ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2007 Математика и механика № 1

УДК 517.982

Т.Е. Хмылёва, И.П. Бухтина

О НЕКОТОРОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ БАЗИСОМ

В данной работе рассматривается последовательность элементов $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H, для которой углы между любыми двумя элементами g_n и g_m одинаковы. Доказывается, что данная последовательность не может являться базисом в H и даже не является базисной последовательностью в H.

Хорошо известно понятие наклона $\delta(H_1, H_2)$ двух подпространств H_1, H_2 гильбертова пространства H, введенное М.М. Гринблюмом в [1]:

$$\delta(H_1, H_2) = \inf_{h_1 \in S(H_1), h_2 \in H_2} \|h_1 + h_2\|,$$

где $S(H_1) = \{h \in H_1 : \|h\| = 1\}$ – единичная сфера.

Также известен следующий критерий, сформулированный Гринблюмом в [2]:

Теорема. Для того чтобы последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ была базисной, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta > 0$, такое, что при всех $n \in \mathbf{N}$

$$\delta(L_n, L^n) \geq \delta > 0,$$

где $L_n = L(\{h_k\}_{k=1}^{n})$, $L^n = L(\{h_k\}_{k=n+1}^{\infty})$, $L(M)$ – замкнутая линейная оболочка множества $M \subset N$.

В данной работе строится последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H, которая не является базисной в пространстве H и, следовательно, не удовлетворяет данному критерию.

Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству всех суммируемых в квадрате последовательностей l_2, то мы рассмотрим такую последовательность в гильбертовом пространстве l_2. Норма и скалярное произведение в данном пространстве задаются следующими формулами:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2} \text{ для любого } x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots) \in l_2;$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)} \text{ для любых } x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots) \in l_2,$$

$y = (y(1), y(2), \ldots, y(n), \ldots) \in l_2$ (черта обозначает комплексное сопряжение).

Через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначается стандартный базис в l_2, т.е. $e_n(k) = \delta_{nk}$.

Углом α между двумя элементами $x, y \in l_2$ назовем такое число α, для которого

$$\cos\alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Построим последовательность линейно-независимых элементов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства l_2, удовлетворяющую условиям:

1) $f_1 = e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$;

2) $\|f_n\| = 1$ для любого $n \in \mathbf{N}$;

3) $(f_n, f_m) = a$, $0 < |a| < 1$, $n \neq m$, $n, m \in \mathbf{N}$.

Из условий $(f_1, f_2) = 1$ и $\|f_2\| = 1$ получим $f_2 = \left(a, \sqrt{1-a^2}, 0, 0, \ldots\right)$. Элемент f_3 находим из условий $(f_1, f_3) = a$, $(f_2, f_3) = a$ и $\|f_3\| = 1$. Получим

$$f_3 = \left(a, \frac{a\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}, \sqrt{\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}}, 0, 0, \ldots\right).$$

Заметим, что $f_2(1) = f_3(1)$ в силу условия $(f_1, f_2) = (f_1, f_3) = a$.

Введем следующие обозначения:

$$f_1(1) = x_1,$$
$$f_2(1) = y_1, f_2(2) = x_2,$$
$$f_3(1) = y_1, f_3(2) = y_2, f_3(3) = x_3.$$

Предположим, что построены элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (x_1, 0, \ldots),\\
f_2 &= (y_1, x_2, 0, \ldots),\\
f_3 &= (y_1, y_2, x_3, 0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-1} &= (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, 0, \ldots),\\
f_n &= (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}, x_n, 0, \ldots),
\end{aligned}$$

удовлетворяющие условиям 1) – 3).

Покажем, что существуют числа y_n и x_{n+1}, такие, что система элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, 0, \ldots)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Для этого рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} (f_n, f_{n+1}) = a, \\ \|f_n\| = 1, \\ \|f_{n+1}\| = 1, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 + y_n x_n = a, \\ y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 + x_n^2 = 1, \\ y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 + y_n^2 + x_{n+1}^2 = 1. \end{cases}$$

Вычитая первое равенство из второго и третьего, получим

$$\begin{cases} x_n^2 - y_n x_n = 1 - a, \\ y_n^2 + x_{n+1}^2 - y_n x_n = 1 - a. \end{cases}$$

Отсюда с помощью несложных преобразований находим

$$\begin{gathered} y_n^2 = x_n^2 - x_{n+1}^2, \\ x_{n+1} = \sqrt{2(1-a) - \frac{(1-a)^2}{x_n^2}}, \\ y_n = x_n - \frac{1-a}{x_n}. \end{gathered} \tag{1}$$

В частности, если $a=\dfrac{\pi}{3}$, то $x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{4x_n-1}}{2x_n}, y_n=x_n-\dfrac{1}{2x_n}$.

Найдем явное выражение для x_n и y_n. Поскольку элемент $e_n \in \mathrm{sp}\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, то найдутся скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = e_n. \tag{2}$$

Умножим обе части равенства (2) скалярно на $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Получим систему уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_1 a+a(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=0, \\ \alpha_2-\alpha_2 a+a(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_{n-1} a+a(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=0, \\ \alpha_n-\alpha_{n-1} a+a(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=x_n. \end{cases} \tag{3}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $\alpha_1=\alpha_2$. Аналогично получим, что $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n-1}$. Таким образом, исходная система примет вид

$$\begin{cases} \alpha_1+a((n-2)\alpha_1+\alpha_n)=0, \\ a(n-1)\alpha_1+\alpha_n=x_n. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_1=-\frac{x_n a}{1+(n-2)a-(n-1)a^2}, \quad \alpha_n=x_n\left(1+\frac{(n-1)a^2}{1+(n-2)a-(n-1)a^2}\right).$$

С другой стороны, сравнивая покоординатно правую и левую части в уравнении (2) и учитывая, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}$, имеем

$$\begin{cases} \alpha_1+y_1((n-2)\alpha_1+\alpha_n)=0, \\ \alpha_1 x_2+y_2((n-3)\alpha_1+\alpha_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n x_n=1. \end{cases} \tag{4}$$

Выражая α_n из последнего уравнения системы (4) и приравнивая полученное соотношение к найденному из системы (3) значению α_n, получаем уравнение для нахождения x_n, из которого находим

$$x_n=\sqrt{\frac{(1-a)(1+(n-1)a)}{1+(n-2)a}}. \tag{5}$$

Используя (1), получаем

$$y_n=\frac{a\sqrt{1-a}}{\sqrt{(1+(n-2)a)(1+(n-1)a)}}. \tag{6}$$

Таким образом, нашли явное выражение для x_n и y_n.

Докажем теперь, что построенная последовательность элементов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства l_2 не является базисом в l_2. Действительно, если предположить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом, то для элемента $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2$ найдутся скаляры $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$, такие, что

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f_i . \tag{7}$$

Сравнивая покоординатно правую и левую части равенства (7), имеем

$$\begin{cases} y_k = \beta_k x_k + y_k(\beta_{k+1} + \beta_{k+2} + \ldots), \\ y_{k+1} = \beta_{k+1} x_{k+1} + y_{k+1}(\beta_{k+2} + \beta_{k+3} + \ldots). \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) несложно получить, что $\beta_k \dfrac{x_k}{y_k} + \beta_{k+1} = \beta_{k+1} \dfrac{x_{k+1}}{y_{k+1}}$. Подставляя в последнее равенство отношения $\dfrac{x_k}{y_k}$ и $\dfrac{x_{k+1}}{y_{k+1}}$, полученные из формул (5) и (6), находим, что $\beta_k = \beta_{k+1}$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Это противоречит сходимости ряда (7). Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Последовательность линейно независимых элементов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства l_2, удовлетворяющая условиям 1) – 3), не является базисом в пространстве l_2.

Рассмотрим общий случай.

Теорема 2. Пусть H – гильбертово пространство, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H, удовлетворяющая условиям:

a) $\|g_n\| = 1$ для любого $n \in \mathbf{N}$,

b) $(g_n, g_m) = a$, $0 < |a| < 1$, $n \neq m$, $n, m \in \mathbf{N}$.

Тогда последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H.

Доказательство. Обозначим $L = \overline{\mathrm{sp}\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}}$. Заметим, что L – сепарабельное гильбертово пространство. Построим отображение $T: L \to l_2$ по следующему правилу:

если $h \in \mathrm{sp}\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$, то положим

$$T(h) = T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n .$$

Покажем, что верно равенство

$$\|T(h)\| = \|h\|. \tag{9}$$

Действительно,

$$\|T(h)\| = \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} (f_i, f_j)} = \sqrt{a \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j}},$$

$$\|h\| = \|\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} (g_i, g_j)} = \sqrt{a \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j}}.$$

Следовательно, равенство (9) верно.

Если $h \in \overline{\mathrm{sp}\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}}$, то $h = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$, где $h_n \in \mathrm{sp}\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$. В силу условия (9), последовательность $\{T(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в гильбертовом пространстве l_2 и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} T(h_n)$. Полагаем $T(h) = \lim\limits_{n\to\infty} T(h_n)$.

Заметим, что построенный таким образом оператор T является линейной изометрией пространства L на пространство l_2. Предполагая, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисной в пространстве H, получим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве l_2, что противоречит теореме 1. Следовательно, последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринблюм М.М.* О представлении пространства типа B в виде прямой суммы пространств // ДАН. 1950. Т. 70. Вып. 5. С. 749 – 752.
2. *Гринблюм М.М.* Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (B) // ДАН. 1941. Т. 31. Вып. 5. С. 428 – 432.

Принята в печать 06.12.07.