МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АНГАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР

МАТЕРИАЛЫ ТРИНАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

7–9 сентября 2020 г.

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2020

времени [3]): события потока, наступающие в течение обозначенного периода, не вызывают его продления и теряются для наблюдения. С тем чтобы выявить потери, возникающие из-за мертвого времени, необходимо оценить его длительность, например, методом максимального правдоподобия [4].

Рассматривается функционирующий в стационарном режиме поток, сопровождающий процесс $\lambda(t)$ которого есть принципиально ненаблюдаемый кусочно-постоянный случайный процесс с двумя состояниями S_1 и S_2; S_i понимается как i-ое состояние $\lambda(t)$ и имеет место при $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$, $\lambda_1>\lambda_2\geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в i-ом состоянии определяется случайной величиной $\eta_i=\min(\xi_i^{(1)},\xi_i^{(2)})$, где случайные величины $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ независимы и распределены по законам $F_i^{(1)}(t)=1-e^{-\lambda_i t}$ и $F_i^{(2)}(t)=1-e^{-\alpha_i t}$, $i=1,2$, соответственно. В момент наступления события потока $\lambda(t)$ либо переходит из i-го состояния в j-ое, $i\neq j$, либо остается в i-ом состоянии, $i=j$, с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i)$ или $P_1^{(2)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i)$, $i,j=1,2$, в зависимости от того, какая из величин $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)}$ приняла минимальное значение, $i=1,2$; $P_1^{(l)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i)+P_1^{(l)}(\lambda_i\,|\,\lambda_i)=1$, $l=1,2$, $i,j=1,2$, $i\neq j$. Процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским, а матрицы инфинитезимальных характеристик имеют вид [1, 2].

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k, $k=1,2,\ldots$, события наступает непродлевающееся мертвое время фиксированной длительности T, в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению; по его окончании первое наступившее событие вновь порождает период ненаблюдаемости длительности T и т.д.

В силу изложенных предпосылок последовательность доступных наблюдению и заключающих в себе всю доступную информацию о потоке моментов $t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Рассматривается случай рекуррентного потока. Для определения оценки $\hat{T}$ длительности мертвого времени T строится функция правдоподобия в предположении, что остальные параметры потока, а именно λ_i, α_i, $P_1^{(l)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i)$, $l=1,2$, $i,j=1,2$, фиксированы и известны точно, т.е. $L(\lambda_i,\alpha_i,P_1^{(l)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i),T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)},\ldots)=L(T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)},\ldots)$, где $\tau^{(k)}$ – упорядоченные по возрастанию значения $\tau_k=t_{k+1}-t_k$, $\tau_k\geq 0$, длительностей интервалов между t_k и t_{k+1}, $k=1,2,\ldots$. Согласно методу максимального правдоподобия [4] значение T, $0\leq T\leq\tau_{\min}$, при котором

$$L(T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)},\ldots)=\prod_{k=1}^{n}p_T(\tau^{(k)})=\prod_{k=1}^{n}\left(\beta_1\varphi^{-1}(z_2-(\beta_2-\varphi_1)e^{-\varphi T})\,e^{-z_1(\tau^{(k)}-T)}+\beta_2\varphi^{-1}(z_1-(\beta_1-\varphi_2)e^{-\varphi T})\,e^{-z_2(\tau^{(k)}-T)}\right),$$

где $z_i=\lambda_i+\alpha_i$, $\varphi_i=\lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i)+\alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j\,|\,\lambda_i)$, $\varphi=\sum\varphi_i$, $\beta_i=\lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_i\,|\,\lambda_i)+\alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_i\,|\,\lambda_i)$, $i,j=1,2$, $i\neq j$, достигает своего глобального максимума, есть $\hat{T}$, т.е. $\hat{T}$ – решение оптимизационной задачи $L(T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)},\ldots)\Rightarrow\max_{T}$, $0\leq T\leq\tau_{\min}$.

Литература

1. *Nezhel'skaya L., Pagano M., Sidorova E.* Distribution parameters estimation in recurrent synchronous generalized doubly stochastic flow of the second order // Lecture Notes in Computer Science. 2019. Vol. 11965. P. 276–288.
2. *Нежельская Л.А., Сидорова Е.Ф.* Оценивание длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий методом моментов // Известия высших учебных заведений. Физика. 2019. Т. 62, № 9. С. 94–100.
3. *Normey-Rico J.E.* Control of dead-time process. London: Springer-Verlag, 2007. 462 p.

Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика). Гомель: УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. 146 с.

ESTIMATION OF ACTURIAL PRESENT VALUE OF DEFERRED LIFE ANNUITY USING INFORMATION ABOUT EXPECTATION OF LIFE

Yu.G. Dmitriev, G.M. Koshkin

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia
dmit@mail.tsu.ru, kgm@mail.tsu.ru

Let x be the age of an individual and at the moment $t_0=0$ payments start. The idea of the r-year deferred life annuity in accordance with [1. P. 174] is this: from the moment $t_0+r=r$, an individual once a year begins to get a certain money, which we take as the unit of money, and payments are made only for the lifetime of an individual. The deferred life annuity is connected with the respective type of insurance. Thus, the average total cost of the present continuous r-year deferred life annuity is defined by the following formula (see [1. P. 184]):

$$_{r|}\bar{a}_x(\delta) = \frac{1 - {}_{r|}\bar{A}_x}{\delta},$$

where $_{r|}\bar{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{S(x)} \int\limits_{x+r}^{\infty} e^{-\delta t} dF(t)$ is a net premium (the expectation of the present value of an insured unit sum for the deferred life insurance at age x), δ is a force of interest, $S(x) = P(X > x)$ is a survival function of an individual, X is his lifetime, $F(x) = P\left(X \le x\right) = 1 - S(x)$ is a distribution function.

The paper deals with the estimation problem of the actuarial present value of the continuous r-year deferred life annuity using auxiliary information about the expectation of life. Nonparametric estimators of this life annuity are synthesized based on the ideas of the articles [2-4] by individuals' death moments $X_1,...,X_n$. Suppose we know the expected lifetime

$$EX = a.$$

The estimator by making use of such information according to [5-7] one can take as follows:

$$_{r|}\bar{a}_x^n(\delta,\lambda) = \frac{1 - {}_{r|}\bar{A}_x^n - \lambda(\bar{x} - a)}{\delta},$$

where $_{r|}\bar{A}_x^n = \frac{e^{\delta x}}{S_n(x)} \int\limits_{x+r}^{\infty} e^{-\delta t} dF_n(t)$, $S_n(x)$ and $F_n(x)$ are empirical survival and distribution functions, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ is an estimator of a. The parameter λ we will find minimizing the principal term of the asymptotic mean squared error (MSE) of $_{r|}\bar{a}_x^n(\delta,\lambda)$. The usage of such auxiliary information can often provide the MSE smaller than that of standard estimators. An adaptive estimator is also proposed. We proved the asymptotic normality of all these estimators using the results of [8].

Note that the improved estimators of life annuities one can obtain by substituting of empirical survival functions by the smooth empirical survival functions (cf. [9]).

Literature

1. *Falin G.I.* Mathematical foundations of the theory of life insurance and pension schemes. Moscow: Ankil, 2002. 262 p.
2. *Koshkin G.M., Lopukhin Ya.N.* Estimation of net premiums in the models of long-term life insurance // Review of Applied and Industrial Mathematics. 2003. Vol. 10, is. 2. P. 315–329.
3. *Lopukhin Ya.N., Koshkin G.M.* On estimation of net premium in collective life insurance // The 5th Korea-Russian International Symposium on Science and Technology. Proceedings. KORUS 2001. Tomsk: TPU, 2001. Vol. 2. P. 296–299.
   Koshkin G.M., Gubina O.V. Estimation of the present values of life annuities for the different actuarial models // Proceedings. The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management / ed. by I. Frenkel and A. Lisnianski. SMRLO 2016. Beer Sheva, Israel: Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2016. P. 506–510.
4. *Dmitriev Yu.G., Koshkin G.M.* On the use of a priori information in nonparametric regression estimation // IFAC Proceedings Series. 1987. Vol. 2. P. 223–228.
5. *Dmitriev Yu.G., Koshkin G.M.* Using additional information in nonparametric estimation of density functionals // Automat. and Remote Control. 1987. Vol. 48, № 10. P. 1307–1316.
6. *Dmitriev Yu.G., Koshkin G.M.* Nonparametric estimators of probability characteristics using unbiased prior conditions // Statistical Papers. 2018. Vol. 59, № 4. P. 1559–1575.
7. *Koshkin G.M.* Asymptotic properties of functions of statistics and their application to nonparametric estimation // Automat. and Remote Control. 1990. Vol. 51, № 3. P. 345–357.
8. *Koshkin G.M.* Smooth recurrent estimators of the reliability functions // Russian Physics Journal. 2015. Vol. 58, № 7. P. 1018–1025.

STOCHASTIC METHOD FOR ASSESSING THE ADDITIONAL ERROR OF TECHNICAL MEASURING SYSTEMS

Yu.A. Lipnin, V.G. Mazur, M.V. Piltsov, A.D. Poudalov

AnSTU, Angarsk, Russia
systems-ntfs@mail.ru

Technological processes in industrial systems are controlled based on measurements of their current parameters. In turn, the value of the parameters is determined by many factors that affect the technological process, for example, the