, $m=0,1$, получим справедливость оценок

$$\left\|x_1^m\right\|_{C[0,T]}\le c_{20}\|f_1\|_{L_2(0,T)},\ m=0,1; \tag{43}$$

$$\left\|x_2^m\right\|_{C[0,T]}\le c_{21}\|f_2\|_{L_2(0,T)},\ m=0,1. \tag{44}$$

В силу этих оценок и формулы (42) получаем, что функции $F_p^\beta(t)$, $p=1,2$, принадлежат пространству $L_2(0,T)$, то есть справедливо неравенство

$$\left\|F_p^\beta\right\|_{L_2(0,T)}^2\le\beta^2(1-\beta)^2\left\|x_p^1-x_p^0\right\|_{C[0,T]}^2\cdot\left\|u^1-u^0\right\|_{L_2(0,T)}^2\le$$

$$\le 4\beta^2(1-\beta)^2\cdot\left(\left\|x_p^1\right\|_{C[0,T]}^2+\left\|x_p^0\right\|_{C[0,T]}^2\right)\cdot\left(\left\|u^1\right\|_{L_2(0,T)}^2+\left\|u^0\right\|_{L_2(0,T)}^2\right)\le c_{28},\ p=1,2. \tag{45}$$

Тогда аналогично оценкам (6), (7) имеем

$$\left\|z_1^\beta\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,T)}\le c_{22}\left\|F_1^\beta\right\|_{L_2(0,T)},\ \beta\in[0,1]; \tag{46}$$

$$\left\|z_2^\beta\right\|_{W_2^1(0,T)}\le c_{23}\left\|F_2^\beta\right\|_{L_2(0,T)},\ \beta\in[0,1]. \tag{47}$$

Обозначим $w_p(t)=x_p^1(t)-x_p^0(t)$, $p=1,2$. Тогда используя редуцированную задачу (2) – (4), нетрудно получить задачу об определении функций $w_p(t)$, $p=1,2$, из условий

$$-\frac{d^2 w_p}{dt^2}+u^1(t)w_p=\left(u^0(t)-u^1(t)\right)x_p^0(t),\ p=1,2,\ t\in(0,T); \tag{48}$$

$$w_1(0)=w_1(T)=0; \tag{49}$$

$$\frac{dw_2(0)}{dt}=\frac{dw_2(T)}{dt}=0. \tag{50}$$

Ввиду оценок (43), (44) функции $\left(u^0(t)-u^1(t)\right)x_p^0(t)$, $p=1,2$, принадлежат пространству $L_2(0, T)$. Поэтому для решения задачи (48) – (50) получим оценки

$$\|w_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_{24} \left\|\left(u^0 - u^1\right) x_1^{\,0}\right\|_{L_2(0, T)}; \tag{51}$$

$$\|w_2\|_{W_2^1(0, T)} \le c_{25} \left\|\left(u^0 - u^1\right) x_2^{\,0}\right\|_{L_2(0, T)}. \tag{52}$$

Используя в этих оценках формулы (43) и (44), получим

$$\|w_1\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_{26} \left\|x_1^{\,0}\right\|_{C[0, T]} \left\|u^0 - u^1\right\|_{L_2(0, T)} \le c_{27} \|f_1\|_{L_2(0, T)} \left\|u^0 - u^1\right\|_{L_2(0, T)}; \tag{53}$$

$$\|w_2\|_{W_2^1(0, T)} \le c_{28} \left\|x_2^{\,0}\right\|_{C[0, T]} \left\|u^0 - u^1\right\|_{L_2(0, T)} \le c_{29} \|f_2\|_{L_2(0, T)} \left\|u^0 - u^1\right\|_{L_2(0, T)}. \tag{54}$$

Если обозначим $c_{30} = c_{27} \|f_1\|_{L_2(0, T)}$, $c_{31} = c_{29} \|f_2\|_{L_2(0, T)}$, то с учетом формулы для функций $w_p(t)$, $p = 1, 2$, имеем

$$\left\|x_1^{\,1} - x_1^{\,0}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_{30} \left\|u^1 - u^0\right\|_{L_2(0, T)}; \tag{55}$$

$$\left\|x_2^{\,1} - x_2^{\,0}\right\|_{W_2^1(0, T)} \le c_{31} \left\|u^1 - u^0\right\|_{L_2(0, T)}. \tag{56}$$

В силу формулы (42) получим

$$\left\|F_p^{\,\beta}(t)\right\|_{L_2(0, T)} \le \beta(1-\beta) \left\|x_p^{\,1} - x_p^{\,0}\right\|_{C[0, T]} \cdot \left\|u^1 - u^0\right\|_{L_2(0, T)}, \ p = 1, 2. \tag{57}$$

С помошью аналога неравенств (11), (12) из (55), (56) получим оценки

$$\left\|x_1^{\,1} - x_1^{\,0}\right\|_{C^0[0, T]} \le c_{32} \left\|u^1 - u^0\right\|_{L_2(0, T)}; \tag{58}$$

$$\left\|x_2^{\,1} - x_2^{\,0}\right\|_{C^0[0, T]} \le c_{33} \left\|u^1 - u^0\right\|_{L_2(0, T)}. \tag{59}$$

Из этих неравенств и неравенств (57) , а также из (46) , (47) имеем

$$\left\|z_1^{\,\beta}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, T)} \le c_{34} \beta(1-\beta) \cdot \left\|u^1 - u^0\right\|^2_{L_2(0, T)}; \tag{60}$$

$$\left\|z_2^{\,\beta}\right\|_{W_2^1(0, T)} \le c_{35} \beta(T-\beta) \cdot \left\|u^1 - u^0\right\|^2_{L_2(0, T)}. \tag{61}$$

В силу сильной выпуклости функционала $\|u - u_0\|^2_{L_2(0, T)}$ получим

$$\left\|u^\beta - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} = \beta\left\|u^1 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + (1-\beta)\cdot\left\|u^0 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} - \beta(1-\beta)\cdot\left\|u^1 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{62}$$

для $\forall u^1, u^0 \in U$, $\beta \in [0, 1]$.

Аналогично для нормы $\|x_1 - x_2\|^2_{L_2(0, T)}$ имеем

$$\left\|\beta\left(x_1^{\,1} - x_2^{\,1}\right) + (1-\beta)\left(x_1^{\,0} - x_2^{\,0}\right)\right\|^2_{L_2(0,T)} \le \left\|\beta\left(x_1^{\,1} - x_2^{\,1}\right)\right\|^2_{L_2(0,T)} + \left\|(1-\beta)\left(x_1^{\,0} - x_2^{\,0}\right)\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{63}$$

для $\forall \beta \in [0, 1]$.

Теперь оценим $\left\|x_1^{\,\beta} - x_2^{\,\beta}\right\|^2_{L_2(0, T)}$. Ясно, что можно написать равенство

$$\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|^2_{L_2(0,\,T)} - \left\|\beta\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|^2_{L_2(0,\,T)} =$$

$$= \left(\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)} - \left\|\beta\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|_{L_2(0,\,T)}\right) \times$$

$$\times \left(\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|\beta\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|_{L_2(0,\,T)}\right).$$

Используя это равенство, можем получить неравенства

$$\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|^2_{L_2(0,\,T)} \le \left\|\beta\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|^2_{L_2(0,\,T)} +$$

$$+ \left[\left\|x_1^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|x_2^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|x_1^1\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|x_2^1\right\|_{L_2(0,\,T)} + \right.$$

$$\left. + \left\|x_1^0\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|x_2^0\right\|_{L_2(0,\,T)}\right] \cdot \left(\left\|z_1^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|z_2^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)}\right) \tag{64}$$

для $\forall \beta \in [0,\,1]$, $\forall u^0,\, u^1 \in U$. Отсюда в силу оценок (35) – (38) получим неравенство

$$\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|^2_{L_2(0,\,T)} \le \left\|\beta\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|^2_{L_2(0,\,T)} +$$

$$+ \left(3c_1 \|f_1\|_{L_2(0,\,T)} + 3c_2 \|f_2\|_{L_2(0,\,T)}\right) \cdot \left(\left\|z_1^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)} + \left\|z_2^\beta\right\|_{L_2(0,\,T)}\right).$$

Используя в этом неравенстве неравенство (60), (61), получаем

$$\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|^2_{L_2(0,\,T)} \le \left\|\beta\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|^2_{L_2(0,\,T)} +$$

$$+ \tilde{c}\beta(1-\beta)\|u_1 - u_0\|^2_{L_2(0,\,T)},\ \forall \beta \in [0,\,1], \tag{65}$$

$\forall u^1,\, u^0 \in U$, где

$$\tilde{c} = \left(3c_1 \|f_1\|_{L_2(0,\,T)} + 3c_2 \|f_2\|_{L_2(0,\,T)}\right) \cdot (c_{33} + c_{34}). \tag{66}$$

С помощью (63) из (66) получим

$$\left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|^2_{L_2(0,\,T)} \le \beta\left\|\left(x_1^1 - x_2^1\right) + (1-\beta)\left(x_1^0 - x_2^0\right)\right\|^2_{L_2(0,\,T)} +$$

$$+ \tilde{c}\beta(1-\beta)\|u_1 - u_0\|^2_{L_2(0,\,T)},\ \forall \beta \in [0,\,1],\ \forall u^1,\, u^0 \in U. \tag{67}$$

Теперь умножим обе части (62) на $\alpha > 0$ и полученное равенство суммируем с неравенством (67). Тогда имеем

$$J_\alpha\left(u^\beta\right) = \left\|x_1^\beta - x_2^\beta\right\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\left\|u^\beta - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} \le \beta\left(\left\|x_1^1 - x_2^1\right\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\left\|u^1 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)}\right) +$$

$$+ (1-\beta)\left(\left\|x_1^0 - x_2^0\right\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\left\|u^0 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)}\right) - \beta(1-\beta)(\alpha - \tilde{c})\left\|u^1 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$= \beta J_\alpha\left(u^1\right) + (1-\beta) J_\alpha\left(u^0\right) - \chi\beta(1-\beta)\left\|u^1 - u_0\right\|^2_{L_2(0,T)},\ \forall u^1, u^0 \in U,\ \forall \beta \in [0,1]. \tag{68}$$

Если $\chi = \alpha - \tilde{c} = \alpha - \alpha_0 > 0$, то функционал $J_\alpha(u)$ будет сильно выпуклым функционалом с константой сильной выпуклости $\chi = \alpha - \alpha_0$, где $\alpha_0 = \tilde{c}$. По доказанной теореме 3 задача оптимального управления (1) – (4) имеет хотя бы одно решение при $\alpha > 0$ для $\forall u_0 \in L_2(0, T)$. По нашему условию $\alpha > \alpha_0 > 0$. Поэтому и в данном случае задача оптимального управления (1) – (4) имеет хотя бы одно решение, то есть множество

$$U_* = \left\{ u^* \in U : J_\alpha\left(u^*\right) = J_{\alpha*} = \inf_{u \in U} J(u) \right\}$$

непусто.

Кроме того, по доказанному функционал $J_\alpha(u)$ является сильно выпуклым функционалом на множестве U при условии $\alpha > \alpha_0 > 0$, более того, строго выпуклым функционалом. А для строго выпуклых функционалов множество U_* состоит из единственной точки. Таким образом, нами доказано, что существует такое число $\alpha_0 > 0$, что при $\alpha > \alpha_0 = \tilde{c} > 0$ задача оптимального управления (1) – (4) для $\forall u_0 \in L_2(0, T)$ имеет единственное решение. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
2. *Литвинов В.Г.* Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 6. С. 1036–1047.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
5. *Goebel M.* On existence of optimal control // Math. Nachr. 1979. V. 93. P. 67–73.
6. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
7. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
8. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 20.03.2010 г.

Mahmudov N.M., Salmanov V.I. RESOLVABILITY OF THE OPTIMUM CONTROL PROBLEM FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH THE LIONS CRITERION OF QUALITY. The work is devoted to the study of a problem of optimum control for ordinary differential equations of the second order with the Lions functional as a criterion of quality. The correctness of the problem of optimum control for ordinary differential equations of the second order is investigated and the theorems of existence and uniqueness for the solution of the problem of optimum control are proved.

Keywords: differential equation of the second order, optimum control, Lions criterion.

MAHMUDOV Nurali Merhali ogly (The Nakhichevan State University)
E-mail: nuralimaxmudov@rambler.ru

SALMANOV Vugar Ibragim ogly (The Nakhichevan State University)