МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л.А. Нежельская

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Учебное пособие

Томск
Издательство Томского государственного университета
2020

УКД 519.25(075.8)
ББК 22.172я73
Н431

Нежельская Л.А.

Н431 Оценка состояний дважды стохастических потоков событий : учебное пособие. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2020. – 210 с.

ISBN 978-5-94621-973-0

В предлагаемом учебном пособии в систематизированном виде изложены наиболее распространённые типы дважды стохастических потоков событий, являющихся математическими моделями реальных информационных потоков сообщений в телекоммуникационных системах и сетях. Методом максимума апостериорной вероятности решены задачи по оцениванию состояний дважды стохастических потоков событий в условиях полной наблюдаемости и при наличии непродлевающегося мёртвого времени.

В основу представленного материала положены оригинальные научные результаты автора.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» и смежным направлениям, а также для аспирантов специальности «05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации» и широкого круга специалистов, занимающихся проблемами статистической обработки потоков событий с целью принятия оптимального решения.

УКД 519.25(075.8)
ББК 22.172я73

Рецензенты:
А.М. Кориков, доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ;
С.Э. Воробейчиков, доктор физико-математических наук, профессор

ISBN 978-5-94621-973-0 © Нежельская Л.А., 2020
© Томский государственный университет, 2020

Предисловие

Теория массового обслуживания (ТМО), имеющая англоязычное название *queuing theory* (теория очередей), возникла в начале 20-го века и была представлена первыми работами датского инженера и математика А. К. Эрланга, связанными с решением задач в области телефонии – расчётом и проектированием телефонных сетей. Основные исследования А. К. Эрланга в этой области относятся к 1908–1922 гг. В его работах, в частности в первой статье, вышедшей в свет в 1909 г. [1], в качестве математической модели потока телефонных вызовов, поступающих на телефонную станцию, рассматривалась модель пуассоновского потока: телефонные вызовы носят случайный по времени характер, а длины интервалов между моментами их поступления имеют экспоненциальное распределение.

К середине 20-го века к вопросам телефонного дела добавились разнообразные задачи ядерной физики, автоматизации и организации производства, эксплуатации аэропортов, железнодорожных станций, магазинов, пунктов проката и пр., что обусловило возросший интерес учёных к их решению методами ТМО.

Основы и фундаментальные результаты по ТМО изложены в трудах советских учёных А. Я. Хинчина [2], Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко [3] и др.

Развитию ТМО, совершенствованию применяемого математического аппарата, основанного на методах теории вероятностей и теории случайных процессов, способствуют работы по проектированию, внедрению, эксплуатации и модернизации информационно-вычислительных систем и сетей разной конфигурации, компьютерных сетей, обладающих, как правило, ограниченным ресурсом и потоком заявок (событий, запросов) на его исследование.

Первоначальные исследования в области компьютерных сетей основывались на предположениях о некоррелированном характере информационных потоков (пуассоновские потоки). Появление цифровых сетей интегрального обслуживания – ЦСИО (Integrated Service Digital Networks), беспроводных и мобильных сетей связи, предназначенных для передачи разнообразной и разнородной информации – видео, речи, больших массивов данных, послужило стимулом к появлению *дважды стохастических потоков событий* – новой математической модели, наиболее адекватно учитывающей коррелированный характер реальных информационных потоков в современных телекоммуникационных сетях.

С конца 20-го века в теории очередей активно исследуются системы массового обслуживания (СМО) с коррелированными потоками. Имеется достаточное количество работ, в которых отражены данные исследования.

Вместе с тем на сегодняшний момент времени упорядоченного и систематизированного изложения собственно теории дважды стохастических потоков событий и решаемых задач в современной литературе нет.

Данное учебное пособие позволит отчасти восполнить этот пробел, предложив читателю ознакомиться с элементами теории дважды стохастических потоков событий.

В списке литературы приведены отдельные статьи с оригинальными результатами автора, послужившими основой для написания учебного пособия.

Глава 1
Различные математические модели дважды стохастических потоков событий

1.1. О дважды стохастических потоках

Каждое исследование по ТМО начинается с изучения потока событий (запросов, заявок, сообщений, вызовов), который поступает на обслуживающий прибор, то есть с изучения входящего потока событий. До 80-х годов 20-го века основным потоком событий, исследуемым многими авторами работ по ТМО, был простейший, или стационарный, пуассоновский поток.

Во входящем потоке события поступают в систему обслуживания в некоторые случайные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, образуя случайную последовательность $\{t_k\}$.

В дальнейшем изложении обозначение $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ *используется применительно как к случайным величинам, так и к их значениям, различие между которыми следует из контекста. Например, наблюдаемые (измеряемые) моменты наступления событий есть значения случайных величин – моментов наступления событий* [4].

На временной оси рассмотрим полуинтервал $[t_0, t_0 + \tau)$ длительности τ. Введём обозначение $P_k(\tau \mid t_0)$ – вероятность того, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \tau)$ длительности τ с началом в точке t_0 наступит ровно k событий. Пусть этот поток однородных случайных событий обладает следующими тремя свойствами [2].

1. Стационарность. Каковы бы ни были $\tau > 0$ и целое $k \geq 0$, вероятность того, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \tau)$ наступит k со-

бытий, не зависит от местоположения t_0 на временной оси, или $P_k(\tau \mid t_0) = P_k(\tau)$. Стационарность потока выражает собой неизменность его вероятностного режима во времени.

2. Ординарность. Для данного стационарного потока введём вероятность $\psi(\tau) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\tau)$ – вероятность того, что за промежуток времени τ наступит по меньшей мере два события. Тогда

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\psi(\tau)}{\tau} = 0.$$

Ординарность потока выражает собой практическую невозможность совмещения двух или более событий в один и тот же момент времени.

3. Отсутствие последействия. Вероятность $P_k(\tau)$ наступления k событий на полуинтервале $[t_0, t_0 + \tau)$ не зависит от чередования событий до момента t_0. Отсутствие последействия выражает собой взаимную независимость поведения потока в непересекающихся между собой промежутках времени.

Итак, *простейшим потоком однородных событий называется всякий стационарный ординарный поток без последействия.*

Для простейшего потока число событий на полуинтервале $[t_0, t_0 + \tau)$ длительности τ распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau$ [2]:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \; k = 0, 1, \ldots .$$

Длительность интервала между двумя соседними событиями простейшего потока распределена по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Определение. Интенсивностью λ стационарного случайного потока называется математическое ожидание числа событий, наступивших в потоке в единицу времени:

$$\lambda = \frac{M_\tau(k)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(\tau), \quad \tau > 0.$$

Для простейшего потока величина λ называется также **параметром** потока. Наличие одного только параметра предопределяет и недостатки стационарного пуассоновского (простейшего) потока, являющегося математической моделью реального потока.

Появление компьютерных сетей послужило причиной возникновения новой математической модели потока – *дважды стохастического потока событий*, которая наиболее адекватно описывает реальные информационные потоки. События в потоке наступают в случайные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ (первая стохастика), интенсивность дважды стохастического потока событий является случайным процессом (вторая стохастика). Из анализа научной литературы следует, что М. Бартлетт (M. Bartlett) [5], Д. Кокс (D. Cox) [6] и Дж. Кингмен (J. Kingman) [7] первыми в своих статьях определяют дважды стохастический поток как поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Названные авторы рассматривали модели дважды стохастических потоков с интенсивностью, представляющей собой *непрерывный* случайный процесс.

В начале 80-х годов 20-го века, независимо друг от друга, модели дважды стохастических потоков событий, интенсивность которых является *кусочно-постоянным* случайным процессом, были предложены в Советском Союзе учёными Г. П. Башариным, В. А. Кокотушкиным, В. А. Наумовым [8, 9] и названы МС-потоками (Markov Chain), а в США – научным коллективом М. Ньютса (M. Neuts) [10]. Название этих потоков в США эволюционировало от MVP (Markov Versatile Process) [10] – «разносторонних потоков» до MAP (Markovian Arrival Process) [11] – марковских входящих потоков и их обобщений BMAP (Batch Markovian Arrival Process) – групповых марковских входящих потоков.

Зарубежными и отечественными авторами работ при описании подобных входящих потоков событий в СМО используются термины: дважды стохастические потоки событий, MC-потоки, MAP-потоки.

Дважды стохастический поток событий – *коррелированный* поток, так как обладает свойствами *стационарности* и *ординарности*, однако является потоком *с последействием*. В дальнейшем изложении рассматриваются различные модели дважды стохастических потоков событий, для которых вводится понятие *сопровождающего* случайного процесса $\lambda(t)$, являющегося кусочно-постоянным ненаблюдаемым случайным процессом с двумя состояниями. Первичными являются события потока, на основании которых строится математическая модель процесса $\lambda(t)$. В этой связи случайный процесс $\lambda(t)$ является сопровождающим (порождён потоком). Для отдельных моделей потоков сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ имеет смысл интенсивности потока.

Все исследуемые дважды стохастические потоки событий функционируют в стационарном режиме, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – момент начала наблюдения, t – момент окончания наблюдения, пренебрегаем.

1.2. Асинхронный (MMPP – Markovian Modulated Poisson Process) поток

Рассматривается поток событий, сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2; если $\lambda(t) = \lambda_i$, то имеет место i-е состояние (S_i) процесса $\lambda(t)$, $i = 1,2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $t \geq 0$, $i = 1,2$. Если процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии S_1, то в течение времени пребывания его в

состоянии S_1 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_1; если в состоянии S_2, то имеет место пуассоновский поток с параметром λ_2.

Подчеркнём, что в асинхронном потоке событий переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние осуществляется в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события; поэтому поток событий называется асинхронным [12].

Вариант возможного поведения случайного процесса $\lambda(t)$ и асинхронного потока событий представлен на рис. 1.1, где S_1 и S_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты наступления событий в асинхронном потоке.

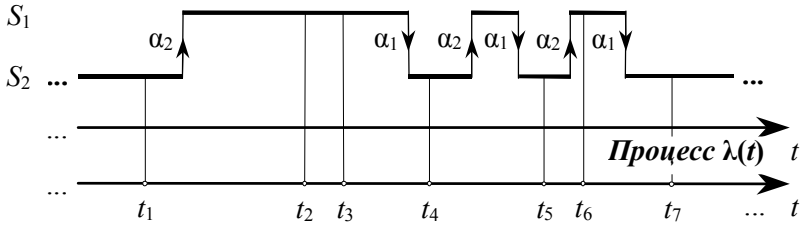

Рис. 1.1. Формирование асинхронного потока событий

Лемма 1.1. Сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ для асинхронного потока является марковским.

Доказательство. Пусть в момент времени $\tilde{t}$ процесс $\lambda(t)$ находится в первом состоянии, то есть значение процесса $\lambda(\tilde{t}) = \lambda_1$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$, $t \geq 0$. Поскольку экспоненциальное распределение обладает свойством отсутствия последействия, то оставшаяся после момента времени $\tilde{t}$ часть длительности пребывания процесса

$\lambda(t)$ в первом состоянии не зависит от того, как долго он в этом состоянии уже находился, а момент перехода процесса $\lambda(t)$ во второе состояние после $\tilde{t}$ определяется моментом окончания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии. Аналогичная ситуация имеет место для второго состояния процесса $\lambda(t)$. В силу этого процесс $\lambda(t)$ марковский. *Лемма доказана.*

Процесс $\lambda(t)$ является *принципиально ненаблюдаемым* (скрытый марковский процесс); наблюдаемыми на интервале (t_0, t) являются только моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ наступления событий.

Лемма 1.2. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, образуемая совокупностью моментов наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, является вложенной цепью Маркова.

Доказательство. Асинхронный поток событий в условиях стационарного режима функционирования является стационарным ординарным потоком с последействием; в противном случае он являлся бы простейшим потоком. Поведение потока после момента t_k наступления события не зависит от предыстории, а определяется состоянием S_i, $i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k. Действительно:

1. В момент времени t_k, $k = 1, 2, ...$, значение процесса $\lambda(t_k) = \lambda_i$, то есть имеет место состояние S_i, $i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$, длительность пребывания в котором является случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $t \geq 0$, $i = 1,2$. Следовательно, оставшаяся часть длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i, $i = 1,2$, после момента t_k не зависит от того, как долго процесс $\lambda(t)$ находился в этом состоянии до момента времени t_k, $k = 1, 2, ...$.

2. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i имеет место пуассоновский поток с параметром λ_i, $i=1,2$, обладающий свойством отсутствия последействия.

3. Момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i,j=1,2$, $i\neq j$, после момента t_k определяется моментом окончания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i, $i=1,2$, тем более, не зависит от поведения потока до момента времени t_k, $k=1,2,\ldots$.

Таким образом, моменты наступления событий $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$. Другими словами, асинхронный поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k, $k=1,2,\ldots$. *Лемма доказана.*

Определим вероятность того, что момент окончания i-го, $i=1,2$, состояния процесса $\lambda(t)$ принадлежит полуинтервалу $[t, t+\Delta t)$ длительности Δt, где Δt здесь и далее достаточно малая величина.

Обозначим η_i (случайная величина) – длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i, $i=1,2$. Пусть в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$. Определим вероятность неравенства $t\le\eta_i<t+\Delta t$. Имеем

$$P(t\le\eta_i<t+\Delta t)=P(\eta_i<t+\Delta t)-P(\eta_i<t)=F_i(t+\Delta t)-F_i(t)=$$
$$=1-e^{-\alpha_i(t+\Delta t)}-\left(1-e^{-\alpha_i t}\right)=e^{-\alpha_i t}\left(1-e^{-\alpha_i\Delta t}\right).$$

С другой стороны,

$$P(t\le\eta_i<t+\Delta t)=P(\eta_i<t+\Delta t\,|\,\eta_i\ge t)\,P(\eta_i\ge t)=$$
$$=P(\eta_i<t+\Delta t\,|\,\eta_i\ge t)\,e^{-\alpha_i t}.$$

Сравнивая выписанные выражения для вероятности неравенства $t \le \eta_i < t + \Delta t$, находим

$$e^{-\alpha_i t}\left(1 - e^{-\alpha_i \Delta t}\right) = P(\eta_i < t + \Delta t \mid \eta_i \ge t)\, e^{-\alpha_i t},$$

$$P(\eta_i < t + \Delta t \mid \eta_i \ge t) = 1 - e^{-\alpha_i \Delta t} = F_i(\Delta t) = P(\eta_i < \Delta t).$$

Таким образом, вероятность того, что момент окончания состояния S_i, $i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ принадлежит полуинтервалу $[t, t + \Delta t)$, равна

$$P(\eta_i < \Delta t) = F_i(\Delta t) = \alpha_i \Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \ge 0.$$

Вероятность обратного события – состояние S_i, $i = 1,2$, не закончится на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, соответственно, равна

$$P(\eta_i \ge \Delta t) = 1 - F_i(\Delta t) = e^{-\alpha_i \Delta t} = 1 - \alpha_i \Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \ge 0.$$

Пусть $p_{ij}(t, t + \Delta t)$ – вероятность перехода некоторого марковского случайного процесса $\xi(t)$ из i-го состояния в j-е, $i, j = \overline{1,n}$, на полуинтервале времени $[t, t + \Delta t)$. Тогда для марковского случайного процесса $\xi(t)$ существуют пределы [13]:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} &= d_{ij}(t) \ge 0,\ i \ne j. \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} &= d_{ii}(t) < 0. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Определение. Величины $d_{ij}(t)$ имеют смысл интенсивности перехода из состояния i в состояние j и называются *инфинитезимальными характеристиками* процесса $\xi(t)$ с непрерывным временем.

Из определения инфинитезимальных характеристик следует, что справедливы равенства

$$p_{ij}\left(t, t+\Delta t\right) = d_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), i \neq j,$$

$$p_{ii}\left(t, t+\Delta t\right) = 1 + d_{ii}(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(t) = 0, i, j = \overline{1,n};\ \ d_{ii}(t) = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d_{ij}(t), i = \overline{1,n}.$$

Перейдём к определению матриц инфинитезимальных характеристик сопровождающего процесса $\lambda(t)$. Поскольку рассматривается стационарный режим функционирования потока, то $d_{ij}(t) = d_{ij}$, $i, j = 1,2$.

Опишем возможные ситуации, которые могут произойти на рассматриваемом полуинтервале $\left[t, t+\Delta t\right)$. Пусть $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1,2$. Тогда:

1) за время Δt закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $P(\eta_i < \Delta t) = F_i(\Delta t) = 1 - e^{-\alpha_i \Delta t} = \alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$, наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i с вероятностью $\lambda_i \Delta t e^{-\lambda_i \Delta t} = \lambda_i \Delta t(1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из i-го состояния в j-е, $i \neq j$, с вероятностью единица; вероятность этой ситуации равна

$$(\alpha_i \Delta t + o(\Delta t))(\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = o(\Delta t);$$

2) за время Δt не закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $P(\eta_i \geq \Delta t) = 1 - F_i(\Delta t) = e^{-\alpha_i \Delta t} = 1 - \alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ и с вероятностью $\lambda_i \Delta t e^{-\lambda_i \Delta t} = \lambda_i \Delta t(1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i; вероятность этой ситуации равна

$$(1 - \alpha_i \Delta t + o(\Delta t))(\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t);$$

3) за время Δt закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $P(\eta_i < \Delta t) = F_i(\Delta t) = 1 - e^{-\alpha_i \Delta t} = \alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i с вероятностью $e^{-\lambda_i \Delta t} = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_i в S_j, $i \neq j$ с вероятностью единица; вероятность описанной ситуации есть

$$(\alpha_i \Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = \alpha_i \Delta t + o(\Delta t);$$

4) за время Δt не закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $P(\eta_i \geq \Delta t) = 1 - F_i(\Delta t) = e^{-\alpha_i \Delta t} = 1 - \alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ и с вероятностью $e^{-\lambda_i \Delta t} = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i; вероятность описанной ситуации есть

$$(1 - \alpha_i \Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = 1 - (\lambda_i + \alpha_i)\Delta t + o(\Delta t).$$

Других возможностей нет. С учётом (1.1) рассмотрим следующие пределы:

1) $d_{ij}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, $i, j = 1,2$, $i \neq j$, – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, связанного с наступлением события потока;

2) $d_{ii}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i$, $i = 1,2$, – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в i-е (остаться в i-м состоянии), связанного с наступлением события потока;

3) $d_{ij}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \alpha_i$, $i, j = 1,2$, $i \neq j$, – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, не связанного с наступлением события потока;

4) $d_{ii}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1-(\lambda_i + \alpha_i)\Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -(\lambda_i + \alpha_i)$, $i = 1,2$, – интенсивность выхода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния, взятая с противоположным знаком.

При этом справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{2} d_{ij}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{ij}^{(1)} = -(\lambda_i + \alpha_i) + \lambda_i + \alpha_i = 0\,,\ i = 1,2\,.$$

Матрицы инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D}_0 = \left\| d_{ij}^{(0)} \right\|$ и $\mathbf{D}_1 = \left\| d_{ij}^{(1)} \right\|$, $i, j = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ принимают вид

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{Vmatrix},\ \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события потока. Недиагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

Обозначим $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$ – априорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1,2$, при условии, что функционирование асинхронного потока (процесса $\lambda(t)$) началось в момент времени t^0.

Лемма 1.3. Априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для асинхронного потока событий имеют вид

$$\pi_1(t \mid t^0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \pi \right) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t^0)},$$
$$\pi_2(t \mid t^0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \pi \right) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t^0)} \qquad (1.3)$$

с начальными условиями в момент t^0: $\pi_1(t^0 \mid t^0) = \pi$, $\pi_2(t^0 \mid t^0) = 1 - \pi$.

Доказательство. Определим вероятность $\pi_i(t + \Delta t \mid t^0)$ того, что в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i, то есть имеет место i-е, $i = 1, 2$, состояние сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$. Возможны следующие ситуации на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, связанные с поведением процесса $\lambda(t)$:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1(t \mid t^0)$, и на $[t, t + \Delta t)$ не закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$; вероятность этой ситуации равна

$$\pi_1(t \mid t^0)(1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)) = \pi_1(t \mid t^0) - \alpha_1 \pi_1(t \mid t^0) \Delta t + o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2(t \mid t^0)$, и на $[t, t + \Delta t)$ закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}) = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из второго состояния в первое с вероятностью единица; вероятность описанной ситуации равна

$$\pi_2(t \mid t^0)(\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)) = \alpha_2 \pi_2(t \mid t^0) \Delta t + o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2(t \mid t^0)$, и на $[t, t + \Delta t)$ не закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\pi_2(t \mid t^0)(1-\alpha_2\Delta t + o(\Delta t)) = \pi_2(t \mid t^0) - \alpha_2\pi_2(t \mid t^0)\Delta t + o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1(t \mid t^0)$, и на $[t, t+\Delta t)$ закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}\right) = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния во второе с вероятностью единица; вероятность этой ситуации равна

$$\pi_1(t \mid t^0)(\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)) = \alpha_1\pi_1(t \mid t^0)\Delta t + o(\Delta t).$$

Других возможностей нет.

Тогда имеем систему равенств:

$$\pi_1(t+\Delta t \mid t^0) = \pi_1(t \mid t^0) - \alpha_1\pi_1(t \mid t^0)\Delta t + \alpha_2\pi_2(t \mid t^0)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\pi_2(t+\Delta t \mid t^0) = \pi_2(t \mid t^0) - \alpha_2\pi_2(t \mid t^0)\Delta t + \alpha_1\pi_1(t \mid t^0)\Delta t + o(\Delta t).$$

Преобразуем систему к виду

$$\pi_1(t+\Delta t \mid t^0) - \pi_1(t \mid t^0) = \left[-\alpha_1\pi_1(t \mid t^0) + \alpha_2\pi_2(t \mid t^0)\right]\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\pi_2(t+\Delta t \mid t^0) - \pi_2(t \mid t^0) = \left[\alpha_1\pi_1(t \mid t^0) - \alpha_2\pi_2(t \mid t^0)\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив оба равенства на Δt и выполнив в них предельный переход при $\Delta t \to 0$, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений относительно вероятностей $\pi_i(t \mid t^0)$, $i = 1,2$:

$$\pi_1'(t \mid t^0) = -\alpha_1\pi_1(t \mid t^0) + \alpha_2\pi_2(t \mid t^0),$$

$$\pi_2'(t \mid t^0) = \alpha_1\pi_1(t \mid t^0) - \alpha_2\pi_2(t \mid t^0);\ \pi_1(t \mid t^0) + \pi_2(t \mid t^0) = 1.$$

Интегрируя полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений одним из известных методов, например методом исключения, и учитывая начальные условия, приходим к (1.3). *Лемма доказана.*

Следствие леммы 1.3. Априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ при $t \to \infty$ (или $t^0 \to -\infty$) для асинхронного потока имеют вид

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (1.4)$$

Замечание 1.1. Сопровождающий процесс $\lambda(t)$ для асинхронного потока можно трактовать как интенсивность потока, так как в состоянии S_1 значение интенсивности потока есть λ_1, в состоянии S_2, соответственно, λ_2. Тогда средняя интенсивность асинхронного потока равна

$$\Lambda = \lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \lambda_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

1.3. Синхронный поток

Исследуется поток событий, сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями – S_1 и S_2; если $\lambda(t) = \lambda_i$, то имеет место i-е состояние (S_i) процесса $\lambda(t)$, $i = 1,2$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Если процесс $\lambda(t)$ находится в первом состоянии, то в течение времени пребывания его в первом состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_1; если во втором состоянии, то имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2. Пусть процесс $\lambda(t)$ находится в первом состоянии. Тогда в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_1 процесс $\lambda(t)$ переходит из первого состояния в первое с вероятностью $1-p$ либо процесс $\lambda(t)$ переходит из первого состояния во второе с вероятностью p ($0 < p \le 1$). Если процесс $\lambda(t)$ находится во втором состоянии, то в

момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_2 процесс $\lambda(t)$ остаётся во втором состоянии с вероятностью $1-q$ или переходит из второго состояния в первое с вероятностью q $(0<q\le 1)$.

Таким образом, в синхронном потоке событий переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 и, наоборот, из состояния S_2 в состояние S_1 возможен только в момент наступления события пуассоновского потока [14].

Вариант возникающей ситуации приведён на рис. 1.2, где S_1, S_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты наступления событий в синхронном потоке.

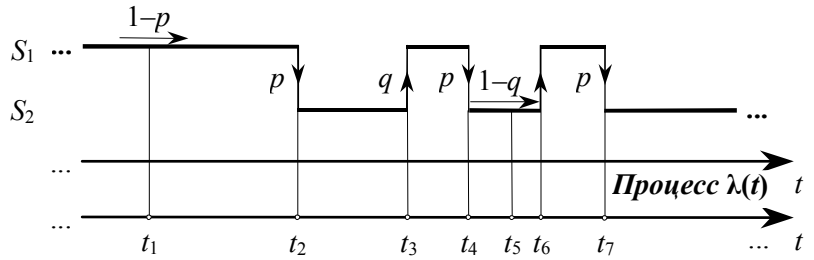

Рис. 1.2. Формирование синхронного потока событий

Лемма 1.4. Для синхронного потока событий сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ является марковским.

Доказательство. Докажем, что длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 (временного интервала, на котором значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$) является случайной величиной с функцией распределения $F_1^{(1)}(t)=1-e^{-p\lambda_1 t}$, $t\ge 0$; длительность участка стационарности $\lambda(t)$ в состоянии S_2 (временного

интервала, на котором значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$) является случайной величиной с функцией распределения $F_2^{(2)}(t) = 1 - e^{-q\lambda_2 t}$, $t \geq 0$.

Рассмотрим состояние S_1 процесса $\lambda(t)$ (рис. 1.3).

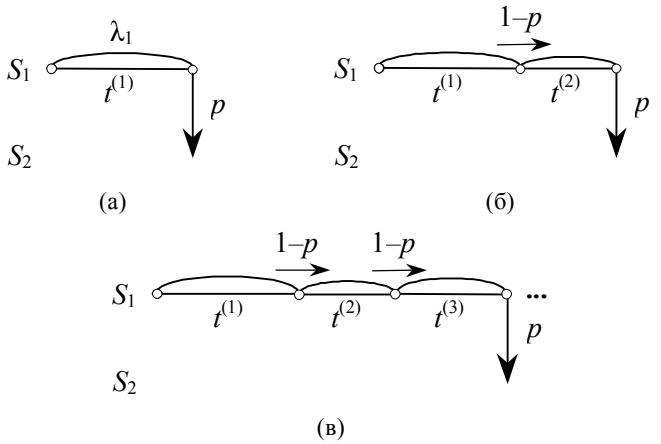

Рис. 1.3. Возможные ситуации в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$

Таким образом, участок стационарности случайной длительности в состоянии S_1 имеет длину $t^{(1)}$ (рис. 1.3 (а)), $t^{(1)} + t^{(2)}$ (рис. 1.3 (б)), $t^{(1)} + t^{(2)} + t^{(3)}$ (рис. 1.3 (в)) и так далее. При этом каждый из интервалов $t^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, представляет собой реализацию случайной величины, распределённой по закону $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$.

Определим, какую функцию распределения будет иметь случайная величина $T^{(1)}$ – длительность участка стационарности в состоянии S_1 (суммарная или интегральная длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии). Для этого применим схему рандомизации [15]: если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – взаимно независимые случайные величины с экспоненциальным распределением

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, то сумма $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ имеет плотность

$$g_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \; t > 0.$$

Число слагаемых n в сумме $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ является параметром, который рандомизируется с помощью распределения вероятностей $P\{N = n\} = p_n$. Плотность результирующей суммы S_N со случайным числом слагаемых N есть $p_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, g_n(t)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $T^{(1)}$ – длительности участка стационарности $\lambda(t)$ в состоянии S_1.

Покажем, что $\{p_n\}$ имеет геометрическое распределение $p_n = p(1-p)^{n-1}$.

Рассмотрим одну из реализаций процесса $\lambda(t)$ (рис. 1.4).

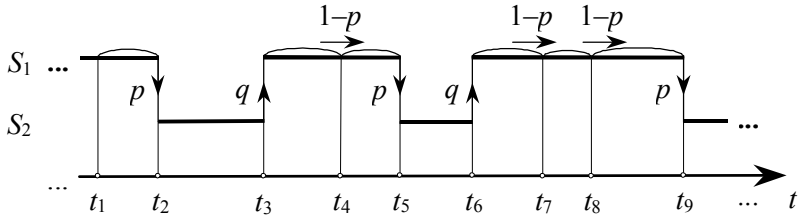

Рис. 1.4. Одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и синхронного потока событий

1) Вероятность одного интервала стационарности есть p (рис. 1.3 (а));

2) вероятность участка стационарности, представляющего собой сумму двух независимых одинаково распределённых интервалов, есть $p(1-p)$ (рис. 1.3 (б));

3) вероятность участка стационарности, представляющего собой сумму трёх независимых одинаково распределённых интервалов, есть $p(1-p)^2$ (рис. 1.3 (в));

…

n) вероятность участка стационарности, состоящего из суммы n интервалов, равна $p_n = p(1-p)^{n-1}$ – геометрическое распределение.

Тогда

$$p_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}\lambda_1 \frac{(\lambda_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1 t} = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{(1-p)\lambda_1 t} = p\lambda_1 e^{-p\lambda_1 t}.$$

Итак, $p_1(t) = p\lambda_1 e^{-p\lambda_1 t}$ – плотность вероятности случайной величины $T^{(1)}$ – длительности участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1. Функция распределения случайной величины $T^{(1)}$ имеет вид

$$F_1^{(1)}(t) = P\{T^{(1)} < t\} = \int_0^t p_1(\tau) d\tau = 1 - e^{-p\lambda_1 t}, \; t \geq 0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для состояния S_2 процесса $\lambda(t)$, находим функцию распределения длительности участка стационарности в виде $F_2^{(2)}(t) = 1 - e^{-q\lambda_2 t}, \; t \geq 0.$

Таким образом, поведение случайного процесса $\lambda(t)$ после произвольного момента времени $\tilde{t}$ не зависит от предыстории в силу экспоненциального распределения длительности участка стационарности в состоянии S_i, $i = 1,2$, а зависит лишь от значения процесса $\lambda(t)$ в момент времени $\tilde{t}$. Момент смены состояния S_i на S_j, $i, j = 1,2$ (будем далее полагать возможность $\lambda(t)$ остаться

в i-м состоянии как переход из i-го состояния в i-е состояние, $i=1,2$), после $\widetilde{t}$ определяется моментом окончания i-го состояния процесса $\lambda(t)$. *Лемма доказана.*

Лемма 1.5. Моменты наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ в синхронном потоке порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Доказательство. Синхронный поток событий, функционирующий в стационарном режиме, обладает свойствами стационарности и ординарности, однако является потоком с последействием. Покажем, что поведение потока после момента t_k наступления события не зависит от предыстории, а определяется тем, какое значение процесс $\lambda(t)$ принимает в момент времени t_k, $k=1,2,...$, то есть состоянием S_i, $i=1,2$, процесса $\lambda(t)$. Отметим следующее:

1. В момент времени t_k значение процесса $\lambda(t_k)=\lambda_i$, то есть процесс находится в состоянии S_i. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_i, $i=1,2$, обладающий свойством отсутствия последействия.

2. Длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии является случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону $F_1^{(1)}(t)=1-e^{-p\lambda_1 t}$, $t\geq 0$, во втором состоянии – по закону $F_2^{(2)}(t)=1-e^{-q\lambda_2 t}$, $t\geq 0$. Следовательно, оставшаяся часть длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ как в первом, так и во втором состоянии после момента t_k, не зависит от того, как долго процесс $\lambda(t)$ находился в этом состоянии до момента времени t_k, $k=1,2,...$

3. Следующий за моментом t_k момент перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, $i,j=1,2$, совпадает с моментом t_{k+1}

наступления очередного события пуассоновского потока с параметром λ_i и, тем более, не зависит от поведения потока до момента t_k, $k = 1, 2, ...$

Таким образом, синхронный поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента времени t_k наступления события потока. *Лемма доказана.*

Выпишем инфинитезимальные характеристики процесса $\lambda(t)$. Для этого рассмотрим возможные ситуации, которые могут произойти на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$. Пусть $\lambda(t) = \lambda_1$. Тогда:

1) за время Δt наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1 \Delta t e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ и в момент наступления события с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_1 в состояние S_1 (останется в S_1); вероятность ситуации равна $(1 - p)\left(\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)\right) = (1 - p)\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$;

2) за время Δt наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1 \Delta t e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ и в момент наступления события с вероятностью p процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния во второе; вероятность описанной ситуации равна $p\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$;

3) за время Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной нулю, перейдёт из первого состояния во второе; вероятность описанной ситуации равна нулю;

4) за время Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, останется в первом состоянии; вероятность этой ситуации есть $1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$.

Других возможных ситуаций, когда значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$, не существует. С учётом (1.1) рассмотрим следующие, соответствующие случаям 1)–4), пределы:

1) $d_{11}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(1-p)\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = (1-p)\lambda_1$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_1, связанного с наступлением события потока;

2) $d_{12}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = p\lambda_1$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2, связанного с наступлением события потока;

3) $d_{12}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{0}{\Delta t} = 0$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2, не связанного с наступлением события потока;

4) $d_{11}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -\lambda_1$ – интенсивность выхода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1, взятая с противоположным знаком.

Пусть $\lambda(t) = \lambda_2$. Тогда имеем:

5) за время Δt наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t} = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$ и в момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ с вероятностью $1-q$ перейдёт из S_2 в S_2 (останется во втором состоянии); вероятность этой ситуации есть $(1-q)(\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)) = (1-q)\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$;

6) за время Δt наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t} = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$ и в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ с вероятностью q перейдёт из второго состояния в первое; вероятность описанной ситуации есть $q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$;

7) за время Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2 \Delta t} = 1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$ и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной нулю, перейдёт из второго состояния в первое; вероятность рассмотренной ситуации равна нулю;

8) за время Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2 \Delta t} = 1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$ и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, останется во втором состоянии; вероятность этой ситуации есть $1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$.

Других возможных ситуаций в состоянии S_2 не существует. С учётом (1.1) рассмотрим соответствующие ситуациям 5)–8) пределы:

5) $d_{22}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(1-q)\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = (1-q)\lambda_2$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_2, связанного с наступлением события потока;

6) $d_{21}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = q\lambda_2$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1, связанного с наступлением события потока;

7) $d_{21}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{0}{\Delta t} = 0$ – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1, не связанного с наступлением события потока;

8) $d_{22}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -\lambda_2$ – интенсивность выхода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2, взятая с противоположным знаком.

При этом справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{2} d_{1j}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{1j}^{(1)} = -\lambda_1 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_1 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2} d_{2j}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{2j}^{(1)} = -\lambda_2 + (1-q)\lambda_2 + q\lambda_2 = 0.$$

Матрицы инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D}_0 = \left\| d_{ij}^{(0)} \right\|$ и $\mathbf{D}_1 = \left\| d_{ij}^{(1)} \right\|$, $i, j = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ принимают вид

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{Vmatrix}, \ \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{Vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Содержательный смысл элементов матриц $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ описан в параграфе 1.2 (формулы 1.2) для асинхронного потока.

Обозначим $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$ априорную вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1,2$, при условии, что функционирование синхронного потока (процесса $\lambda(t)$) началось в момент времени t^0.

Лемма 1.6. Априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для синхронного потока событий имеют вид

$$\begin{aligned} \pi_1\left(t \mid t^0\right) &= \frac{q\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2} - \left(\frac{q\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2} - \pi \right) e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\left(t - t^0\right)}, \\ \pi_2\left(t \mid t^0\right) &= \frac{p\lambda_1}{p\lambda_1 + q\lambda_2} + \left(\frac{q\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2} - \pi \right) e^{-(p\lambda_1 + q\lambda_2)\left(t - t^0\right)} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

с начальными условиями в момент времени t^0: $\pi_1\left(t^0 \mid t^0\right) = \pi$, $\pi_2\left(t^0 \mid t^0\right) = 1 - \pi$.

Доказательство. Определим вероятность $\pi_i\left(t + \Delta t \mid t^0\right)$ того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени $t + \Delta t$ принимает значение λ_i, то есть имеет место состояние S_i, $i = 1,2$, случайного процесса $\lambda(t)$. Опишем возможные ситуации на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, связанные с поведением процесса $\lambda(t)$:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1\left(t \mid t^0\right)$, и на $[t, t + \Delta t)$ не наступит событие пуассоновского

потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$, и с вероятностью единица процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии S_1; вероятность этой ситуации равна

$$\pi_1\left(t \mid t^0\right)(1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)) = \pi_1\left(t \mid t^0\right) - \lambda_1 \pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1\left(t \mid t^0\right)$, и на $[t, t + \Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1 \Delta t e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$, и в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_1 в состояние S_1 с вероятностью $1 - p$; вероятность рассмотренной ситуации есть

$$(1 - p)\pi_1\left(t \mid t^0\right)(\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)) = (1 - p)\lambda_1 \pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2\left(t \mid t^0\right)$, и на $[t, t + \Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t} = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, и в момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_2 в состояние S_1 с вероятностью q; вероятность описанной ситуации равна

$$q\pi_2\left(t \mid t^0\right)(\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)) = q\lambda_2 \pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2\left(t \mid t^0\right)$, и на $[t, t + \Delta t)$ не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2 \Delta t} = 1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью единица останется в состоянии S_2; вероятность этой ситуации равна

$$\pi_2\left(t \mid t^0\right)(1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)) = \pi_2\left(t \mid t^0\right) - \lambda_2 \pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

5) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_2$ с вероятностью $\pi_2(t\,|\,t^0)$, и на $[t,t+\Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2\Delta t e^{-\lambda_2\Delta t}=\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)$, и в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_2 в S_2 с вероятностью $1-q$; вероятность ситуации есть

$$(1-q)\pi_2(t\,|\,t^0)(\lambda_2\Delta t+o(\Delta t))=(1-q)\lambda_2\pi_2(t\,|\,t^0)\Delta t+o(\Delta t);$$

6) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $\pi_1(t\,|\,t^0)$, и на $[t,t+\Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1\Delta t e^{-\lambda_1\Delta t}=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$, и в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью p; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$p\pi_1(t\,|\,t^0)(\lambda_1\Delta t+o(\Delta t))=p\lambda_1\pi_1(t\,|\,t^0)\Delta t+o(\Delta t).$$

Других возможностей не имеется.

Описанные случаи позволяют выписать соотношения относительно $\pi_1(t\,|\,t^0)$ и $\pi_2(t\,|\,t^0)$ в момент $t+\Delta t$:

$$\pi_1(t+\Delta t\,|\,t^0)=\pi_1(t\,|\,t^0)-\lambda_1\pi_1(t\,|\,t^0)\Delta t+$$
$$+(1-p)\lambda_1\pi_1(t\,|\,t^0)\Delta t+q\lambda_2\pi_2(t\,|\,t^0)\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\pi_2(t+\Delta t\,|\,t^0)=\pi_2(t\,|\,t^0)-\lambda_2\pi_2(t\,|\,t^0)\Delta t+$$
$$+(1-q)\lambda_2\pi_2(t\,|\,t^0)\Delta t+p\lambda_1\pi_1(t\,|\,t^0)\Delta t+o(\Delta t).$$

Выполнив несложные преобразования, получаем

$$\pi_1(t+\Delta t\,|\,t^0)-\pi_1(t\,|\,t^0)=[-p\lambda_1\pi_1(t\,|\,t^0)+q\lambda_2\pi_2(t\,|\,t^0)]\Delta t+o(\Delta t),$$
$$\pi_2(t+\Delta t\,|\,t^0)-\pi_2(t\,|\,t^0)=[p\lambda_1\pi_1(t\,|\,t^0)-q\lambda_2\pi_2(t\,|\,t^0)]\Delta t+o(\Delta t).$$

Разделив левые и правые части последних равенств на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно вероятностей $\pi_i(t \mid t^0)$, $i = 1,2$:

$$\pi_1'(t \mid t^0) = -p\lambda_1 \pi_1(t \mid t^0) + q\lambda_2 \pi_2(t \mid t^0),$$

$$\pi_2'(t \mid t^0) = p\lambda_1 \pi_1(t \mid t^0) - q\lambda_2 \pi_2(t \mid t^0); \pi_1(t \mid t^0) + \pi_2(t \mid t^0) = 1,$$

решая которую, с учётом начальных условий, приходим к (1.6). *Лемма доказана.*

Следствие леммы 1.6. Для синхронного потока событий априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ при $t \to \infty$ (или $t^0 \to -\infty$) имеют вид

$$\pi_1 = \frac{q\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2}, \pi_2 = \frac{p\lambda_1}{p\lambda_1 + q\lambda_2}. \qquad (1.7)$$

Замечание 1.2. Сопровождающий процесс $\lambda(t)$ для синхронного потока можно трактовать как интенсивность потока, поскольку в состоянии S_1 значение интенсивности потока есть λ_1, в состоянии S_2, соответственно, λ_2. Тогда средняя интенсивность синхронного потока равна

$$\Lambda = \lambda_1 \frac{q\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2} + \lambda_2 \frac{p\lambda_1}{p\lambda_1 + q\lambda_2}.$$

1.4. Полусинхронный поток

Изучается поток событий, сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2; если $\lambda(t) = \lambda_i$, то имеет место i-е состояние (S_i)

процесса $\lambda(t)$, $i=1,2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Если процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии S_1, то в течение времени пребывания его в первом состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_1. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе с вероятностью p $(0 < p \leq 1)$ возможен только в момент наступления события, с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остаётся в первом состоянии (переходит из S_1 в S_1). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2.

Таким образом, переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 возможен только в момент наступления события потока, переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 осуществляется в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события потока; поэтому поток называется полусинхронным [16].

Вариант возможного поведения случайного процесса $\lambda(t)$ и полусинхронного потока событий представлен на рис. 1.5, где S_1, S_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты наступления событий в полусинхронном потоке.

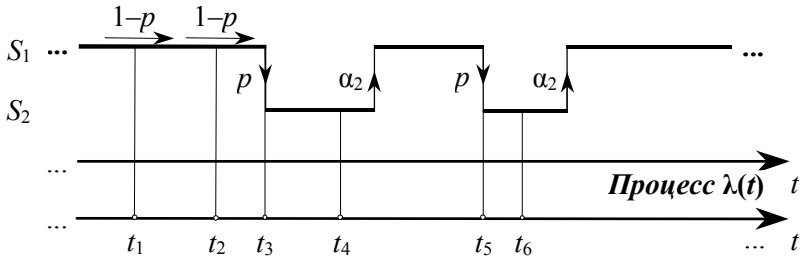

Рис. 1.5. Формирование полусинхронного потока событий

Лемма 1.7. Сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ для полусинхронного потока есть марковский процесс.

Доказательство основано на лемме 1.1 и лемме 1.4. Действительно, длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 (временного интервала, на котором значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$) – случайная величина с функцией распределения $F_1^{(1)}(t)=1-e^{-p\lambda_1 t}$, $t\geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 – случайная величина с функцией распределения $F_2(t)=1-e^{-\alpha_2 t}$, $t\geq 0$. Отсюда следует, что $\lambda(t)$ – марковский процесс. *Лемма доказана.*

Лемма 1.8. Моменты наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ в полусинхронном потоке порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Доказательство основано на лемме 1.2 и лемме 1.5, поскольку в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ полусинхронный поток ведёт себя как синхронный поток, во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ – как асинхронный поток. *Лемма доказана.*

С учётом (1.2) и (1.5) матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ примут вид

$$\mathbf{D}_0=\begin{Vmatrix}-\lambda_1 & 0\\ \alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2)\end{Vmatrix},\ \mathbf{D}_1=\begin{Vmatrix}(1-p)\lambda_1 & p\lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix}.$$

Описание содержательного смысла элементов матриц $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ приводится в параграфе 1.2 для асинхронного потока.

Обозначим $\pi_i\left(t\,|\,t^0\right)$ – априорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$, при условии, что функционирование полусинхронного потока (процесса $\lambda(t)$) началось в момент времени t^0.

Лемма 1.9. Для полусинхронного потока событий априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ имеют вид

$$\pi_1\left(t \mid t^0\right)=\frac{\alpha_2}{p\lambda_1+\alpha_2}-\left(\frac{\alpha_2}{p\lambda_1+\alpha_2}-\pi\right)e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)(t-t^0)},$$
$$\pi_2\left(t \mid t^0\right)=\frac{p\lambda_1}{p\lambda_1+\alpha_2}+\left(\frac{\alpha_2}{p\lambda_1+\alpha_2}-\pi\right)e^{-(p\lambda_1+\alpha_2)(t-t^0)} \quad (1.8)$$

с начальными условиями в момент времени t^0: $\pi_1\left(t^0 \mid t^0\right)=\pi$, $\pi_2\left(t^0 \mid t^0\right)=1-\pi$.

Доказательство. Определим $\pi_i\left(t+\Delta t \mid t^0\right)$ – вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i, то есть имеет место i-е, $i=1,2$, состояние процесса $\lambda(t)$. Возможные ситуации на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$, связанные с поведением процесса $\lambda(t)$:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $\pi_1\left(t \mid t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1\Delta t}=1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$, и с вероятностью единица процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии S_1; вероятность описанной ситуации равна

$$\pi_1\left(t \mid t^0\right)(1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t))=\pi_1\left(t \mid t^0\right)-\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t+o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $\pi_1\left(t \mid t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1\Delta t e^{-\lambda_1\Delta t}=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$, и в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_1 в состояние S_1 с вероятностью $1-p$; вероятность этой ситуации равна

$$(1-p)\pi_1\left(t \mid t^0\right)\left(\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\right) = (1-p)\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2\left(t \mid t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_2\Delta t}\right) = \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из второго состояния в первое с вероятностью единица; вероятность ситуации есть

$$\pi_2\left(t \mid t^0\right)\left(\alpha_2\Delta t + o(\Delta t)\right) = \alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2\left(t \mid t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt не закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\alpha_2\Delta t} = 1 - \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\pi_2\left(t \mid t^0\right)\left(1 - \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)\right) = \pi_2\left(t \mid t^0\right) - \alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

5) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1\left(t \mid t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1\Delta t e^{-\lambda_1\Delta t} = \lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$, и в момент наступления события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью p; вероятность этой ситуации равна

$$p\pi_1\left(t \mid t^0\right)\left(\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\right) = p\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t).$$

Других возможностей не имеется.

Рассмотренные ситуации позволяют выписать систему равенств относительно $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$, $i = 1,2$, в момент времени $t + \Delta t$:

$$\pi_1\left(t+\Delta t \mid t^0\right)=$$

$$=\pi_1\left(t \mid t^0\right)-\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t+(1-p)\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t+\alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\pi_2\left(t+\Delta t \mid t^0\right)=\pi_2\left(t \mid t^0\right)-\alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t+p\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t+o(\Delta t).$$

После несложных преобразований находим

$$\pi_1\left(t+\Delta t \mid t^0\right)-\pi_1\left(t \mid t^0\right)=\left[-p\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)+\alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\pi_2\left(t+\Delta t \mid t^0\right)-\pi_2\left(t \mid t^0\right)=\left[p\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)-\alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right)\right]\Delta t+o(\Delta t).$$

Разделив оба равенства на Δt и выполнив в них предельный переход при $\Delta t \to 0$, получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно вероятностей $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$, $i=1,2$:

$$\pi_1'\left(t \mid t^0\right)=-p\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)+\alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right),$$

$$\pi_2'\left(t \mid t^0\right)=p\lambda_1\pi_1\left(t \mid t^0\right)-\alpha_2\pi_2\left(t \mid t^0\right);\ \pi_1\left(t \mid t^0\right)+\pi_2\left(t \mid t^0\right)=1.$$

Интегрируя выписанную систему, с учётом начальных условий, приходим к (1.8). *Лемма доказана.*

Следствие леммы 1.9. Априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для полусинхронного потока событий при $t \to \infty$ (или $t^0 \to -\infty$) имеют вид

$$\pi_1=\frac{\alpha_2}{p\lambda_1+\alpha_2},\ \pi_2=\frac{p\lambda_1}{p\lambda_1+\alpha_2}. \qquad (1.9)$$

Замечание 1.3. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ для полусинхронного потока является интенсивностью потока, так как в состоянии S_1 значение интенсивности потока есть λ_1, в состоянии S_2, соответственно, λ_2. При этом средняя интенсивность полусинхронного потока событий равна

$$\Lambda=\lambda_1\frac{\alpha_2}{p\lambda_1+\alpha_2}+\lambda_2\frac{p\lambda_1}{p\lambda_1+\alpha_2}.$$

1.5. MAP-поток

Рассматривается поток событий, сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями – S_1 и S_2; если $\lambda(t)=\lambda_i$, то имеет место i-е состояние (S_i) процесса $\lambda(t), i=1,2, \lambda_1>\lambda_2>0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i определяется случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $F_i(t)=1-e^{-\lambda_i t}$, $t\geq 0$, $i=1,2$. В момент окончания состояния S_i процесса $\lambda(t)$ возможны следующие ситуации, каждая из которых протекает мгновенно: 1) наступает событие потока, и процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j; совместная вероятность описанной ситуации $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i,j=1,2$; 2) не наступает событие потока, и процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j; совместная вероятность этой ситуации $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $i,j=1,2, i\neq j$. При этом $P_0(\lambda_j|\lambda_i)+P_1(\lambda_j|\lambda_i)+P_1(\lambda_i|\lambda_i)=1$, $i,j=1,2$, $i\neq j$ [17].

Вариант возможного поведения случайного процесса $\lambda(t)$ и MAP-потока событий представлен на рис. 1.6, где S_1 и S_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты наступления событий в потоке.

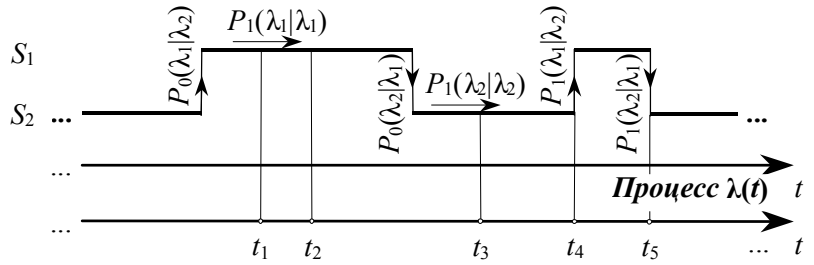

Рис. 1.6. Формирование MAP-потока событий

Лемма 1.10. Сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ для МАР-потока событий является марковским процессом.

Доказательство. Докажем, что длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i (временного интервала, на котором значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$) является случайной величиной с функцией распределения $F_i^{(i)}(t)=$ $=1-e^{-\lambda_i\left[P_1(\lambda_j|\lambda_i)+P_0(\lambda_j|\lambda_i)\right]t}$, $t\geq 0$, $i,j=1,2$, $i\neq j$.

Рассмотрим состояние S_1 процесса $\lambda(t)$. Поскольку в момент окончания первого состояния процесса $\lambda(t)$ переход из S_1 в S_2 возможен как с наступлением события потока, так и без наступления события, то некоторые возможные ситуации в поведении процесса $\lambda(t)$ представлены на рис. 1.7.

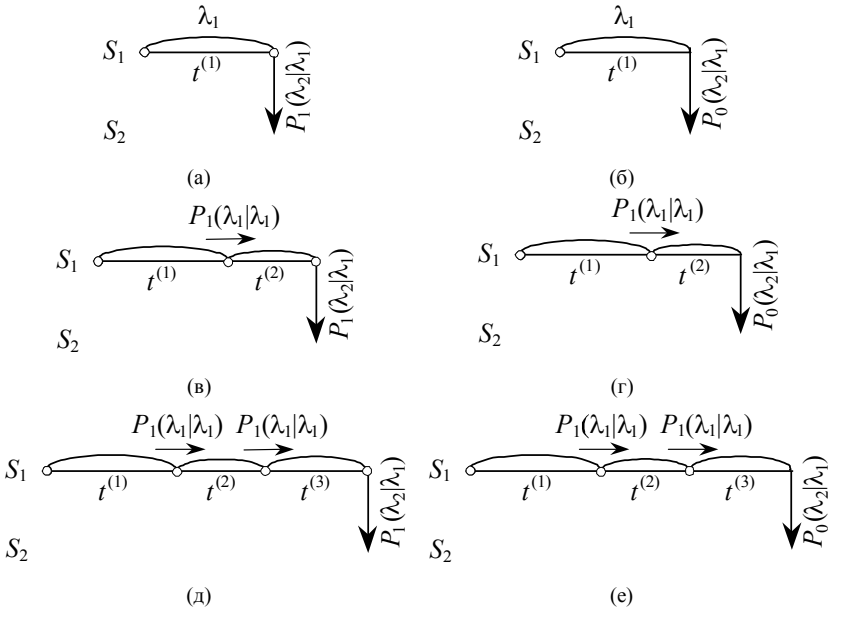

Рис. 1.7. Некоторые возможные ситуации в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$

Таким образом, участок стационарности случайной длительности в состоянии S_1 имеет длину $t^{(1)}$ (рис. 1.7 (а) – с наступлением события при переходе процесса $\lambda(t)$ из S_1 в S_2, рис. 1.7 (б) – без наступления события); $t^{(1)}+t^{(2)}$ (рис. 1.7 (в) – с наступлением события при переходе $\lambda(t)$ из S_1 в S_2, рис. 1.7 (г) – без наступления события); $t^{(1)}+t^{(2)}+t^{(3)}$ (рис. 1.7 (д) – с наступлением события при переходе $\lambda(t)$ из S_1 в S_2, рис. 1.7 (е) – без наступления события) и т. д. При этом каждый из интервалов $t^{(k)}$, $k=1,2,...,$ представляет собой реализацию случайной величины с функцией распределения $F_1(t)=1-e^{-\lambda_1 t}$, $t\geq 0$.

Обозначим $p=P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_1)+P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)$ – вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 в момент окончания состояния S_1; $(1-p)=P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)$ – вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в S_1 в момент окончания состояния S_1. Тогда, применив схему рандомизации [15] и проведя выкладки, аналогичные проделанным при доказательстве леммы 1.4, находим функцию распределения длительности участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 в виде $F_1^{(1)}(t)=1-e^{-\lambda_1\left[P_1(\lambda_2|\lambda_1)+P_0(\lambda_2|\lambda_1)\right]t}$, $t\geq 0$, в состоянии S_2 – $F_2^{(2)}(t)=1-e^{-\lambda_2\left[P_1(\lambda_1|\lambda_2)+P_0(\lambda_1|\lambda_2)\right]t}$, $t\geq 0$.

Таким образом, в силу экспоненциального распределения длительности участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i, $i=1,2$, поведение процесса $\lambda(t)$ после произвольного момента времени $\tilde{t}$ не зависит от предыстории, а зависит лишь от значения процесса $\lambda(t)$ в момент $\tilde{t}$. *Лемма доказана.*

Лемма 1.11. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, образуемая совокупностью моментов наступления событий $t_1,t_2,...,t_k,...$ в MAP-потоке, является вложенной цепью Маркова.

Доказательство. Отметим, что MAP-поток событий функционирует в стационарном режиме и является ординарным потоком, однако не обладает свойством отсутствия последствия. Отметим следующее:

1. В момент времени наступления события t_k, $k = 1, 2, ...$, значение процесса $\lambda(t_k) = \lambda_i$, то есть имеет место состояние S_i, $i = 1, 2$, процесса $\lambda(t)$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i является случайной величиной с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$. Значит, оставшаяся после момента t_k часть длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i не зависит от того, как долго процесс $\lambda(t)$ находился в том или другом состоянии до момента времени t_k.

2. Переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, после момента t_k происходит в момент времени окончания длительности участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i, распределенного по экспоненциальному закону (лемма 1.10), и не зависит от поведения потока до момента времени t_k, $k = 1, 2, ...$.

Таким образом, поведение потока после момента времени наступления события t_k определяется состоянием S_i, $i = 1, 2$, сопровождающего процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k и не зависит от предыстории, то есть от поведения потока до момента t_k. *Лемма доказана.*

Перейдём к определению инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$. Опишем возможные ситуации, которые могут произойти на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$. Полагая $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, находим:

1) за промежуток времени длительности Δt закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\lambda_i \Delta t}\right) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$,

наступит событие потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из i-го состояния в j-е, $i \neq j$, с вероятностью $P_1(\lambda_j \mid \lambda_i)$; вероятность описанной ситуации равна $\left(\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)\right) P_1\left(\lambda_j \mid \lambda_i\right) = \lambda_i P_1(\lambda_j \mid \lambda_i)\Delta t + o(\Delta t)$;

2) за промежуток времени длительности Δt закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\lambda_i \Delta t}\right) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, наступит событие потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из i-го состояния в i-е с вероятностью $P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)$; вероятность этой ситуации есть $(\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) P_1(\lambda_i \mid \lambda_i) = \lambda_i P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)\Delta t + o(\Delta t)$;

3) за промежуток времени длительности Δt закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\lambda_i \Delta t}\right) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, не наступит событие потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из i-го состояния в j-е, $i \neq j$, с вероятностью $P_0\left(\lambda_j \mid \lambda_i\right)$; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\left(\lambda_i \Delta t + o\left(\Delta t\right)\right) P_0\left(\lambda_j \mid \lambda_i\right) = \lambda_i P_0\left(\lambda_j \mid \lambda_i\right)\Delta t + o\left(\Delta t\right);$$

4) за промежуток времени длительности Δt не закончится i-е состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\lambda_i \Delta t} = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, и с вероятностью, равной единице, процесс $\lambda(t)$ останется в i-м состоянии; вероятность этой ситуации есть $1 - \lambda_i \Delta t + o\left(\Delta t\right)$.

Других возможных ситуаций нет. С учётом (1.1) рассмотрим следующие пределы:

1) $d_{ij}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\lambda_i P_1\left(\lambda_j \mid \lambda_i\right)\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i P_1\left(\lambda_j \mid \lambda_i\right)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, связанного с наступлением события потока;

2) $d_{ii}^{(1)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\lambda_i P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)$, $i = 1, 2$, – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в i-е

(остаться в i-м состоянии), связанного с наступлением события потока;

3) $d_{ij}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\lambda_i P_0(\lambda_j \mid \lambda_i)\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i P_0(\lambda_j \mid \lambda_i),\ i, j = 1,2,\ i \neq j,$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, не связанного с наступлением события потока;

4) $d_{ii}^{(0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -\lambda_i,\ i = 1,2,$ – интенсивность выхода процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния, взятая с противоположным знаком.

При этом справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{2} d_{ij}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{ij}^{(1)} = -\lambda_i + \lambda_i (P_0(\lambda_k \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_i \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_k \mid \lambda_i)) = 0,$$

где $k = \begin{cases} i+1, \text{ если } i = 1, \\ i-1, \text{ если } i = 2, \end{cases} \quad i = 1, 2.$

Матрицы инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D}_0 = \left\| d_{ij}^{(0)} \right\|$ и $\mathbf{D}_1 = \left\| d_{ij}^{(1)} \right\|$, $i, j = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ выпишутся в виде

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) & -\lambda_2 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \end{Vmatrix}.$$

Обозначим априорную вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1,2$, при условии, что функционирование MAP-потока (процесса $\lambda(t)$) началось в момент времени t^0, через $\pi_i(t \mid t^0)$.

Лемма 1.12. Априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для MAP-потока событий имеют вид

$$\begin{aligned}
\pi_1\left(t \mid t^0\right) &= \frac{\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]}{\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]+\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]} - \\
&- \left(\frac{\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]}{\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]+\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]} - \pi\right) e^{-d\left(t-t^0\right)}, \\
\pi_2\left(t \mid t^0\right) &= \frac{\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]}{\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]+\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]} + \\
&+ \left(\frac{\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]}{\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]+\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]} - \pi\right) e^{-d\left(t-t^0\right)}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

с начальными условиями в момент t^0 вида $\pi_1\left(t^0 \mid t^0\right)=\pi$, $\pi_2\left(t^0 \mid t^0\right)=1-\pi$; $d=\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]+\lambda_2[1-P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]$.

Доказательство. Найдём вероятность $\pi_i\left(t+\Delta t \mid t^0\right)$ того, что в момент времени $t+\Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i, то есть имеет место состояние S_i, $i=1,2$, случайного процесса $\lambda(t)$. Опишем возможные ситуации на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$, связанные с поведением процесса $\lambda(t)$:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$ с вероятностью $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt не закончится состояние S_i процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\lambda_i \Delta t}=1-\lambda_i \Delta t+o(\Delta t)$, и с вероятностью единица процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии S_i; вероятность этой ситуации есть

$$\pi_i\left(t \mid t^0\right)(1-\lambda_i \Delta t+o(\Delta t))=\pi_i\left(t \mid t^0\right)-\lambda_i \pi_i\left(t \mid t^0\right)\Delta t+o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$ с вероятностью $\pi_i\left(t\,|\,t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_i процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\lambda_i\Delta t}\right)=\lambda_i\Delta t+o(\Delta t)$, наступит событие потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_i в S_i с вероятностью $P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i)$; вероятность описанной ситуации равна

$$\pi_i\left(t\,|\,t^0\right)(\lambda_i\Delta t+o(\Delta t))P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i)=\lambda_i P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i)\pi_i\left(t\,|\,t^0\right)\Delta t+o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_j$ с вероятностью $\pi_j\left(t\,|\,t^0\right)$, $j=1,2$, $j\neq i$, и за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_j процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\lambda_j\Delta t}\right)=\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)$, наступит событие потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_j в S_i с вероятностью $P_1\left(\lambda_i\,|\,\lambda_j\right)$; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\pi_j\left(t\,|\,t^0\right)\left(\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)\right)P_1\left(\lambda_i\,|\,\lambda_j\right)=\lambda_j P_1\left(\lambda_i\,|\,\lambda_j\right)\pi_j\left(t\,|\,t^0\right)\Delta t+o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_j$ с вероятностью $\pi_j\left(t\,|\,t^0\right)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_j процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\lambda_j\Delta t}\right)=\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)$, не наступит событие потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_j в S_i с вероятностью $P_0\left(\lambda_i\,|\,\lambda_j\right)$; вероятность ситуации есть

$$\pi_j\left(t\,|\,t^0\right)\left(\lambda_j\Delta t+o(\Delta t)\right)P_0\left(\lambda_i\,|\,\lambda_j\right)=\lambda_j P_0\left(\lambda_i\,|\,\lambda_j\right)\pi_j\left(t\,|\,t^0\right)\Delta t+o(\Delta t).$$

Других возможностей не имеется.

Относительно вероятностей $\pi_i(t \mid t^0)$, $i = 1,2$, в момент времени $t + \Delta t$ имеем систему равенств:

$$\pi_1\left(t + \Delta t \mid t^0\right) = \pi_1\left(t \mid t^0\right) - \lambda_1 \pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t + \lambda_1 P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t +$$
$$+\lambda_2\left[P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_2\right) + P_0\left(\lambda_1 \mid \lambda_2\right)\right]\pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\pi_2\left(t + \Delta t \mid t^0\right) = \pi_2\left(t \mid t^0\right) - \lambda_2 \pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t + \lambda_2 P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\pi_2\left(t \mid t^0\right)\Delta t +$$
$$+\lambda_1\left[P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_1\right) + P_0\left(\lambda_2 \mid \lambda_1\right)\right]\pi_1\left(t \mid t^0\right)\Delta t + o(\Delta t).$$

В результате несложных преобразований находим

$$\pi_1\left(t + \Delta t \mid t^0\right) - \pi_1\left(t \mid t^0\right) =$$
$$= \left(-\lambda_1\left[1 - P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]\pi_1\left(t \mid t^0\right) + \lambda_2\left[1 - P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]\pi_2\left(t \mid t^0\right)\right)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\pi_2\left(t + \Delta t \mid t^0\right) - \pi_2\left(t \mid t^0\right) =$$
$$= \left(-\lambda_2\left[1 - P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right]\pi_2\left(t \mid t^0\right) + \lambda_1\left[1 - P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right]\pi_1\left(t \mid t^0\right)\right)\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив оба соотношения на Δt и выполнив в них предельный переход при $\Delta t \to 0$, получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно вероятностей $\pi_i(t \mid t^0)$, $i = 1,2$:

$$\pi_1'\left(t \mid t^0\right) = -\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)]\pi_1\left(t \mid t^0\right) + \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]\pi_2\left(t \mid t^0\right),$$
$$\pi_2'\left(t \mid t^0\right) = \lambda_1[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)]\pi_1\left(t \mid t^0\right) - \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]\pi_2\left(t \mid t^0\right),$$
$$\pi_1\left(t \mid t^0\right) + \pi_2\left(t \mid t^0\right) = 1,$$

интегрируя которую, с учётом начальных условий, приходим к (1.10). *Лемма доказана*.

Следствие леммы 1.12. Для MAP-потока событий априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ при $t \to \infty$ (или $t^0 \to -\infty$) имеют вид

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]}{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)] + \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]},$$
$$\pi_2 = \frac{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)]}{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)] + \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]}. \quad (1.11)$$

Замечание 1.4. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ для MAP-потока не совпадает с его интенсивностью, так как в состоянии S_1 значение интенсивности потока есть $\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)]$, в состоянии S_2, соответственно, $\lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]$. Тогда средняя интенсивность MAP-потока равна

$$\Lambda = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)]\pi_1 + \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]\pi_2.$$

Замечание 1.5. При задании вероятностей $P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$, $P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = p$, $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 1 - p$, $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = q$, $P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 1 - q$ MAP-поток событий вырождается в синхронный поток.

Глава 2
Оптимальное оценивание состояний дважды стохастических потоков событий при полной наблюдаемости потоков

Во второй главе решается задача оптимального оценивания состояний дважды стохастических потоков различных типов, представленных в параграфах 1.2 – 1.5, при полной наблюдаемости потоков, то есть оптимальное оценивание состояний потока осуществляется в условиях, когда все события (моменты их наступления) доступны наблюдению.

Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ изучаемых потоков является принципиально ненаблюдаемым (скрытым) марковским процессом. Задача заключается в оценке состояний процесса $\lambda(t)$ (потока) по наблюдениям за моментами наступления событий на интервале наблюдения. В качестве решающего правила при оценке состояний потока используется критерий максимума апостериорной вероятности, представляющей собой наиболее полную характеристику состояний потока, которую можно получить, располагая лишь выборкой наблюдений; критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения [18].

2.1. Рекуррентные соотношения для апостериорных вероятностей состояний

В данном параграфе применяется методика [18] получения рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей состояний дважды стохастических потоков, сопровождающий случайный процесс которых $\lambda(t)$ представляет собой кусочно-постоянный скрытый марковский случайный процесс.

Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t=0$; время t меняется дискретно с шагом Δt: $t^{(l)}=l\Delta t$, $l=0,1,\ldots$. Введём двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$, где $\lambda^{(l)}=\lambda(l\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)}=l\Delta t$ ($\lambda^{(l)}=\lambda_i$, $i=1,2$); $r_l=r_l(\Delta t)=r(l\Delta t)-r((l-1)\Delta t)$ – число событий потока, наступивших на интервале времени $((l-1)\Delta t,\, l\Delta t)$ длительности Δt, $r_l=0,1,\ldots$. Поскольку на интервале $(-\Delta t,0)$ наблюдение за потоком не производится, то r_0 можем положить произвольным, например, $r_0=0$.

Обозначим $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}=\left(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(m)}\right)$ – последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(l\Delta t)$ в момент времени $l\Delta t$, $l=\overline{0,m}$ ($\lambda^{(0)}=\lambda(0)=\lambda_i$, $i=1,2$); $\mathbf{r}_m=(r_0,r_1,\ldots,r_m)$ – последовательность значений количества событий, которые пронаблюдались за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((l-1)\Delta t,\, l\Delta t)$ длительности Δt, $l=\overline{0,m}$. В силу конструкции процесса $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$ компонента $\lambda^{(l)}$ (значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)}=l\Delta t$) не влияет на компоненту r_l – число событий на интервале $((l-1)\Delta t,\, l\Delta t)$: $\lambda^{(l)}$ – в будущем, а r_l по отношению к $\lambda^{(l)}$ – в прошлом (рис. 2.1).

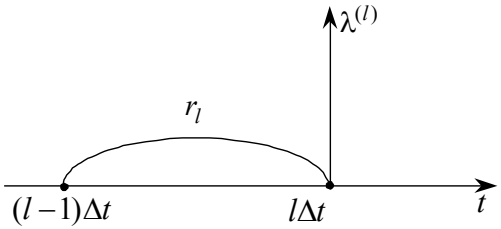

Рис. 2.1. Конструкция процесса $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$

Компонента r_l (в зависимости от типа дважды стохастического потока событий) может как влиять, так и не влиять на $\lambda^{(l)}$. Пусть $\lambda^{(l)}$, r_l – марковские компоненты процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$, то есть процесс $(\lambda^{(l)}, r_l)$ – марковский.

Введём $p(\lambda^{(l)}, r_l \mid \lambda^{(l-1)}, r_{l-1})$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(l-1)}, r_{l-1})$ в состояние $(\lambda^{(l)}, r_l)$; $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ – совместная вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(m)})$, $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, ..., r_m)$; $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)} \mid \mathbf{r}_m)$ – условная вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$; $w(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m)$ – условная вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$; $w(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1})$ – условная вероятность значения $\lambda^{(m+1)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_{m+1}$.

Тогда в сделанных предпосылках для введённых вероятностей $w(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m)$, $w(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1})$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Для дважды стохастических потоков событий с двумя состояниями справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей:

$$w(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m)}. \quad (2.1)$$

Доказательство. В силу того, что $(\lambda^{(l)}, r_l)$ – марковский случайный процесс, совместная веростность $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ представляется в виде [18]:

$$w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m\right) = w(\lambda^{(0)}, r_0)\prod_{l=1}^{m} p\left(\lambda^{(l)}, r_l \mid \lambda^{(l-1)}, r_{l-1}\right). \qquad (2.2)$$

Аналогично для интервала наблюдения $(0, (m+1)\Delta t)$ запишем

$$w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}\right) = w(\lambda^{(0)}, r_0)\prod_{l=1}^{m+1} p\left(\lambda^{(l)}, r_l \mid \lambda^{(l-1)}, r_{l-1}\right).$$

С учётом (2.2) последнее равенство выпишется в виде

$$w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}\right) = w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right). \qquad (2.3)$$

Принимая во внимание формулу для условной вероятности, перепишем (2.3) в виде

$$w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) = \frac{w\left(\mathbf{r}_m\right)}{w\left(\mathbf{r}_{m+1}\right)} w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right).$$

В последнем равенстве произведём суммирование по всем значениям $\lambda^{(l)}$, $l = \overline{0, m}$, последовательностей $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}$:

$$\sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \ldots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) =$$

$$= \frac{w\left(\mathbf{r}_m\right)}{w\left(\mathbf{r}_{m+1}\right)} \sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \ldots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right).$$

Тогда учитывая, что

$$\sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \ldots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) = w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right),$$

$$\sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \ldots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) =$$

$$= \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\boldsymbol{\lambda}^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right),$$

находим

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) = \frac{w\left(\mathbf{r}_m\right)}{w\left(\mathbf{r}_{m+1}\right)} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right). \quad (2.4)$$

С учётом условия нормировки $\sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) = 1$ выражение (2.4) принимает вид

$$\frac{w\left(\mathbf{r}_m\right)}{w\left(\mathbf{r}_{m+1}\right)} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) = 1.$$

Определив из последнего уравнения коэффициент $w(\mathbf{r}_m)/w(\mathbf{r}_{m+1})$ в виде

$$\frac{w\left(\mathbf{r}_m\right)}{w\left(\mathbf{r}_{m+1}\right)} = \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \right\}^{-1}$$

и подставив $w(\mathbf{r}_m)/w(\mathbf{r}_{m+1})$ в (2.4), приходим к (2.1). *Теорема доказана.*

Следствие теоремы 2.1. В связи с тем, что $p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) = p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)\, p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$, рекуррентное соотношение (2.1) принимает вид

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) =$$

$$= \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) \right\}^{-1}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим вероятность $w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) = w\left(\lambda^{(m)} \mid r_0(\Delta t), r_1(\Delta t), ..., r_m(\Delta t)\right)$. Компонента $r_l = r(l\Delta t) - r\left((l-1)\Delta t\right)$ вектора $\mathbf{r}_m$ зависит от текущего времени $t^{(l)} = l\Delta t$, $l = \overline{0, m}$; при этом $t^{(m)} = m\Delta t = t$ – момент окончания наблюдений. Значит, $\Delta t = \dfrac{t^{(l)}}{l} = \dfrac{t}{m}$, откуда находим $t^{(l)} = \dfrac{l}{m} t$. Тогда $\mathbf{r}_m = \left(r_0\left(t^{(0)}\right), r_1\left(t^{(1)}\right), ..., r_m\left(t^{(m)}\right)\right) = \left(r_0\left(t=0\right), r_1\left(\dfrac{t}{m}\right), r_2\left(2\dfrac{t}{m}\right), ..., r_m\left(t\right)\right) = \mathbf{r}_m(t)$, то есть вектор наблюдений $\mathbf{r}_m$ является функцией времени t.

В этой связи можно записать $w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m\right) = w\left(\lambda^{(m)} \mid \mathbf{r}_m(t)\right) = w(\lambda^{(m)} \mid t)$. Аналогично для апостериорной вероятности $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right)$ имеет место равенство $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}\right) = w\left(\lambda^{(m+1)} \mid \mathbf{r}_{m+1}(t+\Delta t)\right) = w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)$.

С учётом вышеизложенного рекуррентное соотношение (2.5) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)} \mid t)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)$ запишется в виде

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right) = \tag{2.6}$$

$$= \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) \right\}^{-1}.$$

Замечание 2.1. Компонента r_l вектора наблюдений $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, ..., r_m)$ может принимать значения $r_l = 0$ или $r_l = 1$.

Случаи $r_l = 2, 3, \ldots$ в силу определения различных типов дважды стохастических потоков имеют вероятность $o(\Delta t)$.

2.2. Оптимальная оценка состояний асинхронного потока

Исследуется асинхронный поток событий, математическое описание которого приведено в параграфе 1.2. Наблюдения за потоком производятся на интервале времени (t_0, t). Требуется по наблюдениям $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ оценить состояние сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (асинхронного потока) в момент окончания наблюдений.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1, ..., t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i \mid t_1, ..., t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество событий потока, наступивших за время t); при этом $w(\lambda_1 \mid t) + w(\lambda_2 \mid t) = 1$.

Решение о состоянии принципиально ненаблюдаемого (скрытого) марковского процесса $\lambda(t)$ выносится по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей: если $w(\lambda_i \mid t) \geq w(\lambda_j \mid t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; если $w(\lambda_i \mid t) < w(\lambda_j \mid t)$, то оценка состояния есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$.

2.2.1. Дифференциальное уравнение для апостериорных вероятностей

Лемма 2.1. Случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ для асинхронного потока событий является марковским процессом.

Доказательство. Первая компонента $\lambda^{(l)}$ процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковской, так как процесс $\lambda(t)$ для асинхронного потока является марковским (лемма 1.1). Вторая компонента r_l процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ также марковская, так как для асинхронного потока событий в состоянии S_1 сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток с параметром λ_1, в состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ – пуассоновский поток с параметром λ_2. Компонента r_l – число событий на интервале $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ – не влияет на компоненту $\lambda^{(l)}$, так как смена состояний процесса $\lambda(t)$ происходит в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий асинхронного потока (процесс $\lambda(t)$ «живёт своей жизнью»). Компонента $\lambda^{(l)}$ не влияет на компоненту r_l в силу конструкции процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$. *Лемма доказана.*

Рассмотрим переходную вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) =$ $= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)\, p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ в формуле (2.6).

Утверждение 2.1. Условная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)$ для асинхронного потока событий принимает вид $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) = p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$.

Действительно, поскольку случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским, то на значение компоненты $\lambda^{(l)}$ в момент времени $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$ влияет только значение $\lambda^{(l)}$ в момент времени $t = m\Delta t$; компонента r_m не влияет на компоненту $\lambda^{(m+1)}$ в силу леммы 2.1. *Утверждение доказано.*

Утверждение 2.2. Условная вероятность $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ для асинхронного потока событий принимает вид $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)$.

Действительно, количество событий r_{m+1} на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ не зависит от числа событий r_m на интервале $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, поскольку в состоянии S_i, $i = 1,2$, сопровождающего процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток с параметром λ_i. Компонента $\lambda^{(m+1)}$ не влияет на компоненту r_{m+1} в силу конструкции процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$: $\lambda^{(m+1)}$ – в будущем, r_{m+1} – в прошлом (рис. 2.1). *Утверждение доказано*.

Принимая во внимание утверждения 2.1 и 2.2, запишем формулу (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$ состояний асинхронного потока событий в виде

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)}. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 0$ в (2.7), то есть на интервале $(t, t+\Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, нет событий асинхронного потока. Этот случай описывает поведение апостериорной вероятности на интервале времени между моментами t_k и t_{k+1}, $k = 1,2,\ldots$, наступления соседних событий потока и на интервале (t_0, t_1), где t_0 – момент начала наблюдения за потоком. Для определённости в (2.7) положим $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. Тогда рекуррентное соотношение (2.7) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$,

$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)$ состояний асинхронного потока событий примет вид

$$w\left(\lambda_1 \mid t+\Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}\right)}, \quad (2.8)$$

$w(\lambda_2 \mid t+\Delta t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t+\Delta t)$.

Лемма 2.2. На временных интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots$, между моментами наступления соседних событий асинхронного потока апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t) - (\lambda_1 - \lambda_2) w^2(\lambda_1 \mid t) = \alpha_2. \quad (2.9)$$

Доказательство. Рассмотрим все вероятности, входящие в формулу (2.8).

С учётом определения асинхронного потока событий (параграф 1.2) вероятности перехода на интервале $(t, t+\Delta t)$ сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1, 2$, запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) = e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t), \\
&p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right) = e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t), \\
&p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) = 1 - e^{-\alpha_1 \Delta t} = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t), \\
&p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right) = 1 - e^{-\alpha_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Отметим, что ситуация «остаться в состоянии S_i» рассматривается как переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_i, $i=1,2$.

В силу того, что в состоянии S_i, $i=1,2$, сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_i, условные вероятности $p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_i\right)$, $i=1,2$, того, что за промежуток времени длительности Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i при условии, что в момент времени t имеет место состояние S_i, $i=1,2$, выпишутся в виде

$$p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=e^{-\lambda_1\Delta t}=1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t),$$
$$p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=e^{-\lambda_2\Delta t}=1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t).$$

После подстановки рассмотренных вероятностей в формулу (2.8) и выполнения несложных преобразований числитель A и знаменатель B примут вид

$$\begin{aligned}
A &= w(\lambda_1 \mid t)\, p(\lambda_1 \mid \lambda_1)\, p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda_1\right)+ \\
&+w(\lambda_2 \mid t)\, p(\lambda_1 \mid \lambda_2)\, p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda_2\right)= \\
&= w(\lambda_1 \mid t)-\left[(\lambda_1+\alpha_1)w(\lambda_1 \mid t)-\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t+o(\Delta t), \\
B &= w(\lambda_1 \mid t)\, p(\lambda_1 \mid \lambda_1)\, p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda_1\right)+ \\
&+w(\lambda_1 \mid t)\, p(\lambda_2 \mid \lambda_1)\, p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda_1\right)+ \\
&+w(\lambda_2 \mid t)\, p(\lambda_1 \mid \lambda_2)\, p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda_2\right)+ \\
&+w(\lambda_2 \mid t)\, p(\lambda_2 \mid \lambda_2)\, p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda_2\right)= \\
&=1-\left[\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)+\lambda_2 w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t+o(\Delta t),
\end{aligned} \qquad (2.11)$$

где $w(\lambda_i \mid t)=w(\lambda^{(m)}=\lambda_i \mid t)$, $i=1,2$.

Подставляя (2.11) в (2.8) и принимая во внимание, что $B^{-1} = 1 + [\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 w(\lambda_2 \mid t)]\Delta t + o(\Delta t)$, находим (с точностью до членов $o(\Delta t)$) (2.8) в виде

$$w(\lambda_1 \mid t + \Delta t) - w(\lambda_1 \mid t) =$$
$$= \left[\lambda_1 w^2(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 w(\lambda_1 \mid t) w(\lambda_2 \mid t) - (\lambda_1 + \alpha_1) w(\lambda_1 \mid t) + \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\right] \times$$
$$\times \Delta t + o(\Delta t).$$

Выполняя в последнем равенстве необходимые преобразования, с учётом того, что $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$, разделив обе части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение (2.9). *Лемма доказана*.

2.2.2. Явный вид апостериорных вероятностей и формула пересчёта

Явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ ($w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$), принимающей в момент времени $t = t_0$ начала наблюдения за потоком и в моменты времени $t = t_k$, $k = 1, 2, \ldots$, наступления событий потока значение $w(\lambda_1 \mid t) = w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, устанавливает следующая лемма.

Лемма 2.3. Для асинхронного потока событий поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ как функции времени на интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots$, определяется выражением

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w_1[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k)] - w_2[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k)]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k)}}{[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k)] - [w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k)]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (2.12)$$

$$w_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$w_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

где $a = \lambda_1 - \lambda_2$, $0 < w_1 < 1$, $w_2 > 1$; $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$.

Доказательство. В силу того, что коэффициенты уравнения Риккати (2.9) постоянны, оно интегрируется в квадратурах.

Проинтегрируем уравнение (2.9) методом разделения переменных, предварительно введя обозначение: $a = \lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $b = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2)$, $c = \alpha_2$.

Разделяя в (2.9) переменные и выполняя интегрирование, с учётом начального условия $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k)$ приходим к недифференциальному уравнению

$$\int\limits_{w(\lambda_1 \mid t_k)}^{w(\lambda_1 \mid t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c} = \int\limits_{t_k}^{t} dt. \qquad (2.13)$$

С целью вычисления интеграла от рациональной функции в левой части (2.13) преобразуем знаменатель

$$aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c = a[w(\lambda_1 \mid t) - w_1][w(\lambda_1 \mid t) - w_2],$$

где w_1 и w_2 – корни уравнения $f(w(\lambda_1 \mid t)) = 0$, $f\left(w(\lambda_1 \mid t)\right) = aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c$:

$$w_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) \mp \sqrt{D}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$D = (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2.$$

Отметим, что $D > 0$, значит корни w_1 и w_2 действительные и различные; $w_1 < w_2$. Очевидно, что $w_2 > 1$. Имеем: $f(0) = c = \alpha_2 > 0$, $f(1) = a + b + c = \lambda_1 - \lambda_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) + \alpha_2 = -\alpha_1 < 0$. Следовательно, $0 < w_1 < 1$.

Принимая во внимание вышеизложенное, перепишем (2.13):

$$\int\limits_{w(\lambda_1|t_k)}^{w(\lambda_1|t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{a[w(\lambda_1 \mid t)-w_1][w(\lambda_1 \mid t)-w_2]} = \int\limits_{t_k}^{t} dt$$

или

$$\frac{1}{a(w_2-w_1)} \ln \left| \frac{[w(\lambda_1 \mid t)-w_1]}{[w(\lambda_1 \mid t)-w_2]} \right|_{w(\lambda_1|t_k)}^{w(\lambda_1|t)} = -(t-t_k).$$

Выполняя в последнем равенстве необходимые преобразования, находим функцию $w(\lambda_1 \mid t)$ в явном виде (2.12). *Лемма доказана.*

Перейдем к определению $w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 1,2,\ldots$. Для того чтобы найти значение $w(\lambda_1 \mid t)$ ($w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$) в произвольный момент времени t, согласно лемме 2.3, необходимо знать $w(\lambda_1 \mid t_k)$ – значение апостериорной вероятности в момент времени t_k, $k = 1,2,\ldots$, наступления события потока и $w(\lambda_1 \mid t_0)$ – значение вероятности в момент t_0 начала наблюдения за потоком; при этом $w(\lambda_2 \mid t_k) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 0,1,\ldots$.

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 1$ в (2.7), то есть на интервале $(t, t+\Delta t)$ наступает событие потока, допустим, в момент времени t_k. По-прежнему будем считать в (2.7) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

Тогда рекуррентное соотношение (2.7) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$ состояний асинхронного потока запишется в виде

$$w\left(\lambda_1 \mid t + \Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}\right)}, \quad (2.14)$$

$w(\lambda_2 \mid t + \Delta t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t + \Delta t)$.

Лемма 2.4. В момент времени t_k наступления события в асинхронном потоке апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ определяется формулой пересчёта

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)},\ k = 1,2,..., \qquad (2.15)$$

$w(\lambda_2 \mid t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$.

Доказательство. Момент времени t_k наступления события потока разбивает интервал $(t, t+\Delta t)$ на два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t+\Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$ соответственно (рис. 2.2).

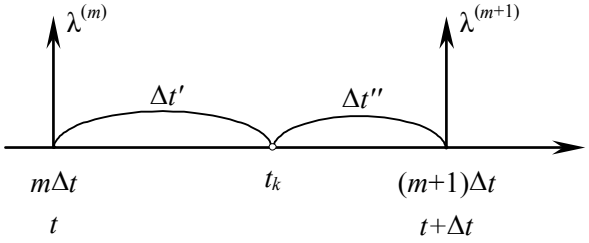

Рис. 2.2. Разбиение временного интервала

С учётом введённых обозначений (2.14) примет вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + \Delta t'') =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}\right)}. \qquad (2.16)$$

Вероятности $p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_j \mid \lambda^{(m)}=\lambda_i\right)$, $i,j=1,2$, определены в (2.10). Поскольку в состоянии S_i, $i=1,2$, сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток с параметром λ_i, то справедливы равенства

$$p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=\lambda_1\Delta t e^{-\lambda_1\Delta t}=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t),$$
$$p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=\lambda_2\Delta t e^{-\lambda_2\Delta t}=\lambda_2\Delta t+o(\Delta t).$$

Принимая во внимание последние равенства, вероятности (2.10) и переобозначение $w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i \mid \ t_k-\Delta t'\right)=w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')$, $i=1,2$, представим числитель A_1 и знаменатель B_1 выражения (2.16) в виде

$$\begin{aligned}
A_1 &= w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)p(\lambda_1 \mid \lambda_1)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_1)+\\
&+w\left(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t'\right)p(\lambda_1 \mid \lambda_2)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_2)=\\
&=\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)\Delta t+o(\Delta t),\\
B_1 &= w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)p(\lambda_1 \mid \lambda_1)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_1)+\\
&+w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)p(\lambda_2 \mid \lambda_1)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_1)+\\
&+w\left(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t'\right)p(\lambda_1 \mid \lambda_2)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_2)+\\
&+w\left(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t'\right)p(\lambda_2 \mid \lambda_2)p(r_{m+1}=1 \mid \lambda_2)=\\
&=\left[\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)+\lambda_2 w\left(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t'\right)\right]\Delta t+o(\Delta t).
\end{aligned} \qquad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.16), учитывая, что $w(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t')=$ $=1-w(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t')$ и осуществляя в (2.16) предельный переход при $\Delta t\to 0$ (при этом одновременно $\Delta t'\to 0$ и $\Delta t''\to 0$), приходим к (2.15). *Лемма доказана.*

Замечание 2.2. В точке t_k, $k=1,2,...$ (момент времени наступления события асинхронного потока), апостериорная вероятность $w(\lambda_i \mid t)$, $i=1,2$, i-го состояния сопровождающего случайного

процесса $\lambda(t)$ терпит разрыв первого рода, то есть имеет место конечный скачок.

Полученные для функции $w(\lambda_1 \mid t)$ формулы (2.12) и (2.15) определяют поведение апостериорной вероятности на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, между моментами наступления соседних событий потока, а также на интервале (t_0, t_1), где t_0 – момент начала наблюдения за потоком. Без ограничения общности положим $t_0 = 0$. В момент времени $t_0 = 0$ в качестве начального значения вероятности $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0)$ выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$, определённая в (1.4).

Леммы 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на оси времени для асинхронного потока событий определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (2.18)$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= \left\{ w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1})} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1})} \right\}^{-1}, \quad (2.19)$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

$$w_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$w_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

где $a = \lambda_1 - \lambda_2$, $0 < w_1 < 1$, $w_2 > 1$; $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 0,1,...$.

Доказательство осуществляется объединением формул (1.4), (2.12) и (2.15).

2.2.3. Алгоритм принятия решения о состоянии потока

Формулы (1.4), (2.15), (2.18), (2.19) позволяют сформулировать алгоритм расчёта апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t, то есть алгоритм оптимального оценивания состояний асинхронного потока:

1) в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения задаётся априорная финальная вероятность π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$, вычисленная по формуле (1.4), – $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1$;

2) в любой момент времени t, $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, по формуле (2.18) для $k = 0$ вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$;

3) по формуле (2.19) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_1, то есть $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле (2.15) для $k = 1$ производится пересчёт апостериорной вероятности в момент времени $t = t_1$, при этом $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ является начальным условием для $w(\lambda_1 \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

5) в любой момент времени t, $t_1 < t < t_2$, где t_2 – момент наступления второго события потока, по формуле (2.18) для $k = 1$ вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ и т. д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ (асинхронного потока событий) по критерию максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_1 \mid t) \geq w(\lambda_2 \mid t)$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

2.3. Оптимальное оценивание состояний синхронного потока

Рассматривается синхронный поток событий, математическая модель которого приведена в параграфе 1.3. Условия наблюдения за потоком на временном интервале (t_0, t), t_0 – момент начала наблюдения, t – момент вынесения решения о состоянии потока, и механизм оптимального оценивания идентичны рассмотренным в параграфе 2.2 для асинхронного потока событий.

2.3.1. Вывод дифференциального уравнения Бернулли

Для реализации алгоритма оптимального оценивания состояний сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (синхронного потока событий) необходимо знать явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_i \mid t)$, $i = 1, 2$.

Лемма 2.5. Случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ для синхронного потока событий является марковским процессом.

Доказательство. В лемме 1.4 доказано, что для синхронного потока событий сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ является марковским, значит, компонента $\lambda^{(l)}$ случайного процесса

$\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковской. Вторая компонента процесса r_l также марковская, поскольку события в синхронном потоке наступают только в моменты перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1, 2$. Этот переход происходит внутри интервала $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ и определяется моментом окончания состояния, который, в свою очередь, не зависит от предыстории, так как длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-p\lambda_1 t}$, $t \geq 0$, длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 – случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_2^{(2)}(t) = 1 - e^{-q\lambda_2 t}$, $t \geq 0$. Следовательно, компонента r_l не зависит от предыстории. Компонента $\lambda^{(l)}$ не влияет на компоненту r_l в силу конструкции процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ (рис. 2.1). Компонента r_l влияет на $\lambda^{(l)}$, так как с наступлением (ненаступлением) события связана смена (несмена) состояния процесса $\lambda(t)$.

Таким образом, двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским процессом. *Лемма доказана*.

Рассмотрим переходную вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \times$ $\times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ в рекуррентном соотношении (2.6) для вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$.

Утверждение 2.3. Для синхронного потока событий переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ принимает вид

$$p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) =$$
$$= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right).$$

Доказательство. В силу того, что процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским (лемма 2.5), на значение компоненты $\lambda^{(m+1)}$ в момент времени $t+\Delta t=(m+1)\Delta t$ влияет только значение $\lambda^{(m)}$ в момент времени $t=m\Delta t$; компонента r_m не влияет на $\lambda^{(m+1)}$. Следовательно, $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$. Поскольку компонента r_l процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ обладает марковским свойством, то значение $r_{m+1}(\Delta t)$ числа событий, наступивших на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, не зависит от значения $r_m(\Delta t)$ числа событий на интервале $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, так как в любом состоянии S_i процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток с параметром λ_i, $i=1,2$. Если момент окончания состояния процесса $\lambda(t)$ принадлежит интервалу $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, то $r_{m+1}=1$; если нет, то $r_{m+1}=0$. Таким образом, имеет место равенство $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)=$ $= p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)$. *Утверждение доказано.*

С учётом утверждения 2.3 рекуррентное соотношение (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)$ состояний синхронного потока событий запишется в виде

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)=$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)}. \quad (2.20)$$

Пусть в (2.20) $r_{m+1}=0$, то есть на интервале $(t, t+\Delta t)$, где $t=m\Delta t$, $t+\Delta t=(m+1)\Delta t$, события синхронного потока отсут-

ствуют. Данный случай описывает поведение апостериорной вероятности на интервале времени между моментами наступления соседних событий потока t_k и t_{k+1}, $k=1,2,\ldots$, и на интервале (t_0,t_1), где t_0 – момент начала наблюдения за потоком. В (2.20) для определённости положим $\lambda^{(m+1)}=\lambda_1$. Тогда (2.20) примет вид

$$w(\lambda_1 \mid t+\Delta t)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)}, \quad (2.21)$$

$w(\lambda_2 \mid t+\Delta t)=1-w(\lambda_1 \mid t+\Delta t)$.

Лемма 2.6. В синхронном потоке в течение времени между моментами наступления соседних событий t_k и t_{k+1}, $k=1,2,\ldots$, и на интервале (t_0,t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Бернулли

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt}+(\lambda_1-\lambda_2)w(\lambda_1 \mid t)-(\lambda_1-\lambda_2)w^2(\lambda_1 \mid t)=0. \quad (2.22)$$

Доказательство. Рассмотрим одну из переходных вероятностей, например, $p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)$, в формуле (2.21). Совместная вероятность события $\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)$ – процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_1, на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ не наступает событие пуассоновского потока, и в момент времени $t+\Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_1 – представляется в виде

$$p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right) p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right),$$

откуда следует, что

$$p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\frac{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}.$$

Вместе с тем справедливо равенство

$$p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\frac{p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)},$$

из которого находим

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$
$$=p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)$$

– совместная условная вероятность того, что на интервале времени $(t, t+\Delta t)$ не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 и сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ останется в первом состоянии с вероятностью единица; совместная вероятность описанной ситуации равна $e^{-\lambda_1 \Delta t}=1-\lambda_1 \Delta t+o(\Delta t)$.

Рассмотрим ещё одну переходную вероятность в формуле (2.21), принимающую с использованием описанной выше методики вид

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$
$$=p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)$$

– совместная условная вероятность того, что на интервале времени $(t, t+\Delta t)$ не наступит событие пуассоновского потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния во второе; вероятность рассмотренной ситуации, с учётом определения синхронного потока – переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j=1,2$, возможен только в момент наступления события, равна нулю.

Аналогично выписываются две оставшиеся переходные вероятности:

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$= p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=0,$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$

$$= p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=e^{-\lambda_2 \Delta t}=1-\lambda_2 \Delta t+o(\Delta t).$$

Итак, с учётом явного вида выписанных переходных вероятностей процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ и переобозначения $w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i \mid t\right)=w(\lambda_i \mid t)$, $i=1,2$, числитель A и знаменатель B в (2.21) принимают вид

$$A=w(\lambda_1 \mid t)(1-\lambda_1 \Delta t+o(\Delta t))=w(\lambda_1 \mid t)-\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t+o(\Delta t),$$

$$B=w(\lambda_1 \mid t)(1-\lambda_1 \Delta t+o(\Delta t))+w(\lambda_2 \mid t)(1-\lambda_2 \Delta t+o(\Delta t))= \qquad (2.23)$$

$$=1-[\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)+\lambda_2 w(\lambda_2 \mid t)]\Delta t+o(\Delta t).$$

Подставляя (2.23) в (2.21) и принимая во внимание, что $B^{-1}=1+[\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)+\lambda_2 w(\lambda_2 \mid t)]\Delta t+o(\Delta t)$, находим (2.21) в виде

$$w(\lambda_1 \mid t+\Delta t)-w(\lambda_1 \mid t)=$$

$$=\left[\lambda_1 w^2\left(\lambda_1 \mid t\right)-\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t\right)+\lambda_2 w\left(\lambda_1 \mid t\right)w\left(\lambda_2 \mid t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t).$$

Выполняя в последнем равенстве необходимые преобразования, с учётом условия $w(\lambda_2 \mid t)=1-w(\lambda_1 \mid t)$, разделив левую и правую части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение (2.22). *Лемма доказана*.

2.3.2. Поведение апостериорной вероятности на временной оси

Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ $(w(\lambda_2 \mid t)=1-w(\lambda_1 \mid t))$, имеющая значение $w(\lambda_1 \mid t_k)$ $(w(\lambda_2 \mid t_k)=1-w(\lambda_1 \mid t_k))$, $k=0,1,\ldots$,

в момент времени t_0 начала наблюдения за потоком и в моменты времени $t = t_k$, $k = 1,2,...$, наступления событий потока, в произвольный момент времени t определяется следующей леммой.

Лемма 2.7. На интервалах между моментами t_k и t_{k+1}, $k = 1,2,...$, и на интервале (t_0, t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ как функция времени задаётся выражением

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w(\lambda_1 \mid t_k) e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_k) + w(\lambda_1 \mid t_k) e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}, \qquad (2.24)$$

$t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,...$.

Доказательство. Уравнение Бернулли (2.22) имеет постоянные коэффициенты. Разделяем в (2.22) переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t)\left[w(\lambda_1 \mid t) - 1\right]} = \int dt + \ln\left|C_1\right|,$$

$$-\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left|\frac{w(\lambda_1 \mid t)}{w(\lambda_1 \mid t) - 1}\right| = t + \ln\left|C_1\right|,\ C_1 \neq 0,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Потенцируя последнее уравнение и выполняя необходимые преобразования, находим функцию $w(\lambda_1 \mid t)$ в виде

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{1}{Ce^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} - 1} + 1, \qquad (2.25)$$

где C – произвольная постоянная.

Для нахождения значения произвольной постоянной C в (2.25) воспользуемся начальным условием, согласно которому $w(\lambda_1 \mid t) = w(\lambda_1 \mid t_k)$ при $t = t_k$. Определив значение C в виде

$$C = \frac{w(\lambda_1 \mid t_k)}{w(\lambda_1 \mid t_k) - 1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t_k}$$

и подставив вычисленную постоянную C в (2.25), получим функцию $w(\lambda_1 \mid t)$, заданную в явном виде (2.24). *Лемма доказана.*

Применение формулы (2.24) для определения поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на интервале наблюдения (t_0, t) требует знания значения $w(\lambda_1 \mid t)$ при $t = t_k$, то есть $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 0,1,\ldots$. Перейдем к нахождению $w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 1,2,\ldots$.

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 1$ в (2.20), что соответствует наступлению события синхронного потока на интервале $(t, t + \Delta t)$, предположим, в момент времени t_k. Будем считать, что в (2.20) значение $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

Лемма 2.8. В момент времени t_k наблюдения события в синхронном потоке для апостериорной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$ имеет место формула пересчёта

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + [(1-p)\lambda_1 - q\lambda_2]w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \; k = 1,2,\ldots, \quad (2.26)$$

$w(\lambda_2 \mid t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$.

Доказательство. Рассмотрим два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$ соответственно (рис. 2.2). Тогда, с учётом сделанных обозначений, рекуррентное соотношение (2.20) примет вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + \Delta t'') = \quad (2.27)$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)}.$$

Исследуем одну из вероятностей, например, $p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \;\; \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)$ в формуле

(2.27). Совместная вероятность события $\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=1,\right.$ $\left.\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)$ – процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_1, и на интервале $(t,t+\Delta t)$ наступает событие пуассоновского потока с параметром λ_1, и в момент времени $t+\Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_1 – представляется в виде

$$p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right) p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right),$$

откуда следует, что

$$p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\frac{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}$$

или

$$p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\frac{p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)}.$$

Из последнего равенства находим

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)$$

– совместная условная вероятность того, что на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния в первое; вероятность этой возможности есть $\lambda_1 \Delta t e^{-\lambda_1 \Delta t}(1-p)=(1-p)\lambda_1 \Delta t+o(\Delta t)$. Или

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=(1-p)\lambda_1 \Delta t+o(\Delta t).$$

Аналогично с использованием описанной выше методики выпишутся все остальные переходные вероятности в формуле (2.27):

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$

$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)= p\lambda_1\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)= q\lambda_2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$

$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)= (1-q)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t).$$

Учитывая явный вид выписанных вероятностей и сделав переобозначение $w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i \mid t_k-\Delta t'\right)=w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')$, $i=1,2$, находим числитель A_1 и знаменатель B_1 в (2.27) в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= [(1-p)\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t')+q\lambda_2 w(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t')]\Delta t + o(\Delta t), \\ B_1 &= [\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t')+\lambda_2 w(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t')]\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.27), с учётом условия $w(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t')=1-w(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t')$ и выполняя предельный переход при $\Delta t\to 0$ ($\Delta t'\to 0$ и $\Delta t''\to 0$ одновременно), докажем утверждение леммы. *Лемма доказана.*

Замечание 2.3. В точке t_k, $k=1,2,\ldots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_i \mid t)$ состояния S_i, $i=1,2$, процесса $\lambda(t)$ для синхронного потока событий претерпевает разрыв первого рода (имеет место конечный скачок).

Формулы (2.24), (2.26) для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$, а также (1.7) для априорной финальной вероятности π_1 первого состояния сопровождающего процесса $\lambda(t)$ определяют поведение апостериорной вероятности на временной оси.

Леммы 2.7 и 2.8 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.3. Для синхронного потока событий поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на временной оси определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w(\lambda_1 \mid t_k + 0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t-t_k)}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0) + w(\lambda_1 \mid t_k + 0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t-t_k)}}, k = 0,1,..., \quad (2.29)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{q\lambda_2}{p\lambda_1 + q\lambda_2},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + \left[(1-p)\lambda_1 - q\lambda_2\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \; k = 1,2,...,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= \frac{w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t_k - t_{k-1})}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0) + w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t_k - t_{k-1})}}, k = 1,2,..., \quad (2.30)$$

где $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 0,1,...$.

Доказательство проводится объединением формул (1.7), (2.24) и (2.26).

Замечание 2.4. В формуле пересчёта (2.26) положим $p + q = 1$. Тогда находим $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = q$, $k = 1,2,...$. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ для синхронного потока при выполнении условия $p + q = 1$ не зависит от предыстории, то есть не зависит от моментов наступления событий до момента t_k, $k = 1,2,...$.

Таким образом, при выполнении условия $p + q = 1$ синхронный поток событий является стационарным ординарным потоком с

ограниченным последействием или потоком типа Р (потоком Пальма) [2].

2.3.3. Алгоритм оценки состояний синхронного потока событий

Используя формулы (1.7), (2.26), (2.29) и (2.30), сформулируем алгоритм расчёта апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t:

1) в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0)$ выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$, то есть $\pi_1 = q\lambda_2 / (p\lambda_1 + q\lambda_2)$;

2) по формуле (2.29) для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока;

3) в момент времени t_1 вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ по формуле (2.30) для $k = 1$, то есть $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле (2.26) для $k = 1$ производится пересчёт апостериорной вероятности в момент времени t_1, то есть начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ для $w(\lambda_1 \mid t)$ на интервале (t_1, t_2);

5) по формуле (2.29) для $k = 1$ рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ для любого t, $t_1 < t < t_2$, где t_2 – момент наступления второго события потока, и т. д.

Решение о том, какое состояние процесса $\lambda(t)$ имеет место в данный момент времени t, выносится на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$ и $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$.

2.4. Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока

Изучается полусинхронный поток событий, математическая модель которого приведена в параграфе 1.4. Условия функционирования потока и условия наблюдения за ним, а также алгоритм оптимального оценивания состояний потока, основанный на методе максимума апостериорной вероятности, совпадают с рассмотренными в параграфе 2.2 для асинхронного потока событий.

2.4.1. Вывод дифференциального уравнения для апостериорных вероятностей

Для решения задачи об оптимальной оценке состояний сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ (потока) необходимо иметь явный вид апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$ и $w(\lambda_2 \mid t)$.

Лемма 2.9. Для полусинхронного потока событий двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским.

Доказательство. Компонента $\lambda^{(l)}$ процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковской, так как на основании леммы 1.7 процесс $\lambda(t)$ – марковский. Компонента r_l также марковская, так как если процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии S_1, то событие пуассоновского потока с параметром λ_1 наступает только в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_1 либо в состояние S_2. Этот переход происходит внутри интервала $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ и определяется моментом окончания состояния S_1 сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$. В свою очередь момент окончания состояния S_1 не зависит от предыстории, так как длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1

(временного интервала, на котором значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$) – случайная величина с функцией распределения $F_1^{(1)}(t)=1-e^{-p\lambda_1 t}$, $t\ge 0$. В состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток с параметром λ_2. Следовательно, компонента r_l не зависит от предыстории. Компонента $\lambda^{(l)}$ не влияет на r_l в силу конструкции процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$: $\lambda^{(l)}$ – в будущем, а r_l по отношению к $\lambda^{(l)}$ – в прошлом (рис. 2.1). Компонента r_l – количество событий полусинхронного потока, наступивших на интервале $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$, – влияет на компоненту $\lambda^{(l)}$, так как с наступлением (ненаступлением) события связана смена (несмена) состояния процесса $\lambda(t)$, то есть значение $\lambda^{(l)}$ в момент времени $t^{(l)}=l\Delta t$. Компонента r_l – количество событий на интервале $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ в состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ – не влияет на компоненту $\lambda^{(l)}$, так как смена состояний процесса $\lambda(t)$ происходит в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий полусинхронного потока. Таким образом, $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ – марковский процесс. *Лемма доказана*.

Согласно математической модели полусинхронного потока событий, представленной в параграфе 1.4, в состоянии S_1 сопровождающего процесса $\lambda(t)$ он (поток) ведёт себя как синхронный, в состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ – как асинхронный.

Для полусинхронного потока рассмотрим переходную вероятность двумерного случайного процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ – $p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ – в рекуррентном соотношении (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)$.

Утверждение 2.4 (вытекает из утверждений 2.1 и 2.2 для асинхронного потока и утверждения 2.3 для синхронного потока событий). Для полусинхронного потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 ($\lambda^{(m)} = \lambda_1$) в состояние S_i, $i = 1,2$, переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ принимает вид

$$p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda_1, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda_1, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda_1, \lambda^{(m+1)}\right).$$

При переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 ($\lambda^{(m)} = \lambda_2$) в состояние S_i, $i = 1,2$, переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ принимает вид

$$p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda_2, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda_2, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda_2\right).$$

Утверждение доказано.

Принимая во внимание утверждение 2.4, запишем рекуррентное соотношение (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$ состояний полусинхронного потока событий в виде

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right) =$$

$$= \left\{ \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I\left(\lambda^{(m)}\right)\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I\left(\lambda^{(m)}\right)\right) \right\}^{-1},$$

$$I\left(\lambda^{(m)}\right) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)}, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2. \end{cases}$$

Полагая в последнем рекуррентном соотношении слева от знака равенства, а также в числителе справа от знака равенства значение $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$, получаем

$$w(\lambda_1 \mid t + \Delta t) =$$

$$= \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I_1\left(\lambda^{(m)}\right)\right) \right\} \times \quad (2.31)$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I\left(\lambda^{(m)}\right)\right) \right\}^{-1},$$

$$I_1\left(\lambda^{(m)}\right) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2, \end{cases}$$

$$I\left(\lambda^{(m)}\right) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)}, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, & \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2. \end{cases}$$

Будем рассматривать случай отсутствия событий полусинхронного потока на интервале $(t, t+\Delta t)$; этот случай описывает поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ ($w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$) на интервале времени между моментами наступления соседних событий потока t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, и на интервале (t_0, t_1), где t_0 – момент времени начала наблюдения за потоком. Задавая для этого в (2.31) значение $r_{m+1} = 0$, приходим к следующей лемме.

Лемма 2.10. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в течение времени между моментами наступления соседних событий t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, и на интервале (t_0, t_1) для полусинхронного потока удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2) w(\lambda_1 \mid t) - (\lambda_1 - \lambda_2) w^2(\lambda_1 \mid t) = \alpha_2. \quad (2.32)$$

Доказательство. В силу того, что в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$ полусинхронный поток ведёт себя как синхронный поток, переходные вероятности на основании леммы 2.6 равны

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=0,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=e^{-\lambda_1\Delta t}=1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=0,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=0.$$

Поскольку в состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ полусинхронный поток ведёт себя как асинхронный поток, то на основании леммы 2.2 переходные вероятности равны

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$

$$=(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t))(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t))=\alpha_2\Delta t+o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$

$$=(1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t))(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t))=1-(\alpha_2+\lambda_2)\Delta t+o(\Delta t).$$

С учётом выписанных выражений для переходных вероятностей процесса $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$ и переобозначения $w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i \mid t\right)=w(\lambda_i \mid t)$, $i=1,2$, числитель A и знаменатель B в рекуррентном соотношении (2.31) принимают вид

$$A=w\left(\lambda_1 \mid t\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)+$$

$$+w\left(\lambda_2 \mid t\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$

$$=w\left(\lambda_1 \mid t\right)+\left[-\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t\right)+\alpha_2 w\left(\lambda_2 \mid t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

(2.33)

$$B = w(\lambda_1 \mid t)\, p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) +$$
$$+ w(\lambda_2 \mid t)\, p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) +$$
$$+ w(\lambda_1 \mid t)\, p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2\right) +$$
$$+ w(\lambda_2 \mid t)\, p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) =$$
$$= 1 - \left[\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Подставляя (2.33) в рекуррентное соотношение (2.31) и принимая во внимание, что $B^{-1} = 1 + [\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 w(\lambda_2 \mid t)]\Delta t + o(\Delta t)$, находим (с точностью до членов $o(\Delta t)$) (2.31) в виде

$$w(\lambda_1 \mid t + \Delta t) - w(\lambda_1 \mid t) = \left[\lambda_1 w^2(\lambda_1 \mid t) + \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t) - \lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \right.$$
$$\left. + \lambda_2 w(\lambda_1 \mid t) w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив обе части последнего равенства на Δt и, с учётом условия $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$, выполнив предельный переход при $\Delta t \to 0$, приходим к уравнению Риккати (2.32). *Лемма доказана*.

2.4.2. Апостериорные вероятности в явном виде и формула пересчёта

Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ $(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t))$, удовлетворяющая условию $w(\lambda_1 \mid t) = w(\lambda_1 \mid t_k)$ $(w(\lambda_2 \mid t_k) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k))$ при $t = t_k$, $k = 0,1,\ldots$, где t_0 – момент начала наблюдения за потоком, t_k – момент времени наступления очередного события потока, в явном виде задаётся следующей леммой.

Лемма 2.11. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ как функции времени между моментами наступления соседних событий t_k и t_{k+1}, $k = 1,2,\ldots$, и на интервале (t_0, t_1) определяется соотношениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_k)}{1 + [1 - w(\lambda_1 \mid t_k)](\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}, \qquad (2.34)$$

если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$;

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w[1 - w(\lambda_1 \mid t_k)] - [w - w(\lambda_1 \mid t_k)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1 \mid t_k)] - [w - w(\lambda_1 \mid t_k)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}, \qquad (2.35)$$

если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, $w = \alpha_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)$; $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$.

Доказательство. Коэффициенты уравнения Риккати (2.32) постоянны, следовательно, оно интегрируется в квадратурах.

В (2.32) разделяем переменные, предварительно обозначив коэффициенты $a = \lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $b = -(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2)$, $c = \alpha_2$, и интегрируем с учётом начального условия $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k)$:

$$\int_{w(\lambda_1 \mid t_k)}^{w(\lambda_1 \mid t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{a[w(\lambda_1 \mid t) - w_1][w(\lambda_1 \mid t) - w_2]} = \int_{t_k}^{t} dt, \qquad (2.36)$$

где w_1, w_2 – корни уравнения $aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c = 0$. Находим

$$w_{1,2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{D}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)^2.$$

В зависимости от значения параметров потока λ_1, λ_2, α_2 возможны различные случаи корней w_1, w_2 уравнения $aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c = 0$ и, вместе с тем, различные случаи решения недифференциального уравнения (2.36).

1. Если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ ($D = 0$), то $w_1 = w_2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 1$, и уравнение (2.36) принимает вид

$$\int\limits_{w(\lambda_1|t_k)}^{w(\lambda_1|t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{a\left[w(\lambda_1 \mid t) - 1\right]^2} = \int\limits_{t_k}^{t} dt\,,$$

откуда следует

$$-\frac{1}{a\left[w(\lambda_1 \mid t) - 1\right]}\Bigg|_{w(\lambda_1|t_k)}^{w(\lambda_1|t)} = \left(t - t_k\right).$$

Выполняя в последнем уравнении необходимые преобразования, с учётом обозначения $a = \lambda_1 - \lambda_2$, приходим к (2.34).

2. Если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, то $w_1 = w = \alpha_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)$, $w_2 = 1$, и уравнение (2.36) принимает вид

$$\int\limits_{w(\lambda_1|t_k)}^{w(\lambda_1|t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{a\left[w(\lambda_1 \mid t) - w\right]\left[w(\lambda_1 \mid t) - 1\right]} = \int\limits_{t_k}^{t} dt$$

или

$$\frac{1}{a(1-w)} \ln \left| \frac{\left[w(\lambda_1 \mid t) - w\right]}{\left[w(\lambda_1 \mid t) - 1\right]} \right|\Bigg|_{w(\lambda_1|t_k)}^{w(\lambda_1|t)} = -\left(t - t_k\right).$$

Потенцируя последнее уравнение и осуществляя необходимые преобразования, с учётом того, что $a(1-w) = \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2$, находим $w(\lambda_1 \mid t)$ в виде (2.35). *Лемма доказана.*

Описание поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, согласно формулам (2.34), (2.35) (в зависимости от соотношения параметров потока), невозможно без знания $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 0,1,\ldots$.

Перейдём к рассмотрению случая наблюдения одного события полусинхронного потока на интервале времени $(t,t+\Delta t)$, скажем, в момент времени t_k, то есть в (2.31) положим $r_{m+1}=1$.

Лемма 2.12. В полусинхронном потоке апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k наблюдения события задаётся формулой пересчёта

$$w(\lambda_1 \mid t_k+0)=\frac{(1-p)\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k-0)}{\lambda_2+(\lambda_1-\lambda_2)w(\lambda_1 \mid t_k-0)},\ k=1,2,..., \qquad (2.37)$$

$w(\lambda_2 \mid t_k+0)=1-w(\lambda_1 \mid t_k+0)$.

Доказательство. Точка t_k разбивает интервал времени $(t,t+\Delta t)$ на два смежных интервала: (t,t_k), $(t_k,t+\Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t'=t_k-t$ и $\Delta t''=t+\Delta t-t_k$ соответственно.

Поскольку в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$ имеет место синхронный поток, то в силу леммы 2.8 переходные вероятности процесса $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$ в (2.31) равны

$$p(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1)\,p(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1)=$$
$$=p\left(r_{m+1}=1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=(1-p)\lambda_1\Delta t+o(\Delta t),$$
$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$
$$=p\left(r_{m+1}=1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=p\lambda_1\Delta t+o(\Delta t).$$

В состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ имеет место асинхронный поток, поэтому на основании леммы 2.4 переходные вероятности процесса $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$ в рекуррентном соотношении (2.31) равны

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$
$$=\left(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)=o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$
$$=\left(1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)=\lambda_2\Delta t+o(\Delta t).$$

Тогда числитель A_1 и знаменатель B_1 в соотношении (2.31), с учётом заданного значения компоненты $r_{m+1}=1$ двумерного случайного процесса $\left(\lambda^{(l)},r_l\right)$, введённых обозначений длин интервалов (t,t_k), $(t_k,t+\Delta t)$ и выписанных выражений для переходных вероятностей, запишутся в виде

$$A_1=w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times$$
$$\times p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)+w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\times$$
$$\times p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$
$$=\left(1-p\right)\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)\Delta t+o(\Delta t),$$

$$B_1=w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times$$
$$\times p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)+w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\times$$
$$\times p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)+$$
$$+w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times \qquad (2.38)$$
$$\times p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)+w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\times$$
$$\times p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=$$
$$=\left[\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)+\lambda_2 w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

где $w(\lambda_i\,|\,t_k-\Delta t')=w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i\,|\,t_k-\Delta t'\right)$, $i=1,2$.

Подставляя (2.38) в (2.31), выполняя преобразования, с учётом равенства $w(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t')=1-w(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t')$, и совершая предельный переход при $\Delta t\to 0$ $(\Delta t'\to 0,\,\Delta t''\to 0)$, получим утверждение леммы. *Лемма доказана.*

Замечание 2.5. В точке t_k, $k=1,2,...$ (момент наступления события потока), апостериорная вероятность $w(\lambda_i \mid t)$, $i=1,2$, i-го состояния процесса $\lambda(t)$ для полусинхронного потока событий терпит разрыв первого рода, то есть имеет место конечный скачок.

Полученные для $w(\lambda_1 \mid t)$ формулы (2.34), (2.35), (2.37), а также формула (1.9) для априорной финальной вероятности π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$ определяют поведение апостериорной вероятности как функции времени.

Леммы 2.11 и 2.12 позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2.4. Для полусинхронного потока событий в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)}{1 + \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right](\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}, \; k = 0,1,..., \quad (2.39)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{(1-p)\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \; k = 1,2,...,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)}{1 + \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right](\lambda_1 - \lambda_2)(t_k - t_{k-1})}, \quad (2.40)$$

$$k = 1,2,...,$$

где $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 0,1,...$.

Доказательство осуществляется объединением формул (1.9), (2.34) и (2.37).

Теорема 2.5. Для полусинхронного потока событий в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$ поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) =$$

$$= \frac{w\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}{\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}, \quad (2.41)$$

$$k = 0,1,...,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{(1-p)\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \; k = 1,2,...,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= \frac{w\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1})}}{\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1})}}, \quad (2.42)$$

$$k = 1,2,...,$$

$w = \alpha_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)$, $w \neq 1$; $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0,1,...$.

Доказательство проводится объединением формул (1.9), (2.35) и (2.37).

Замечание 2.6. В формуле пересчёта (2.37) положим $p = 1$. Тогда имеем $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 0$, $k = 1,2,...$. Данный факт свидетельствует о том, что апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ не зависит от предыстории, то есть не зависит от моментов наступления событий потока до момента t_k, $k = 1,2,...$.

Таким образом, при $p = 1$ полусинхронный поток событий является стационарным ординарным потоком с ограниченным последействием или потоком типа P (потоком Пальма) [2].

2.4.3. Алгоритм оптимального оценивания состояния потока

Алгоритм расчёта апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ и алгоритм вынесения решения о состоянии сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (потока) в любой момент времени t формулируется на основании полученных формул (2.37), (2.39) – (2.42) и (1.9):

1) в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0)$ выбирается вероятность $\pi_1 = \alpha_2 / (p\lambda_1 + \alpha_2)$;

2) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, то по формуле (2.39) для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t; если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, то $w(\lambda_1 \mid t)$ вычисляется по формуле (2.41) для $k = 0$ в любой момент времени t; $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока;

3) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, то по формуле (2.40) для $k = 1$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_1; если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, то в момент времени t_1 вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ вычисляется по формуле (2.42) для $k = 1$; здесь $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле (2.37) для $k = 1$ в зависимости от значения величины $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2$ производится пересчёт апостериорной вероятности в момент времени t_1, то есть начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ для $w(\lambda_1 \mid t)$ на интервале (t_1, t_2);

5) в зависимости от значения величины $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2$ по формуле (2.39) либо по формуле (2.41) для $k = 1$ рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ для любого момента времени t, $t_1 < t < t_2$, где t_2 – момент наступления второго события потока, и т. д.

При расчёте апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$ и $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$ в произвольный момент времени t принимается решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 \mid t) \geq w(\lambda_2 \mid t)$, то оценка состояния процесса $\lambda(t)$ есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

2.5. Оптимальное оценивание состояний MAP-потока

Исследуется MAP-поток событий, математическая модель которого изложена в параграфе 1.5. Необходимо по наблюдениям (моментам наступления событий потока) $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ на интервале (t_0, t), t_0 – момент начала наблюдения за потоком, оценить состояние сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (MAP-потока) в момент окончания наблюдений t. Правило оценивания состояний потока, основанное на критерии максимума апостериорной вероятности, идентично рассмотренному в параграфе 2.2 для асинхронного потока событий.

2.5.1. Уравнение Риккати для апостериорных вероятностей

Для реализации алгоритма оптимальной оценки состояний необходимо вывести дифференциальное уравнение, определяющее явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_i \mid t)$ состояния S_i процесса $\lambda(t)$, $i = 1,2$.

Лемма 2.13. Случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ для MAP-потока событий является марковским процессом.

Доказательство. Компонента $\lambda^{(l)}$ является марковской, так как, согласно лемме 1.10, сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$

является марковским процессом. Компонента r_l также марковская, так как события в МАР-потоке наступают только в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Этот момент смены состояний принадлежит интервалу $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ и определяется моментом окончания того или иного состояния процесса $\lambda(t)$. Поскольку длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1[P_1(\lambda_2|\lambda_1)+P_0(\lambda_2|\lambda_1)]t}$, $t \geq 0$, во втором состоянии – случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $F_2^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda_2[P_1(\lambda_1|\lambda_2)+P_0(\lambda_1|\lambda_2)]t}$, $t \geq 0$, то момент окончания i-го, $i = 1,2$, состояния процесса $\lambda(t)$ не зависит от предыстории. Значит, компонента r_l не зависит от предыстории. Первая компонента $\lambda^{(l)}$ процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$, в силу конструкции, не влияет на компоненту r_l. Вторая компонента r_l процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ влияет на $\lambda^{(l)}$ в силу того, что с наступлением (ненаступлением) события связана смена (несмена) i-го, $i = 1,2$, состояния процесса $\lambda(t)$. Таким образом, двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским процессом. *Лемма доказана*.

Рассмотрим переходную вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) =$ $= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ в рекуррентном соотношении (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$ состояний изучаемых дважды стохастических потоков событий с двумя состояниями.

Утверждение 2.5. Переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \times$ $\times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ для МАР-потока событий принимает вид

$$p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) =$$
$$= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right).$$

Доказательство. На основании леммы 2.13 процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским, поэтому значение компоненты $\lambda^{(m+1)}$ в момент времени $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$ зависит только от значения $\lambda^{(m)}$ в момент времени $t = m\Delta t$; зависимости компоненты $\lambda^{(m+1)}$ от r_m (количества событий потока на предыдущем интервале $((m-1)\Delta t, m\Delta t))$ нет. В этой связи $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) =$ $= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$. В силу марковости компоненты r_l процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ значение компоненты r_{m+1} на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ не зависит от значения r_m на интервале $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, так как события в МАР-потоке наступают (или не наступают) в момент окончания i-го, $i = 1,2$, состояния процесса $\lambda(t)$. Если i-е состояние не закончится на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, то значение компоненты $r_{m+1} = 0$; если i-е состояние закончится на $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, то при переходе процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, $i, j = 1,2$, компонента r_{m+1} может принимать значения $r_{m+1} = 0$ или $r_{m+1} = 1$. Таким образом, имеет место равенство $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)$. *Утверждение доказано.*

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 0$ в (2.6), то есть на интервале $(t, t+\Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, нет событий МАР-потока. Этот случай описывает поведение апостериорной вероятности на временных интервалах между моментами t_k и t_{k+1}, $k = 1,2,\ldots$, наступления соседних событий потока и на интервале (t_0, t_1), t_0 –

момент начала наблюдения за потоком. Кроме того, для конкретности в (2.6) положим $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. Тогда, с учётом утверждения 2.5, рекуррентное соотношение (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$ состояний MAP-потока запишется в виде

$$w\left(\lambda_1 \mid t + \Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)}, \quad (2.43)$$

$w(\lambda_2 \mid t + \Delta t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t + \Delta t)$.

Лемма 2.14. В течение времени между моментами t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$, наступления соседних событий MAP-потока и на интервале (t_0, t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + [\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)] w(\lambda_1 \mid t) -$$
$$- [\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)] w^2(\lambda_1 \mid t) = \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2). \quad (2.44)$$

Доказательство. Рассмотрим одну из переходных вероятностей, например $p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)$, в формуле (2.43). Совместная вероятность события $\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)$ – процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_1, и на интервале $(t, t + \Delta t)$ не закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$, и не наступит событие MAP-потока, и в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_1 – представляется в виде

$$p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right),$$

откуда следует, что

$$p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\frac{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)}$$

или

$$p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\frac{p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)}.$$

Из последнего равентства находим

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)$$

– совместная условная вероятность того, что на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ первое состояние сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ не закончится; она равна $e^{-\lambda_1\Delta t}=1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$.

Следуя рассмотренной методике, выпишем ещё одну переходную вероятность в формуле (2.43):

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$

$$=p\left(r_{m+1}=0, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)$$

– совместная условная вероятность того, что на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$, и не наступит событие MAP-потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния во второе; вероятность этой ситуации есть $\left(1-e^{-\lambda_1\Delta t}\right)P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)=\lambda_1 P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\Delta t+o(\Delta t)$.

Аналогично выписываются две оставшиеся переходные вероятности

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$
$$=p\left(r_{m+1}=0,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=\left(1-e^{-\lambda_2\Delta t}\right)P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)=$$
$$=\lambda_2 P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\Delta t+o(\Delta t),$$
$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=$$
$$=p\left(r_{m+1}=0,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=e^{-\lambda_2\Delta t}=1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t).$$

С учётом явного вида совместных условных вероятностей и переобозначения $w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i\,|t\right)=w(\lambda_i\,|t)$, $i=1,2$, числитель A и знаменатель B в (2.43) выпишутся в виде

$$A=w(\lambda_1\,|t)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)+$$
$$+w(\lambda_2\,|t)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=$$
$$=w\left(\lambda_1\,|t\right)\left(1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)\right)+w\left(\lambda_2\,|t\right)\left(\lambda_2 P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\Delta t+o(\Delta t)\right)=$$
$$=w\left(\lambda_1\,|t\right)+\left[-\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|t\right)+\lambda_2 P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)w\left(\lambda_2\,|t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

$$B=w\left(\lambda_1\,|t\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)+$$
$$+w\left(\lambda_2\,|t\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)+$$
$$+w\left(\lambda_1\,|t\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)+$$
$$+w\left(\lambda_2\,|t\right)p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=\quad(2.45)$$
$$=w\left(\lambda_1\,|t\right)\left(1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)\right)+w\left(\lambda_2\,|t\right)\left(\lambda_2 P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\Delta t+o(\Delta t)\right)+$$
$$+w\left(\lambda_1\,|t\right)\left(\lambda_1 P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\Delta t+o(\Delta t)\right)+w\left(\lambda_2\,|t\right)\left(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)=$$
$$=1-\left\{\lambda_1\left[1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right]w\left(\lambda_1\,|t\right)+\lambda_2\left[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\right]w\left(\lambda_2\,|t\right)\right\}\Delta t+o(\Delta t).$$

Подставляя (2.45) в (2.43) и учитывая, что $B^{-1} = 1 + \{\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)]w(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]w(\lambda_2 \mid t)\}\Delta t + o(\Delta t)$, находим соотношение (2.43) в виде

$$w(\lambda_1 \mid t + \Delta t) - w(\lambda_1 \mid t) = \{-\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) w(\lambda_2 \mid t) +$$
$$+\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)]w^2(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]w(\lambda_1 \mid t)w(\lambda_2 \mid t)\} \times$$
$$\times \Delta t + o(\Delta t).$$

Выполняя несложные преобразования и учитывая при этом, что $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$, с помощью предельного перехода ($\Delta t \to 0$) сведём последнее равенство к дифференциальному уравнению Риккати (2.44). *Лемма доказана.*

2.5.2. Апостериорная вероятность как функция времени в общем и в особом случаях задания параметров потока и формула пересчёта

Рассмотрим два случая задания параметров MAP-потока.

I. *Общий случай*, когда в (2.44) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$.

Явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ ($w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$), принимающей значение $w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 0,1,\ldots$, в момент времени $t = t_0$ начала наблюдения за потоком и в моменты времени $t = t_k$, $k = 1,2,\ldots$, наступления событий MAP-потока, задаётся следующей леммой.

Лемма 2.15. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ как функции времени между моментами t_k и t_{k+1}, $k = 1,2,\ldots$, наступления соседних событий MAP-потока и на интервале (t_0, t_1) определяется формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w_1[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k)] - w_2[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k)]e^{-a(w_2-w_1)(t-t_k)}}{[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k)] - [w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k)]e^{-a(w_2-w_1)(t-t_k)}}, \quad (2.46)$$

$$w_1 = \frac{1}{2a}\left(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)} \right),$$

$$w_2 = \frac{1}{2a}\left(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \right. \quad (2.47)$$

$$\left. + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)} \right),$$

$$a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0,$$

где $0 \le w_1 < 1$, $w_2 \ge 1$ при $a > 0$; $0 \le w_1 \le 1$, $w_2 < 0$ при $a < 0$; $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$.

Доказательство. Уравнение Риккати (2.44) интегрируется в квадратурах в силу того, что коэффициенты постоянны.

В (2.44) обозначим коэффициенты $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)$, $b = -\left[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]$, $c = \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)$, разделяем переменные и интегрируем (2.44) с учётом того, что при $t = t_k$, $k = 0,1,\ldots$, апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ принимает значение $w(\lambda_1 \mid t_k)$:

$$\int_{w(\lambda_1 \mid t_k)}^{w(\lambda_1 \mid t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{a[w(\lambda_1 \mid t) - w_1][w(\lambda_1 \mid t) - w_2]} = \int_{t_k}^{t} dt, \quad (2.48)$$

где w_1, w_2 – корни уравнения $f(w(\lambda_1 \mid t)) = 0$, $f\left(w(\lambda_1 \mid t)\right) = aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c$. Имеем

$$w_{1,2} = \frac{\left[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] \mp \sqrt{D}}{2a},$$

$$D = \left[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]^2 - 4\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \times$$
$$\times \left[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] =$$
$$= \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1).$$

Подчеркнём, что $D > 0$, следовательно, корни w_1 и w_2 действительные и различные. Исследуем w_1 и w_2. Имеем случаи:

1. Если $a > 0$, тогда $w_1 < w_2$; $f(0) = c = \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) > 0$, $f(0) = 0$ при $P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$; $f(1) = a + b + c = -\lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) < 0$, $f(1) = 0$ при $P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0$. Ветви параболы, служащей графиком функции $f(w(\lambda_1 \mid t)) = aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c$, направлены вверх ($f(w(\lambda_1 \mid t))$ – выпуклая функция), значит, $0 \le w_1 < 1$, $w_2 \ge 1$.

2. Если $a < 0$, тогда $w_2 < w_1$; как и в слуае 1, имеем $f(0) \ge 0$, $f(1) \le 0$. Ветви параболы, служащей графиком функции $f(w(\lambda_1 \mid t)) = aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c$, направлены вниз ($f(w(\lambda_1 \mid t))$ – вогнутая функция), следовательно, $w_2 < 0$, $0 \le w_1 \le 1$.

Выполняя необходимые преобразования в недифференциальном уравнении (2.48), находим функцию $w(\lambda_1 \mid t)$ в явном виде (2.46). *Лемма доказана.*

Применение формулы (2.46) для определения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ ($w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$) в произвольный момент времени t, согласно лемме 2.15, предполагает знание апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t_k)$ в момент времени t_k, $k = 1, 2, \ldots$, наступления события потока и апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t_0)$ в момент времени t_0 начала наблюдения за пото-

ком; $w(\lambda_2 \mid t_k) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k)$. Перейдём к нахождению вероятности $w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $r_{m+1} = 1$ в (2.6): на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ наступает событие потока, предположим, в момент времени t_k. Для определённости в (2.6) зададим $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. С учётом утверждения 2.5 рекуррентное соотношение (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$ состояний потока запишется в виде

$$w\left(\lambda_1 \mid t + \Delta t\right) =$$

$$= \left\{ \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right) \right\}^{-1}, \quad (2.49)$$

$w(\lambda_2 \mid t + \Delta t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t + \Delta t)$.

Лемма 2.16. В момент времени t_k наблюдения события в MAP-потоке для апостериорной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$ имеет место формула пересчёта

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) =$$

$$= \left\{ \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \lambda_2 \left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] + \left[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] \times \right.$$

$$\left. \times w(\lambda_1 \mid t_k - 0) \right\}^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (2.50)$$

$w(\lambda_2 \mid t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$.

Доказательство. Рассмотрим два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$

соответственно. Тогда, с учётом сделанных обозначений, (2.49) принимает вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + \Delta t'') =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)}. \quad (2.51)$$

Рассмотрим одну из вероятностей, например $p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \quad \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)$, в формуле (2.51). Совместная вероятность события $\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)$ – процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_1, и на интервале $(t, t + \Delta t)$ закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$; наступает событие MAP-потока, и в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_1 – представляется в виде

$$p\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) =$$

$$= p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) p\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right),$$

откуда следует, что

$$p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) = \frac{p\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right)}$$

или

$$p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) = \frac{p\left(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right)}{p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right)}.$$

Из последнего равенства находим

$$p(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1)\, p(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1) =$$
$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right)$$

– совместная условная вероятность того, что на интервале времени $(t, t+\Delta t)$ закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$ и наступит событие MAP-потока, и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния в первое; вероятность этого варианта равна $\left(1-e^{-\lambda_1 \Delta t}\right) P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = \lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t)$. Или

$$p(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1)\, p(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1) =$$
$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) = \lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t).$$

С использованием описанной выше методики аналогично выпишутся все остальные переходные вероятности процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ в (2.51). Имеем

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right) =$$
$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right) = \left(1-e^{-\lambda_1 \Delta t}\right) P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) =$$
$$= \lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right) p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right) =$$
$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right) = \left(1-e^{-\lambda_2 \Delta t}\right) P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) =$$
$$= \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right) p\left(r_{m+1}=1 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right) =$$
$$= p\left(r_{m+1}=1, \lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right) = \left(1-e^{-\lambda_2 \Delta t}\right) P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) =$$
$$= \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\Delta t + o(\Delta t).$$

С учётом явного вида выписанных вероятностей и сделанного переобозначения $w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i \mid t_k-\Delta t'\right)=w(\lambda_i \mid t_k-\Delta t')$, $i=1,2$, находим числитель A_1 и знаменатель B_1 в (2.51) в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)+\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) w\left(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t'\right)\right\}\times \\ &\quad \times\Delta t+o(\Delta t), \\ B_1 &= \left\{\lambda_1\left[1-P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)\right] w\left(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t'\right)+\lambda_2\left[1-P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]\times\right. \\ &\quad \left.\times w\left(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t'\right)\right\}\Delta t+o(\Delta t). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Подставляя (2.52) в (2.51), учитывая при этом, что $w(\lambda_2 \mid t_k-\Delta t')=1-w(\lambda_1 \mid t_k-\Delta t')$, и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ ($\Delta t' \to 0$ и $\Delta t'' \to 0$ одновременно), получим утверждение леммы. *Лемма доказана.*

Замечание 2.7. В точке t_k, $k=1,2,\ldots$ (момент наступления события MAP-потока), апостериорная вероятность $w(\lambda_i \mid t)$, $i=1,2$, i-го состояния процесса $\lambda(t)$ для MAP-потока событий терпит разрыв первого рода (имеет место конечный скачок).

Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ как функция времени на полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$, $k=1,2,\ldots$, между моментами наступления соседних событий потока и на интервале (t_0, t_1), где t_0 – момент времени начала наблюдения за потоком, определяется формулами (2.46), (2.47), (2.50) для случая задания параметров потока $a=\lambda_1-\lambda_2-\lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)+\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\neq 0$. Формула (1.11) для априорной финальной вероятности первого состояния сопровождающего процесса $\lambda(t)$ задаёт начальное значение вероятности $w(\lambda_1 \mid t_0+0)=w(\lambda_1 \mid t_0=0)=\pi_1$.

Таким образом, результаты лемм 2.15 и 2.16 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.6. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на временной оси для MAP-потока событий определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) =$$

$$= \frac{w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (2.53)$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{\lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]}{\lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) =$$

$$= \frac{\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2\left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] + \left[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)},$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= \frac{w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1})}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1})}}, \quad (2.54)$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

$$w_1 = \frac{1}{2a} \times$$

$$\times\left(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) - \sqrt{\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}\right),$$

$$w_2 = \frac{1}{2a} \times$$

$$\times\left(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \sqrt{\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}\right),$$

$$a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0,$$

где $0 \le w_1 < 1$, $w_2 \ge 1$ при $a > 0$; $0 \le w_1 \le 1$, $w_2 < 0$ при $a < 0$; $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$.

Доказательство проводится объединением формул (1.11), (2.46), (2.47) и (2.50).

Замечание 2.8. В формуле пересчёта (2.50) положим $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)$, $P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)$. Тогда имеем

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)}{1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)} = w, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Данный факт свидетельствует о том, что апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ не зависит от предыстории: поведение $w(\lambda_1 \mid t)$ после момента t_k зависит только от значения $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = w = \text{const}$ в момент наступления события потока t_k для любых k, $k = 1,2,\ldots$.

Итак, при выполнении условий $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)$, $P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)$ MAP-поток событий является стационарным ординарным потоком с ограниченным последействием или потоком типа P (потоком Пальма) [2].

II. *Особый случай*, когда в (2.44) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$.

Лемма 2.17. Решение дифференциального уравнения (2.44) для случая, когда $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$, имеет вид

$$w(\lambda_1 \mid t) = -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w(\lambda_1 \mid t_k) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} \right] e^{b(t - t_k)}, \quad (2.55)$$

$b = -[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]$; $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$.

Доказательство. Так как коэффициент $a = 0$, то уравнение (2.44) принимает вид

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + [\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]w(\lambda_1 \mid t) = \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)$$

или

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} = bw(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2),$$

где $b = -[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]$.

Разделяем в последнем уравнении переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{bw(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)} = \int dt + \ln|C_1|,$$

$$\frac{1}{b}\ln\left|w(\lambda_1 \mid t) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b}\right| = t + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

C_1 – произвольная постоянная.

Потенцируя последнее уравнение, в результате несложных преобразований находим функцию $w(\lambda_1 \mid t)$ в явном виде

$$w(\lambda_1 \mid t) = -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + Ce^{bt}, \qquad (2.56)$$

где C – произвольная постоянная.

Предположим, что значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени $t = t_k$, $k = 0,1,\ldots$, известно, то есть $w(\lambda_1 \mid t) = w(\lambda_1 \mid t_k)$ при $t = t_k$. Это позволяет найти значение произвольной постоянной C в (2.56) в виде

$$C = \left(w(\lambda_1 \mid t_k) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b}\right)e^{-bt_k}, \; k = 0,1,\ldots,$$

и выписать функцию $w(\lambda_1 \mid t)$, определённую в (2.55). *Лемма доказана*.

Отметим, что формула пересчёта (2.50) апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_k, $k = 1,2,\ldots$, наступления события потока имеет место и для случая $a = 0$.

Результаты лемм 2.16 и 2.17 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.7. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на временных полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0,1,\ldots$, для $a = 0$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = $$

$$= -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} \right] e^{b(t-t_k)}, \quad (2.57)$$

$$k = 0,1,\ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{\lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]}{\lambda_1 \left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = $$

$$= \frac{\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 \left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]}, \quad (2.58)$$

$$k = 1,2,\ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = $$

$$= -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} \right] e^{b(t_k - t_{k-1})}, \quad (2.59)$$

$$k = 1,2,\ldots,$$

где $b = -\left[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]$; $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$.

Доказательство осуществляется объединением формул (1.11), (2.50) и (2.55).

Замечание 2.9. В формуле пересчёта (2.58) для случая $a = 0$ положим $\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$. При соотношении параметров потока, определяемом последним равенством, (2.57) и (2.58) выпишутся в виде

$$w(\lambda_1 \mid t) = -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[\pi_1 + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b}\right] e^{b(t-t_0)}, \ t_0 \le t < t_1; \quad (2.60)$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b}\right] e^{b(t-t_k)}, \ t_k \le t < t_{k+1}, \quad (2.61)$$

$$b = -\left[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right], \ k = 1, 2, \ldots;$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)} = w, \ k = 1, 2, \ldots, \quad (2.62)$$

π_1 определена формулой (1.11).

Полученный результат говорит о том, что вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории; её поведение для любых k, $k = 1, 2, \ldots$, определяется значением w.

Таким образом, при выполнении условия $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$ и $\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$ MAP-поток событий становится стационарным ординарным потоком с ограниченным последействием или потоком типа P (потоком Пальма) [2].

2.5.3. Алгоритм вынесения решения о состоянии потока и численные результаты оптимального оценивания

Полученные для *общего случая* задания параметров в уравнении (2.44) ($a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$) формулы (2.47), (2.50), (2.53), (2.54) и (1.11) позволяют сформулировать следующий алгоритм расчёта апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$

и алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (MAP-потока) в любой момент времени t:

1) в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0)$ выбирается априорная финальная вероятность

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]}{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)] + \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]};$$

2) по формуле (2.53) для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $t_0 < t < t_1$, t_1 – момент наблюдения первого события потока; w_1 и w_2 определены в (2.47);

3) по формуле (2.54) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_1; здесь $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле (2.50) для $k = 1$ производится пересчёт апостериорной вероятности в момент времени t_1, то есть начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ для $w(\lambda_1 \mid t)$ на интервале (t_1, t_2);

5) по формуле (2.53) для $k = 1$ в любой момент времени t, $t_1 < t < t_2$, где t_2 – момент наступления второго события потока, рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ и т. д.

При расчёте апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$ и $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$ в произвольный момент времени t принимается решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности.

Для *особого случая* задания параметров потока в уравнении Риккати (2.44) ($a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$) расчёт вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ и алгоритм оптимальной оценки состояний аналогичны *общему случаю* $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$ и производятся по формулам (2.57) – (2.59) и (1.11).

Для иллюстрации результатов работы алгоритма оптимального оценивания состояний дважды стохастических потоков событий с двумя состояниями выбран MAP-поток, наиболее часто используемый в качестве математической модели реальных информационных потоков сообщений, в частности, в широкополосных беспроводных сетях вдоль протяжённых транспортных магистралей [19]. Предположение о том, что потоки сообщений (запросов, вызовов) являются MAP-потоками, позволяет учитывать сложный, коррелированный характер информационных потоков в современных телекоммуникационных сетях [20].

Для получения численных результатов разработан алгоритм оптимального оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ (MAP-потока событий). Первый этап расчёта предполагает имитационное моделирование MAP-потока событий. Второй этап – непосредственное вычисление вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_0 \le t < t_1$, $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$, $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k < t \le t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, по формулам (1.11), (2.47), (2.50), (2.53), (2.54), если $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$, либо по формулам (1.11), (2.57) – (2.59), если $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$, и определение оценки $\hat{\lambda}(t)$ истинной траектории процесса $\lambda(t)$, полученной путём имитационного моделирования MAP-потока.

Расчёты произведены для значений параметров, представленных в табл. 2.1, и времени моделирования $T_m = 20$ ед. времени.

Таблица 2.1

Модельные данные

$\lambda_1 = 2$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}8$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$
$\lambda_2 = 0{,}5$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}4$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}2$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}4$

В качестве иллюстрации на рис. 2.3 приведена траектория (верхняя часть рис. 2.3) процесса $\lambda(t)$ (истинная траектория), где

S_1, S_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, и траектория (нижняя часть рис. 2.3) оценки $\hat{\lambda}(t)$, где S_1, S_2 – состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0{,}001$. На рис. 2.3 штриховкой на оси времени обозначены временные промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (область ошибочных решений).

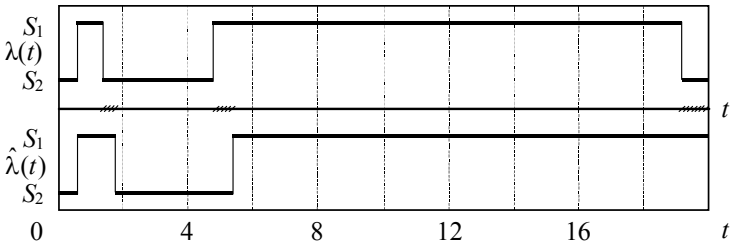

Рис. 2.3. Траектория процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

На рис. 2.4 приведена траектория поведения вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$, соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности моментов времени наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, \ldots$.

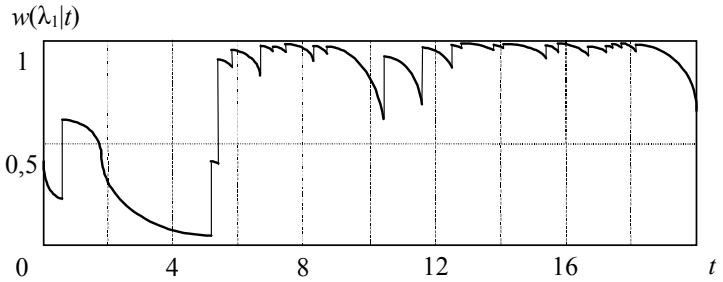

Рис. 2.4. Траектория апостериорной вероятности

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за MAP-потоком событий проведён ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определённого набора параметров λ_1, λ_2, $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)$, $P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)$, $P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)$, $P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)$, $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)$, $P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)$ осуществляется имитационное моделирование MAP-потока на заданном отрезке времени $[0, T_m]$, где T_m – время моделирования (время наблюдения за потоком), – отдельная s-я реализация (испытание модели);

2) производится расчёт апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$;

3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$;

4) определяется значение d_s – суммарной протяжённости интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$, – для s-го испытания;

5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_s = \dfrac{d_s}{T_m}$;

6) производится повторение N раз, $s = \overline{1, N}$, шагов $1 - 5$ для расчёта оценки полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N испытаниях. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{\text{ош}} = \dfrac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} \hat{p}_s$ и её выборочная дисперсия $\hat{D}_{\text{ош}} = \dfrac{1}{N-1}\sum_{s=1}^{N}\left(\hat{p}_s - \hat{P}_{\text{ош}}\right)^2$.

Статистические эксперименты проведены для значений параметров потока, представленных в табл. 2.2, и устанавливают зависимость оценок $\hat{P}_{\text{ош}}$ и $\hat{D}_{\text{ош}}$ от времени моделирования T_m при изменении параметра λ_1. В табл. 2.3 – 2.7 во второй и третьей строках для каждого T_m приведены значения $\hat{P}_{\text{ош}}$ и $\hat{D}_{\text{ош}}$, полученные при $N = 100$.

Таблица 2.2

Исходные данные для статистического эксперимента

$\lambda_2 = 1$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}98$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}01$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}01$
	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}7$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}2$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}1$

Таблица 2.3

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 4$)

T_m	5	10	20	50	100	200	300	400	500	1000
$\hat{P}_{\text{ош}}$	0,218	0,201	0,184	0,140	0,115	0,108	0,097	0,101	0,088	0,091
$\hat{D}_{\text{ош}}$	0,052	0,039	0,031	0,028	0,019	0,010	0,005	0,002	0,001	0,001

Таблица 2.4

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5$)

T_m	5	10	20	50	100	200	300	400	500	1000
$\hat{P}_{\text{ош}}$	0,203	0,194	0,160	0,113	0,104	0,101	0,098	0,096	0,092	0,086
$\hat{D}_{\text{ош}}$	0,036	0,027	0,024	0,017	0,008	0,007	0,003	0,001	0,001	0,001

Таблица 2.5

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 6$)

T_m	5	10	20	50	100	200	300	400	500	1000
$\hat{P}_{\text{ош}}$	0,213	0,186	0,137	0,112	0,098	0,101	0,091	0,094	0,089	0,087
$\hat{D}_{\text{ош}}$	0,042	0,024	0,019	0,016	0,007	0,005	0,001	0,001	0,001	0,001

Таблица 2.6

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 7$)

T_m	5	10	20	50	100	200	300	400	500	1000
$\hat{P}_{\text{ош}}$	0,196	0,184	0,125	0,108	0,104	0,095	0,092	0,094	0,089	0,089
$\hat{D}_{\text{ош}}$	0,022	0,017	0,012	0,006	0,005	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001

Таблица 2.7

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 8$)

T_m	5	10	20	50	100	200	300	400	500	1000
$\hat{P}_{\text{ош}}$	0,188	0,172	0,098	0,101	0,096	0,095	0,090	0,088	0,091	0,082
$\hat{D}_{\text{ош}}$	0,013	0,009	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Анализ численных результатов, приведённых в табл. 2.3 – 2.7, показывает:

1) оценка вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{\text{ош}}$ является достаточно стабильной для $T_m \geq 100$ ед. времени;

2) при фиксированном времени моделирования T_m оценка $\hat{P}_{\text{ош}}$ уменьшается в случае увеличения параметра λ_1, так как увеличивается разность $\lambda_1 - \lambda_2$, то есть улучшаются условия различимости первого и второго состояний MAP-потока событий.

При заданных параметрах алгоритм оптимальной оценки состояний MAP-потока событий обеспечивает приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения при достаточно малой выборочной дисперсии оценки.

Глава 3
Оптимальное оценивание состояний дважды стохастических потоков событий при наличии непродлевающегося мёртвого времени

В главе 3 рассматриваются алгоритмы оптимального оценивания состояний дважды стохастических потоков различных типов при неполной наблюдаемости потоков, то есть оптимальное оценивание состояний потока осуществляется в условиях, когда не все события (моменты их наступления) доступны наблюдению.

Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ изучаемых потоков является принципиально ненаблюдаемым (скрытым) марковским процессом. Задача заключается в оценке состояний процесса $\lambda(t)$ (потока) по наблюдениям за моментами наступления событий в наблюдаемом потоке. Оценка состояний осуществляется методом максимума апостериорной вероятности, который обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения. Задача оценивания состояний потока в условиях неполной наблюдаемости решена для обобщённого асинхронного и обобщённого полусинхронного потоков, являющихся обобщением представленных в параграфах 1.2 и 1.4 асинхронного и полусинхронного потоков, а также для MAP-потока событий, рассмотренного в параграфе 1.5.

3.1. Условия неполной наблюдаемости за дважды стохастическими потоками событий

В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда все события доступны

наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие может повлечь за собой ненаблюдаемость последующих событий. Одним из искажающих факторов при оценке состояний дважды стохастических потоков событий выступает мёртвое время регистрирующих приборов [21], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события исходного потока, наступившие в течение периода мёртвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время T. Все устройства регистрации делятся на две группы. Первую группу составляют устройства с непродлевающимся мёртвым временем, когда события, наступившие в течение мёртвого времени, не вызывают продления его периода. По окончании мёртвого времени первое наступившее событие снова создаёт период мёртвого времени длительности T. Вторую группу составляют устройства с продлевающимся мёртвым временем, когда события хотя и не наблюдаются в течение мёртвого времени, всё же вызывают продление периода ненаблюдаемости на ту же величину T; наблюдаться будет лишь то событие, которое наступило после окончания последнего периода мёртвого времени. По окончании общего периода ненаблюдаемости первое наступившее событие снова создаёт период мёртвого времени длительности T. В этом смысле мёртвое время выступает искажающим фактором при решении задачи оценивания, так как эффект мёртвого времени влечёт за собой потери событий потока, что отрицательно сказывается на оценивании состояний потока.

В качестве одного из примеров рассмотрим поток электронов, фотонов и других элементарных частиц, поступающих на регистрирующий прибор – счётчик элементарных частиц. Поступившая на счётчик частица как бы отключает его и делает недоступным для других элементарных частиц потока. Время, в течение которого счётчик закрыт для регистрации электронов, фотонов, протонов и других элементарных частиц, можно рассматривать как мёртвое время прибора, регистрирующего элементарные частицы.

В качестве другого примера приведём протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемый в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мёртвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В последующих параграфах настоящей главы решается задача об оптимальной оценке состояний дважды стохастических потоков событий в условиях неполной наблюдаемости – при наличии непродлевающегося мёртвого времени.

3.2. Оптимальная оценка состояний обобщённого асинхронного потока при непродлевающемся мёртвом времени

3.2.1. Описание обобщённого асинхронного потока в условиях неполной наблюдаемости

Рассматривается обобщение асинхронного дважды стохастического потока событий (параграф 1.2), заключающееся в возможности инициирования дополнительных событий; далее будем говорить *обобщённый асинхронный поток*.

Отличие обобщённого асинхронного потока событий от асинхронного заключается в том, что в момент времени перехода сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$ инициируется дополнительное событие. Аналогично при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется дополнительное событие с

вероятностью q $(0 \le q \le 1)$. Заметим, что события пуассоновского потока и дополнительные события неразличимы для наблюдателя [22].

Лемма 3.1. Сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесса $\lambda(t)$ для обобщённого асинхронного потока событий является марковским.

Доказательство марковости процесса $\lambda(t)$ аналогично доказательству марковского свойства процесса $\lambda(t)$ для асинхронного потока событий (лемма 1.1).

Определим матрицы инфинитезимальных характеристик сопровождающего процесса $\lambda(t)$.

Поскольку обобщение асинхронного потока связано с возможностью инициирования дополнительных событий в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j, $i \ne j$, $i, j = 1,2$, то элементы $d_{ii}^{(1)}$ и $d_{ii}^{(0)}$, $i = 1,2$, матриц инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D_0}$ и $\mathbf{D}_1$ для обобщённого асинхронного потока выпишутся в том же виде, что и в (1.2) для асинхронного потока. Определим $d_{ij}^{(1)}$ и $d_{ij}^{(0)}$ для $i \ne j, i, j = 1,2$.

Рассмотрим возможные ситуации на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, связанные с переходом процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2. Пусть $\lambda(t) = \lambda_1$. Тогда:

1) за время Δt закончится состояние S_1 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}\right) = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$, наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1 \Delta t e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью единица, и в момент перехода наступит дополнительное событие с вероятностью p; вероятность описанной ситуации равна

$$\left(\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\right) p = o(\Delta t);$$

2) за время Δt закончится состояние S_1 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_1\Delta t}\right) = \alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$, наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $\lambda_1\Delta t e^{-\lambda_1\Delta t} = \lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью единица, и в момент перехода не наступит дополнительное событие с вероятностью $(1-p)$; вероятность описанной ситуации есть

$$\left(\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\right)(1-p) = o(\Delta t);$$

3) за время Δt закончится состояние S_1 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_1\Delta t}\right) = \alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1\Delta t} = 1 - \lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_1 в S_2 с вероятностью единица, и в момент перехода наступит дополнительное событие с вероятностью p; вероятность данной ситуации равна

$$\left(\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1 - \lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\right) p = p\alpha_1\Delta t + o(\Delta t);$$

4) за время Δt закончится состояние S_1 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_1\Delta t}\right) = \alpha_1\Delta t + o(\Delta t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1\Delta t} = 1 - \lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_1 в S_2 с вероятностью единица, и в момент перехода не наступит дополнительное событие с вероятностью $\left(1-p\right)$; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\left(\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\right)(1-p) = (1-p)\alpha_1\Delta t + o(\Delta t).$$

Других возможностей, связанных с переходом процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2, нет. С учётом (1.1) рассмотрим следующие пределы:

$$d_{12}^{(1)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = p\alpha_1$$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в S_2, связанного с наступлением события потока;

$$d_{12}^{(0)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1-p)\alpha_1\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = (1-p)\alpha_1$$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в S_2, не связанного с наступлением события потока.

Пусть в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_2$. Опишем возможные ситуации на полуинтервале $\left[t, t+\Delta t\right)$, связанные с переходом процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1. Имеем:

5) за время Δt с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right) = \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$ закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$, наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2\Delta t e^{-\lambda_2\Delta t} = \lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из второго состояния в первое с вероятностью единица, и в момент перехода наступит дополнительное событие с вероятностью q; вероятность описанной ситуации равна

$$\left(\alpha_2\Delta t + o(\Delta t)\right)\left(\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)\right)q = o(\Delta t);$$

6) за время Δt с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right) = \alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$ закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$, наступит событие пуассо-

новского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2 \Delta t e^{-\lambda_2 \Delta t} = \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из второго состояния в первое с вероятностью единица, и в момент перехода не наступит дополнительное событие с вероятностью $(1-q)$; вероятность данной ситуации есть

$$\left(\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)\right)\left(\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)\right)(1-q) = o(\Delta t);$$

7) за время Δt с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}\right) = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2 \Delta t} = 1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из второго состояния в первое с вероятностью единица, и в момент перехода наступит дополнительное событие с вероятностью q; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\left(\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)\right) q = q\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t);$$

8) за время Δt с вероятностью $\left(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}\right) = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2 \Delta t} = 1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из второго состояния в первое с вероятностью единица, и в момент перехода не наступит дополнительное событие с вероятностью $(1-q)$; вероятность описанной ситуации есть

$$\left(\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)\right)\left(1 - \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)\right)(1-q) = (1-q)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t).$$

Других исходов, связанных с переходом процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, нет. С учётом (1.1) выпишем следующие пределы:

$$d_{21}^{(1)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = q\alpha_2$$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, связанного с наступлением события потока;

$$d_{21}^{(0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1-q)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = (1-q)\alpha_2$$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, не связанного с наступлением события потока.

Отметим, что элементы $d_{ij}^{(1)}$ и $d_{ij}^{(0)}$, $i, j = 1,2$, матриц инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D_0}$ и $\mathbf{D}_1$ процесса $\lambda(t)$ для обобщённого асинхронного потока событий удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{2} d_{1j}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{1j}^{(1)} = -\left(\lambda_1 + \alpha_1\right) + (1-p)\alpha_1 + \lambda_1 + p\alpha_1 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2} d_{2j}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{2j}^{(1)} = -\left(\lambda_2 + \alpha_2\right) + (1-q)\alpha_2 + \lambda_2 + q\alpha_2 = 0.$$

Матрицы $\mathbf{D_0} = \left\| d_{ij}^{(0)} \right\|$ и $\mathbf{D}_1 = \left\| d_{ij}^{(1)} \right\|$, $i, j = 1,2$, принимают вид

$$\mathbf{D_0} = \begin{Vmatrix} -\left(\lambda_1 + \alpha_1\right) & (1-p)\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -\left(\lambda_2 + \alpha_2\right) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & p\alpha_1 \\ q\alpha_2 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$ – априорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1,2$, при условии, что функционирование обобщённого асинхронного потока началось в момент времени t^0.

Лемма 3.2. Для обобщённого асинхронного потока событий априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ имеют вид (1.3).

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1.3, так как поведение процесса $\lambda(t)$ для обобщённого асинхронного потока событий идентично поведению процесса $\lambda(t)$ для асинхронного потока.

Следствие леммы 3.2. Для обобщённого асинхронного потока событий априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ совпадают с априорными финальными вероятностями π_1 и π_2 для асинхронного потока, представленными формулами (1.4).

Замечание 3.1. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ для обобщённого асинхронного потока событий не совпадает с интенсивностью потока, так как, например, если при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 дополнительное событие инициируется (с вероятностью p) в первом состоянии, то интенсивность потока в состоянии S_1 есть $(\lambda_1 + p\alpha_1)$; аналогично в состоянии S_2 интенсивность потока есть $(\lambda_2 + q\alpha_2)$. Тогда средняя интенсивность обобщённого асинхронного потока равна

$$\Lambda = (\lambda_1 + p\alpha_1)\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + (\lambda_2 + q\alpha_2)\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Для других возможных вариантов инициирования (с соответствующими вероятностями) дополнительных событий интенсивность потока не совпадает с процессом $\lambda(t)$; при этом средняя интенсивность потока Λ для всех вариантов определяется по вышеприведённой формуле. То есть средняя интенсивность потока Λ не зависит от инициирования дополнительных событий в том или ином состоянии (в S_1 или в S_2) при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j, $i, j = 1,2$, $i \neq j$.

Замечание 3.2. При $p = q = 0$ имеет место асинхронный поток событий.

Отметим, что в определении обобщённого асинхронного потока в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает дополнительное событие при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1,2$, $i \neq j$. Несущественность данного обстоятельства при аналитическом решении задачи об оценке состояний объясняется тем, что наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния i в j, $i, j = 1,2$, $i \neq j$, происходят мгновенно. Указанное обстоятельство должно учитываться при имитационном моделировании обобщённого асинхронного потока событий.

Будем рассматривать описанный обобщённый асинхронный поток событий, функционирующий в условиях неполной наблюдаемости потока. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мёртвое время), в течение которого другие события исходного обобщённого асинхронного потока недоступны наблюдению (теряются). По окончании периода мёртвого времени первое наступившее событие снова создает период мёртвого времени длительности T и т. д. Вариант возникающей ситуации приведён на рис. 3.1, где S_1 и S_2 – состояния сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в S_2, отмечены буквой p, из состояния S_2 в S_1, отмечены буквой q; штриховкой обозначены периоды мёртвого времени; чёрными кружками обозначены события обобщённого асинхронного потока, недоступные наблюдению; $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Описанная схема формирования наблюдаемого потока событий в условиях непродлевающегося мёртвого времени справедлива на протяжении всей третьей главы.

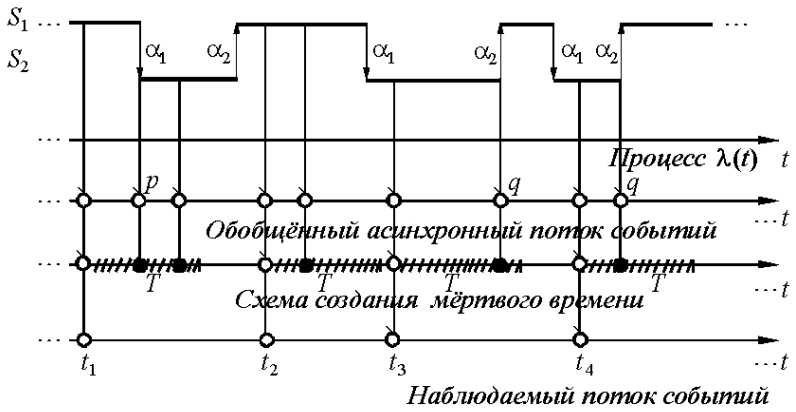

Рис. 3.1. Формирование наблюдаемого потока событий

Замечание 3.3. Если рассмотреть обобщённый асинхронный поток при отсутствии мёртвого времени, то аналогично асинхронному потоку (лемма 1.2) последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, порождённая моментами наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, является вложенной цепью Маркова. В случае наличия мёртвого времени последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, порождённая моментами наступления событий в наблюдаемом потоке $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, тем более образует вложенную цепь Маркова за счёт эффекта мёртвого времени.

Необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t требуется определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1,...,t_m,t) = P(\lambda(t) = \lambda_i \mid t_1,...,t_m,t)$, $i = 1,2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество наступивших за время t событий наблюдаемого потока); при этом $w(\lambda_1 \mid t) + w(\lambda_2 \mid t) = 1$.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$ и $w(\lambda_2 \mid t)$.

3.2.2. Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности

Момент вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots$, между соседними событиями наблюдаемого потока. Для начального интервала (t_0, t_1) момент t будет лежать между моментом начала наблюдения t_0 и моментом наступления первого события наблюдаемого потока t_1.

Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}), значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, так как наблюдаемое в момент времени t_k событие порождает период мёртвого времени длительности T, то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мёртвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1}, то есть интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: первый – полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Подчеркнём, что условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ и интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ принципиально разные. Действительно, на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток принципиально недоступен наблюдению, в то время как на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем. Кроме того, для нахождения вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ необходимо точно знать значение T

либо предварительно осуществить оценку T. В противном случае отсутствие такой информации делает невозможным нахождение явного вида апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)\right)$. Здесь предполагается, что значение T известно точно.

3.2.3. Вид апостериорной вероятности на временных интервалах наблюдаемости потока

Следуя методике, приведённой в главе 2 для асинхронного, синхронного, полусинхронного и MAP-потока событий, получим явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на интервалах (t_0, t_1) и $(t_k + T, t_{k+1})$, когда поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T, доступен наблюдению.

Выведем рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей состояний обобщённого асинхронного потока событий. Как и в главе 2 (параграф 2.1) введём в рассмотрение двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$, где $\lambda^{(l)} = \lambda(l\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)} = l\Delta t\left(\lambda^{(l)} = \lambda_i, i = 1,2\right)$; $r_l = r_l(\Delta t)$ – число событий потока, наступивших на интервале времени $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ длительности Δt.

Лемма 3.3. Случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ для обобщённого асинхронного потока событий является марковским процессом.

Доказательство марковости двумерного случайного процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ аналогично доказательству марковского свойства процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ для асинхронного потока событий (лемма 2.1).

Для марковского процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$, $l = \overline{0, m+1}$, имеет место рекуррентная формула (2.6) для апостериорных вероятностей состояний дважды стохастических потоков событий. Следует напомнить, что наблюдение за потоком осуществляется на интервалах времени $(m\Delta t, (m+1)\Delta t) = (t, t+\Delta t)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Количество событий в наблюдаемом потоке, наступивших на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, состоит из событий пуассоновского потока интенсивности $\lambda(m\Delta t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, либо из дополнительных событий, инициируемых в моменты перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, либо из тех и других. В силу сказанного инициирование дополнительных событий отражается в вероятности перехода $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)$ в формуле (2.6); наступление событий пуассоновского потока отражается в вероятности $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ в (2.6), где r_m, r_{m+1} – число событий пуассоновского потока, наступивших в наблюдаемом потоке на интервалах $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ соответственно. В силу малости величины Δt число событий $r_m = 0$ или $r_m = 1$ (аналогично для r_{m+1}). Количество переходов процесса $\lambda(t)$ на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ более одного имеет вероятность $o(\Delta t)$. Ситуация, когда на интервале времени длительности Δt одновременно наступает событие пуассоновского потока и происходит переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j (с инициированием дополнительного события либо без его инициирования), имеет вероятность $o(\Delta t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

Рассмотрим переходную вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \times$ $\times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ в (2.6).

Утверждение 3.1. Условная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)$ для обобщённого асинхронного потока событий принимает вид $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) = p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right),\ d = 0;1$.

Во-первых, справедливо $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) = p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$. Действительно, число событий r_m наблюдаемого потока, наступивших на интервале времени $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, не влияет на значение $\lambda^{(m+1)} = \lambda((m+1)\Delta t) = \lambda_j,\ j = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ в момент времени $(m+1)\Delta t$ (процесс $\lambda(t)$ «живёт своей жизнью»); на значение $\lambda^{(m+1)}$ влияет только значение $\lambda^{(m)} = \lambda(m\Delta t) = \lambda_i,\ i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t = m\Delta t$.

Во-вторых, подчеркнём, что дополнительное событие на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ наступает (либо не наступает) при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j, $i, j = 1,2$, $i \neq j$. Это обстоятельство нужно отразить в вероятности $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$: $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) = p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right),\ d = 0;1$, если осуществлён переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i, имеющего место в момент времени $t = m\Delta t$, в состояние S_j, имеющего место в момент времени $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, при этом $i \neq j$, $i, j = 1,2$; $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) = p_0\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$, если имеет место переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_i (дополнительное событие не инициируется); $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) = p_1\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) = 0$ в случае перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_i с инициированием дополнительного события, $i = 1,2$.

Если $d = 0 \quad (i \neq j)$, то на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в S_2 дополнительное событие не инициируется с вероятностью $1 - p$; соответственно, при переходе $\lambda(t)$ из S_2 в S_1 не инициируется с вероятностью $1 - q$. Если $d = 1 \quad (i \neq j)$, то дополнительное событие инициируется с вероятностью p при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в S_2; соответственно с вероятностью q при переходе $\lambda(t)$ из S_2 в S_1. *Утверждение доказано.*

Утверждение 3.2. Условная вероятность $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ для обобщённого асинхронного потока событий принимает вид $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)$.

Имеем, во-первых, $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)$, так как число событий r_{m+1} наблюдаемого потока, наступивших на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, не зависит от числа событий r_m, наступивших на интервале $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, поскольку потоки событий в состояниях S_1 в S_2 процесса $\lambda(t)$ пуассоновские. Во-вторых,

$$p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right) = \frac{p\left(\lambda^{(m)}, r_{m+1}, \lambda^{(m+1)}\right)}{p\left(\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right)} = \\ = \frac{p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_{m+1}\right) p\left(\lambda^{(m)}, r_{m+1}\right)}{p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(\lambda^{(m)}\right)}. \tag{3.1}$$

Так как на значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $(m+1)\Delta t$ число событий r_{m+1} наблюдаемого потока, наступивших на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t)$, не влияет, то $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_{m+1}\right) = p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)$. В силу этого из (3.1) следует $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right) = p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)$. *Утверждение доказано.*

С учётом утверждения 3.1 и утверждения 3.2 справедливое для апостериорных вероятностей состояний дважды стохастических потоков событий рекуррентное соотношение (2.6) в случае обобщённого асинхронного потока событий принимает вид

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right)}, \quad (3.2)$$

$$d=0;1.$$

Рассмотрим поведение апостериорной вероятности на временном интервале $(t,t+\Delta t)$, расположенном на интервалах $\left(t_0,t_1\right)$ и $\left(t_k+T,t_{k+1}\right)$, где t_0 – момент времени начала наблюдения за потоком; t_1 – момент времени наблюдения первого события потока; t_k+T – момент окончания периода мёртвого времени длительности T, порождённого событием, наступившим в момент времени t_k; t_{k+1} – момент времени наступления очередного события потока, $k=1,2,\ldots$. Отметим, что события в моменты времени t_1,t_k,t_{k+1} могут быть событиями пуассоновских потоков с параметрами λ_1 либо λ_2, либо дополнительными событиями. Таким образом, на интервале $(t,t+\Delta t)$ нет событий потока. Последнее означает, что в (3.2) $r_{m+1}=0$ и $d=0$.

Для определённости в левой части и в числителе формулы (3.2) положим значение $\lambda^{(m+1)}=\lambda((m+1)\Delta t)=\lambda_1$ в момент времени $t+\Delta t=((m+1)\Delta t)$.

Лемма 3.4. Поведение $w\left(\lambda_1 \mid t\right)$ для обобщённого асинхронного потока на начальном интервале наблюдения $\left(t_0,t_1\right)$ и на интерва-

лах $(t_k + T, t_{k+1})$, $k = 1,2,\ldots$, между моментом окончания периода мёртвого времени и моментом времени наступления очередного события наблюдаемого потока определяется дифференциальным уравнением Риккати

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + (1-2q)\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t) - \\ -(\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2)\, w^2(\lambda_1 \mid t) = (1-q)\alpha_2. \qquad (3.3)$$

Доказательство. В состоянии S_i процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_i, следовательно, условные вероятности $p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_i\right)$, $i = 1,2$, того, что на интервале $(t, t+\Delta t)$ не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i при условии, что в момент времени t имеет место состояние S_i, выпишутся в виде

$$p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_i\right) = e^{-\lambda_i \Delta t} = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t),\ i = 1,2. \qquad (3.4)$$

С учётом определения обобщённого асинхронного потока событий ситуации, когда за промежуток времени длительности Δt имеет место переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j, $i, j = 1,2$, и дополнительное событие при этом не инициируется, имеют вероятности

$$p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) = (1-p)\left(1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}\right) = \\ = (1-p)\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) = (1-q)\left(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}\right) = \\ = (1-q)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t), \qquad (3.5) \\ p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) = e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) = e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1 - \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t).$$

Отметим, что понятия, касающиеся процесса $\lambda(t)$, – «остаться в состоянии S_i» и «переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_i», $i=1,2$, в рассматриваемой постановке задачи являются эквивалентными.

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.2), учитывая введённые обозначения, находим числитель A и знаменатель B в (3.2) в виде

$$\begin{gathered} A = w(\lambda_1 \mid t)\, p_0(\lambda_1 \mid \lambda_1)\, p(r_{m+1}=0 \mid \lambda_1) + \\ + w(\lambda_2 \mid t)\, p_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\, p(r_{m+1}=0 \mid \lambda_2) = \\ = w(\lambda_1 \mid t) - \left[(\lambda_1+\alpha_1) w(\lambda_1 \mid t) - (1-q)\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t + o(\Delta t), \\ B = 1 - \left[(\lambda_1 + p\alpha_1) w(\lambda_1 \mid t) + (\lambda_2 + q\alpha_2) w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t + o(\Delta t), \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $w(\lambda_i \mid t) = w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_i \mid t\right)$, $i=1,2$.

Подставляя (3.6) в (3.2) и учитывая, что $B^{-1} = 1 + \left[(\lambda_1 + p\alpha_1) w(\lambda_1 \mid t) + (\lambda_2 + q\alpha_2) w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t + o(\Delta t)$, получаем (с точностью до членов $o(\Delta t)$) равенство (3.2) в виде

$$\begin{gathered} w(\lambda_1 \mid t+\Delta t) - w(\lambda_1 \mid t) = \left[(\lambda_1 + p\alpha_1) w^2(\lambda_1 \mid t) + (\lambda_2 + q\alpha_2) w(\lambda_2 \mid t) - \right. \\ \left. - (\lambda_1 + \alpha_1) w(\lambda_1 \mid t) + (1-q)\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\right]\Delta t + o(\Delta t). \end{gathered}$$

Выполняя несложные преобразования и учитывая при этом, что $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$, сведём последнее равенство в результате предельного перехода при $\Delta t \to 0$ к уравнению Риккати 3.3. *Лемма доказана.*

Будем рассматривать два случая задания параметров обобщённого асинхронного потока событий.

I. *Общий случай*, когда в уравнении (3.3) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \neq 0$.

Явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)\right)$, принимающей значение $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$,

$k=1,2,\ldots$, в момент окончания мёртвого времени t_k+T, задаётся следующей леммой.

Лемма 3.5. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1\,|\,t)$ как функции времени между моментом окончания периода мёртвого времени t_k+T и моментом времени t_{k+1}, $k=1,2,\ldots$, наступления очередного события наблюдаемого потока определяется формулой

$$w(\lambda_1\,|\,t)=$$

$$=\left\{w_1\left[w_2-w(\lambda_1\,|\,t_k+T)\right]-w_2\left[w_1-w(\lambda_1\,|\,t_k+T)\right]e^{-a(w_2-w_1)(t-t_k-T)}\right\}\times \quad (3.7)$$

$$\times\left\{\left[w_2-w(\lambda_1\,|\,t_k+T)\right]-\left[w_1-w(\lambda_1\,|\,t_k+T)\right]e^{-a(w_2-w_1)(t-t_k-T)}\right\}^{-1},$$

$$w_1=\frac{1}{2a}\Bigg(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1+(1-2q)\alpha_2-$$

$$-\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\Bigg), \quad (3.8)$$

$$w_2=\frac{1}{2a}\Bigg(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1+(1-2q)\alpha_2+$$

$$+\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\Bigg),$$

$$a=\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2\neq 0,$$

где $0\le w_1<1$, $w_2\ge 1$ при $a>0$; $0<w_1\le 1$, $w_2\le 0$ при $a<0$; $t_k+T<t<t_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$; $w(\lambda_1\,|\,t_k+T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1\,|\,t)$.

Доказательство. В (3.3) обозначим коэффициенты $a=\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2$, $b=-(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1+(1-2q)\alpha_2)$, $c=(1-q)\alpha_2$ и проинтегрируем уравнение (3.3) методом разделения переменных с учётом того, что в момент времени t_k+T, $k=1,2,\ldots$, окончания периода мёртвого времени апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ принимает значение $w(\lambda_1\,|\,t_k+T)$:

$$\int\limits_{w_1(\lambda_1|t_k+T)}^{w(\lambda_1|t)} \frac{dw(\lambda_1\,|\,t)}{a\left[w(\lambda_1\,|\,t)-w_1\right]\left[w(\lambda_1\,|\,t)-w_2\right]} = \int\limits_{t_k+T}^{t} dt\,, \qquad (3.9)$$

где w_1, w_2 – корни уравнения $f\left(w(\lambda_1\,|\,t)\right)=0$, $f\left(w(\lambda_1\,|\,t)\right)=$ $=aw^2(\lambda_1\,|\,t)+bw(\lambda_1\,|\,t)+c$. Находим

$$w_{1,2}=\frac{\left[\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1+(1-2q)\alpha_2\right]\mp\sqrt{D}}{2a},$$

$$D=\left[\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1+(1-2q)\alpha_2\right]^2-4(1-q)\alpha_2\left[\lambda_1-\lambda_2+p\alpha_1-q\alpha_2\right]=$$
$$=\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q).$$

Очевидно, что $D>0$, значит корни w_1, w_2 действительные и различные. С целью исследования корней w_1 и w_2 рассмотрим случаи:

1. Если $a>0$, тогда $w_1<w_2$. При этом $f(0)=(1-q)\alpha_2>0$, $f(0)=0$ при $q=1$; $f(1)=a+b+c=-(1-p)\alpha_1<0$, $f(1)=0$ при $p=1$. В рассматриваемом случае функция $f\left(w(\lambda_1\,|\,t)\right)$ является выпуклой, следовательно, $0\le w_1<1$, $w_2\ge 1$.

2. Если $a<0$, тогда $w_2<w_1$. В случае 1 показано, что $f(0)\ge 0$, $f(1)\le 0$. Функция $f\left(w(\lambda_1\,|\,t)\right)$ является вогнутой, следовательно, $w_2\le 0$, $0<w_1\le 1$.

В результате необходимых преобразований недифференциального уравнения (3.9) находим апостериорную вероятность $w(\lambda_1\,|\,t)$ в виде (3.7). *Лемма доказана.*

Замечание 3.4. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1\,|\,t)$ как функции времени на начальном интервале (t_0,t_1) определяется по формуле (3.7) при $k=0$, при этом начальное условие $w(\lambda_1\,|\,t_0+T)$ заменяется на $w(\lambda_1\,|\,t_0)$ (момент времени t_0+T заменяется на момент t_0).

Вычисление $w(\lambda_1 \mid t)$ по формуле (3.7) в произвольный момент времени t, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$, согласно лемме 3.5 невозможно без знания начального условия $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ – значения апостериорной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент окончания периода мёртвого времени длительности T.

3.2.4. Вид апостериорной вероятности на интервалах мёртвого времени

Рассмотрим смежный с интервалом $(t_k + T, t_{k+1})$ полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1,2,\ldots$, на котором события исходного обобщённого асинхронного потока не наблюдаются; событие исходного потока наблюдается лишь в граничной точке t_k. Апостериорную вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в граничной точке t_k (момент наступления события потока) будем считать известной и равной $w(\lambda_1 \mid t_k)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t_k) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k)\right)$, $k = 1,2,\ldots$.

Лемма 3.6. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ для обобщённого асинхронного потока событий на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k) - \pi_1 \right] e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_k)}, \qquad (3.10)$$

$t_k < t \le t_k + T$, $k = 1,2,\ldots$; π_1 определена в (1.4) согласно следствию леммы 3.2; $w(\lambda_1 \mid t_k)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$.

Доказательство. В течение периода мёртвого времени длительности T, то есть на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, обобщённый асинхронный поток событий является ненаблюдаемым. В этой связи поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на $(t_k, t_k + T]$ аналогично поведению априорной вероятности

$\pi_1\left(t \mid t^0\right)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ для обобщённого асинхронного потока событий (лемма 3.2); разница заключается в задании начального значения $w\left(\lambda_1 \mid t\right)$ в момент времени t_k наступления события наблюдаемого потока.

Обозначим апостериорные вероятности того, что в момент времени $t+\Delta t$, $t_k < t+\Delta t \le t_k + T$, где Δt достаточно малая величина, имеет место состояние S_i процесса $\lambda(t)$, в виде $w\left(\lambda_i \mid t+\Delta t\right)$; в момент времени t – $w\left(\lambda_i \mid t\right)$, $i=1,2$. Тогда на полуинтервале $\left[t, t+\Delta t\right)$ возможны следующие ситуации, связанные с поведением процесса $\lambda(t)$:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $w\left(\lambda_1 \mid t\right)$, и за промежуток времени длительности Δt не закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1-\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$; вероятность этой ситуации равна

$$w\left(\lambda_1 \mid t\right)\left(1-\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)\right) = w\left(\lambda_1 \mid t\right) - \alpha_1 w\left(\lambda_1 \mid t\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_2$ с вероятностью $w\left(\lambda_2 \mid t\right)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2 \Delta t}\right) = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, перейдёт из второго состояния в первое; вероятность описанной ситуации равна

$$w\left(\lambda_2 \mid t\right)\left(\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)\right) = \alpha_2 w\left(\lambda_2 \mid t\right)\Delta t + o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_2$ с вероятностью $w\left(\lambda_2 \mid t\right)$, и за промежуток времени длительности Δt не закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\alpha_2 \Delta t} = 1-\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$; вероятность рассмотренной ситуации есть

$$w(\lambda_2 \mid t)\left(1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)=w(\lambda_2 \mid t)-\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $w(\lambda_1 \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_1\Delta t}\right)=\alpha_1\Delta t+o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью единица перейдёт из первого состояния во второе; вероятность этой ситуации равна

$$w(\lambda_1 \mid t)\left(\alpha_1\Delta t+o(\Delta t)\right)=\alpha_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t+o(\Delta t).$$

Других возможностей нет.

Тогда имеем систему равенств:

$$w(\lambda_1 \mid t+\Delta t)=w(\lambda_1 \mid t)-\alpha_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t+\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t+o(\Delta t),$$
$$w(\lambda_2 \mid t+\Delta t)=w(\lambda_2 \mid t)-\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t+\alpha_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t+o(\Delta t).$$

Выполнив в последней необходимые преобразования и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему дифференциальных уравнений относительно апостериорных вероятностей $w(\lambda_i \mid t)$ состояний S_i, $i=1,2$, процесса $\lambda(t)$ на интервалах мёртвого времени:

$$w'(\lambda_1 \mid t)=-\alpha_1 w(\lambda_1 \mid t)+\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t),$$
$$w'(\lambda_2 \mid t)=\alpha_1 w(\lambda_1 \mid t)-\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t);\ w(\lambda_1 \mid t)+w(\lambda_2 \mid t)=1.$$

С учётом условия нормировки выписанная система дифференциальных уравнений сводится к одному уравнению относительно $w(\lambda_1 \mid t)$:

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt}+(\alpha_1+\alpha_2)w(\lambda_1 \mid t)=\alpha_2$$

с начальным условием $w(\lambda_1 \mid t=t_k)=w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k=1,2,\ldots$. Интегрируя выписанное уравнение и принимая во внимание, что $\pi_1=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$, находим (3.10). *Лемма доказана.*

Таким образом, начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$, определяемой по формуле (3.7), рассчитывается по формуле (3.10) в момент времени $t = t_k + T$, $k = 1,2,\ldots$. В свою очередь, применение формулы (3.10) требует знания $w(\lambda_1 \mid t_k)$ – значения апостериорной вероятности в момент времени t_k наступления события потока, которое порождает период мёртвого времени длительности T.

Перейдём к нахождению $w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 1,2,\ldots$. Рассмотрим случай наблюдения одного события потока на интервале $(t, t + \Delta t)$, скажем, в момент времени t_k, $k = 1,2,\ldots$.

Лемма 3.7. В обобщённом асинхронном потоке событий в момент времени t_k апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ задаётся формулой пересчёта

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + q\alpha_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \quad (3.11)$$

$$k = 1,2,\ldots,$$

$$w(\lambda_2 \mid t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0).$$

Доказательство. Рассмотрим два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$. При этом длительность первого интервала есть $\Delta t' = t_k - t$, длительность второго $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$. Примем в (3.2) значение $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. С учётом сделанных обозначений рекуррентное соотношение (3.2) принимает вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + \Delta t'') =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t')\, p_d(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)})\, p(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)})}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t')\, p_d(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)})\, p(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)})}, \quad (3.12)$$

где $p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right) = p_0\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}\right) +$

$$+ p_1\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)}\right).$$

В состоянии S_i процесса $\lambda(t)$ имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_i, следовательно, условные вероятности $p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_i\right)$, $i = 1,2$, того, что на интервале $(t_1, t + \Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_i при условии, что в момент времени t имеет место состояние S_i, выпишутся в виде

$$p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_i\right) = \lambda_i \Delta t e^{-\lambda_i \Delta t} = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t),\ i = 1,2. \quad (3.13)$$

По определению обобщённого асинхронного потока событий ситуации, когда за промежуток времени длительности Δt имеет место переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в S_j, $i, j = 1,2$, и при этом инициируется дополнительное событие, имеют вероятности

$$p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) = p\left(1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}\right) = p\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) = q\left(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t}\right) = q\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t), \quad (3.14)$$

$$p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) = 0,\ p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) = 0.$$

Подставляя (3.4), (3.5), (3.13), (3.14) в (3.12), предварительно сделав обозначение $w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_i \mid t_k - \Delta t'\right) = w\left(\lambda_i \mid t_k - \Delta t'\right)$, $i = 1,2$, выпишем числитель A_1 и знаменатель B_1 в (3.12) в виде

$$A_1 = w\left(\lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right)\Big[p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) \times$$

$$\times p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) + p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) \times$$

$$\times p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right)\Big] + w\left(\lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right) \times$$

$$\times\Big[\,p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)+$$

$$+p_1\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)\Big]= \quad (3.15)$$

$$=\left[\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)+q\alpha_2 w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),$$

$$B_1=w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)\Big[\,p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times$$

$$\times p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)+p_1\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times$$

$$\times p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\Big]+w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\times$$

$$\times\Big[\,p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)+$$

$$+p_1\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)\Big]+$$

$$+w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)\Big[\,p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times$$

$$\times p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)+p_1\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\times$$

$$\times p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)\Big]+w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\times$$

$$\times\Big[\,p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)+$$

$$+p_1\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)\Big]=$$

$$=\left[\left(\lambda_1+p\alpha_1\right)w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)+\left(\lambda_2+q\alpha_2\right)w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)\right]\Delta t+o(\Delta t).$$

Подставляя (3.15) в (3.12), с учётом того, что $w\left(\lambda_2\,|\,t_k-\Delta t'\right)=1-w\left(\lambda_1\,|\,t_k-\Delta t'\right)$, и переходя при этом к пределу при $\Delta t\to 0\ \left(\Delta t'\to 0,\Delta t''\to 0\right)$, получим утверждение леммы. *Лемма доказана.*

Замечание 3.5. В точке t_k, $k=1,2,\ldots$, апостериорная вероятность $w\left(\lambda_i\,|\,t\right)$ состояния S_i, $i=1,2$, сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ для обобщённого асинхронного потока событий терпит разрыв первого рода (имеет место конечный скачок).

3.2.5. Поведение апостериорной вероятности на временной оси для общего и особого случаев задания параметров потока

Полученные для $w(\lambda_1 \mid t)$ формулы (3.7), (3.8), (3.10) и формула пересчёта (3.11) описывают поведение апостериорной вероятности (общий случай задания параметров потока) на временных участках мёртвого времени $[t_k, t_k + T]$, когда поток событий принципиально недоступен наблюдению, на интервалах $(t_k + T, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, когда поток событий наблюдаем, а также, с учётом замечания 3.4, на начальном интервале (t_0, t_1), где в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения вероятности $w(\lambda_1 \mid t_0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0)$ выбирается априорная финальная вероятность π_1 первого состояния случайного процесса $\lambda(t)$, определённая в (1.4).

Леммы 3.5 – 3.7 и замечание 3.4 позволяют сформулировать следующую теорему для общего случая задания параметров потока $\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \neq 0$.

Теорема 3.1. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на оси времени для обобщённого асинхронного потока событий при наличии непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) =$$

$$= \frac{w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_0)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_0)}}, \quad (3.16)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$t_0 \le t \le t_1,\ w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0);$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1 \right] e^{-(\alpha_1+\alpha_2)(t-t_k)}, k = 1,2,..., \qquad (3.17)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + q\alpha_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, k = 1,2,...,$$

$$t_k \le t \le t_k + T;$$

$$w(\lambda_1 \mid t) =$$

$$= \frac{w_1 \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] - w_2 \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k - T)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k - T)}},$$

$$k = 1,2,...,\ t_k + T \le t < t_{k+1};$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = \left\{ w_1 \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] - \right.$$

$$\left. - w_2 \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1} - T)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] \times \right. \qquad (3.18)$$

$$\left. \times e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1} - T)} \right\}^{-1},\ k = 2,3,...,$$

$$w_1 = \frac{1}{2a} \left(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + (1 - 2q)\alpha_2 - \right.$$

$$\left. - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)} \right),$$

$$w_2 = \frac{1}{2a} \left(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + (1 - 2q)\alpha_2 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)} \right),$$

$$a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \neq 0,$$

где $0 \le w_1 < 1$, $w_2 \ge 1$ при $a > 0$; $0 < w_1 \le 1$, $w_2 \le 0$ при $a < 0$.

Доказательство осуществляется объединением формул (1.4), (3.7), (3.8), (3.10), (3.11).

Подчеркнём, что точка $t = t_k + T$ является точкой сшивания решений $w(\lambda_1 \mid t)$, полученных на отрезке $[t_k, t_k + T]$, на котором поток недоступен наблюдению (за исключением граничной точки t_k), и на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, на котором поток событий наблюдаем. Таким образом, функция $w(\lambda_1 \mid t)$ является непрерывной функцией на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ и имеет излом в точке $t = t_k + T$, $k = 1, 2, \ldots$.

II. *Особый случай*, когда в уравнении Риккати (3.3) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 = 0$. Здесь возможны варианты.

1. $p \ne q$, $0 \le p \le 1$, $0 < q \le 1$; при этом $\lambda_1 - \lambda_2 = q\alpha_2 - p\alpha_1$ (случай $q = 0$ невозможен, так как по условию задачи $\lambda_1 > \lambda_2$). Уравнение Риккати (3.3) принимает вид

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + \left[(1-p)\alpha_1 + (1-q)\alpha_2\right] w(\lambda_1 \mid t) = (1-q)\alpha_2 .$$

Интегрируя полученное уравнение и учитывая начальное условие, в силу которого в момент окончания периода мёртвого времени $t_k + T$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ принимает значение $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$, $k = 1, 2, \ldots$, находим решение на участках наблюдаемости потока

$$w(\lambda_1 \mid t) = \\ = (1-q)\alpha_2 / b + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + T) - (1-q)\alpha_2 / b \right] e^{-b(t - t_k - T)}, \qquad (3.19)$$

где $b = (1-p)\alpha_1 + (1-q)\alpha_2$, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$; $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$.

Замечание 3.6. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ на начальном интервале (t_0, t_1) рассчитывается по формуле (3.19) при $k = 0$, при этом начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_0 + T)$ заменяется на $w(\lambda_1 \mid t_0)$ (момент времени $t_0 + T$ заменяется моментом времени t_0 начала наблюдения за потоком).

На интервалах мёртвого времени длительности T, то есть в произвольный момент времени t, $t_k < t \le t_k + T$, t_k, $k = 1,2,...,$ – момент времени наблюдения события потока, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ рассчитывается (как и в общем случае задания параметров, когда $a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \neq 0$) по формуле (3.17), в которой $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ – начальное значение вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_k, определяемое по формуле пересчёта.

Формула пересчёта (3.11) примет вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{q\alpha_2 + (\lambda_1 - q\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + q\alpha_2},\ k = 1,2,..., \quad (3.20)$$

где

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= (1-q)\alpha_2 / b + \left[w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) - (1-q)\alpha_2 / b \right] e^{-b(t_k - t_{k-1} - T)}, \quad (3.21)$$

$$k = 2,3,...,\ b = (1-\mathrm{p})\alpha_1 + (1-q)\alpha_2.$$

2. $p \neq q$, $0 < p \le 1$, $0 < q \le 1$ и $\lambda_1 = q\alpha_2$, $\lambda_2 = p\alpha_1$. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1,2,...,$ рассчитывается по формуле (3.19).

В произвольный момент времени t, $t_k < t \le t_k + T$, расчёт апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ производится по формуле (3.17), в которой апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ в момент вре-

мени наступления события наблюдаемого потока t_k, $k=1,2,...$, определяется по формуле пересчёта (3.11), принимающей в данном случае задания параметров потока вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{q\alpha_2}{p\alpha_1 + q\alpha_2},\ k = 1,2,\ldots. \qquad (3.22)$$

Замечание 3.7. В рассмотренном особом случае 2 апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния случайного процесса $\lambda(t)$ не зависит от предыстории, то есть не зависит от моментов времени наступления событий до момента времени t_k, $k=1,2,\ldots$.

Таким образом, в рассмотренном особом случае 2 задания параметров обобщённый асинхронный поток событий является стационарным ординарным потоком с ограниченным последствием или потоком типа P (потоком Пальма) [2].

3. $p = q$, $0 < p \le 1$. Решение (3.19) принимает вид

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + T) - \pi_1 \right] e^{-(1-p)(\alpha_1+\alpha_2)(t-t_k-T)}, \qquad (3.23)$$

где $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$; $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$ – значение апостериорной вероятности, вычисленное в момент окончания $t_k + T$ периода мёртвого времени длительности T.

Замечание 3.8. На начальном интервале (t_0, t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ рассчитывается по формуле (3.23) при $k = 0$. Начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_0 + T)$ при этом заменяется на $w(\lambda_1 \mid t_0)$ (момент времени $t_0 + T$ заменяется моментом времени t_0).

Когда поток событий принципиально ненаблюдаем, то есть в любой момент времени t, $t_k < t \le t_k + T$, расчёт апостериорной вероятности осуществляется по формуле (3.17), в которой $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ – начальное значение апостериорной вероятности

$w(\lambda_1 \mid t)$, вычисленное в момент времени t_k, $k = 1,2,\ldots$, наступления события наблюдаемого потока по формуле пересчёта (3.11), принимающей в данном особом случае 3 вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{p\alpha_2 + (\lambda_1 - p\alpha_2) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + p\alpha_2}, \; k = 1,2,\ldots . \quad (3.24)$$

В (3.24) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t_k - 0)$ рассчитывается по формуле

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) - \pi_1 \right] e^{-(1-p)(\alpha_1+\alpha_2)(t_k - t_{k-1} - T)}, \quad k = 2,3,\ldots . \quad (3.25)$$

В рассмотренном особом случае точка $t = t_k + T$ по-прежнему является точкой сшивания решений $w(\lambda_1 \mid t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1,2,\ldots$.

3.2.6. Алгоритм оценки состояний обобщённого асинхронного потока событий при наличии мёртвого времени и численные результаты

Полученные в подпараграфах 3.2.3 – 3.2.5 формулы позволяют сформулировать для *общего случая* задания параметров потока, когда в уравнении Риккати (3.3) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \neq 0$, алгоритм расчёта вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$, $(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t))$ первого состояния случайного процесса $\lambda(t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t:

1) в момент времени начала наблюдения за потоком $t_0 = 0$ в качестве начального значения апостериорной вероятности задаётся $w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)$;

2) по формуле (3.16) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наступления первого события наблюдаемого потока; величины w_1 и w_2 определены в (3.8);

3) по формуле (3.16) вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_1: $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле (3.11) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$, являющаяся начальным значением для $w(\lambda_1 \mid t)$ в формуле (3.17);

5) в любой момент времени t, $t_1 < t < t_1 + T$, по формуле (3.17) вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$;

6) в момент времени $t = t_1 + T$ по формуле (3.17) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t = t_1 + T)$, являющаяся начальным значением для $w(\lambda_1 \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) для $k = 1$ по формуле (3.7) вычисляется $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $t_1 + T < t < t_2$, где t_2 – момент наблюдения второго события потока;

8) k увеличивается на единицу и для $k = 2$ по формуле (3.18) вычисляется $w(\lambda_1 \mid t_2 - 0)$;

9) алгоритм переходит на шаг 4, затем шаги 4 – 8 повторяются для $k = 2$ и так далее.

По ходу вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t по критерию максимума апостериорной вероятности выносится решение о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ (обобщённого асинхронного потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T): если $w(\lambda_1 \mid t) \geq w(\lambda_2 \mid t)$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Для *особого случая* задания параметров потока, когда в уравнении Риккати (3.3) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 = 0$, алгоритм оптимальной оценки состояний обобщённого асинхронного потока событий при наличии непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T идентичен изложенному выше алгоритму для *общего случая* и осуществляется на основании формул (3.17), (3.19) – (3.25).

Алгоритм получения численных результатов оценки состояний обобщённого асинхронного потока событий при непродлевающемся мёртвом времени состоит из двух этапов.

Первый этап расчёта предполагает имитационное моделирование обобщённого асинхронного потока событий, схемы создания непродлевающегося мёртвого времени и наблюдаемого потока событий. Второй этап расчёта – непосредственное вычисление вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_0 \le t < t_1$; $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$; $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k < t < t_k + T$; $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$; $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k + T < t \le t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, по формулам (1.4), (3.7), (3.8), (3.11), (3.16) – (3.18), если $\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \ne 0$, либо по формулам (3.17), (3.19) – (3.25), если $\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 = 0$, и определение оценки $\hat{\lambda}(t)$ истинной траектории сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$, полученной путём имитационного моделирования обобщённого асинхронного потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T.

С целью установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ по моментам времени наступления событий наблюдаемого потока проведён ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определённого набора параметров λ_1, λ_2, α_1, α_2, p, q, T ед. времени осуществляется с шагом $\Delta t = 0,05$ имитационное моделирование наблюдаемого потока событий на заданном отрез-

ке времени $[0, T_m]$ (T_m – время моделирования) – отдельная s-я реализация (испытание модели), $s = 1, 2, \ldots$;

2) производится расчёт апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния случайного процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ для случая присутствия мёртвого времени;

3) осуществляется оценивание траектории процесса $\lambda(t)$ (оценивание на отрезке $[0, T_m]$ интервалов, когда оценка $\hat{\lambda}(t)$ принимает то или иное значение);

4) осуществляется определение (для отдельной s-й реализации) $d_s^{(T)}$ – суммарной длительности интервалов, где значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;

5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_s^{(T)} = d_s^{(T)} / T_m$, $s = \overline{1, N}$;

6) производится повторение N раз шагов $1 - 5$ для расчёта оценки полной (безусловной) вероятности ошибки оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$.

В результате выполнения описанного алгоритма получается выборка $\hat{p}_1^{(T)}, \hat{p}_2^{(T)}, \ldots, \hat{p}_N^{(T)}$ долей ошибочных решений в N испытаниях. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_0^{(T)} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} \hat{p}_s^{(T)}$ и выборочная дисперсия $\hat{D}_T = \frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^{N} \left(\hat{p}_s^{(T)} - \hat{P}_0^{(T)} \right)^2$.

Статистические эксперименты проведены для значений параметров, представленных в табл. 3.1.

Результаты статистических экспериментов приведены в табл. 3.2 – 3.6. В первой строке таблиц указано значение длитель-

ности мёртвого времени T. Во второй и третьей строках таблиц для каждого значения длительности мёртвого времени T приведены численные значения для $\hat{P}_0^{(T)}$ и $\hat{D}_T$ соответственно. Заданные в табл. 3.1 параметры являются общими для всех табл. 3.2 – 3.6. При этом результаты в табл. 3.2 получены для $\lambda_1 = 4$, в табл. 3.3 – для $\lambda_1 = 5$, в табл. 3.4 – для $\lambda_1 = 6$, в табл. 3.5 – для $\lambda_1 = 7$, в табл. 3.6 – для $\lambda_1 = 8$.

Таблица 3.1

Исходные данные для статистического эксперимента

$\lambda_2 = 1$	$\alpha_1 = 0{,}1$	$p = 0{,}4$	$T_m = 100$
	$\alpha_2 = 0{,}15$	$q = 0{,}7$	$N = 100$

Таблица 3.2

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 4$)

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,2482	0,2797	0,2945	0,2988	0,3062	0,3315	0,3436	0,3441	0,3451
$\hat{D}_T$	0,0048	0,0074	0,0079	0,0097	0,0067	0,0118	0,0123	0,0136	0,0150

Таблица 3.3

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5$)

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,2228	0,2631	0,2731	0,3009	0,3190	0,3304	0,3316	0,3339	0,3403
$\hat{D}_T$	0,0039	0,0054	0,0129	0,0097	0,0109	0,0115	0,0166	0,0148	0,0193

Таблица 3.4

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 6$)

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,2134	0,2487	0,2625	0,2807	0,2955	0,3071	0,3063	0,3187	0,3201
$\hat{D}_T$	0,0044	0,0051	0,0067	0,0120	0,0091	0,0101	0,0124	0,0080	0,0094

Таблица 3.5

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 7$)

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,2003	0,2251	0,2551	0,2572	0,2841	0,3011	0,3050	0,3113	0,3189
$\hat{D}_T$	0,0024	0,0080	0,0080	0,0063	0,0079	0,0081	0,0101	0,0111	0,0109

Таблица 3.6

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 8$)

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,1920	0,2220	0,2496	0,2531	0,2749	0,2933	0,3006	0,3117	0,3167
$\hat{D}_T$	0,0027	0,0043	0,0066	0,0061	0,0090	0,0119	0,0061	0,0063	0,0106

Во-первых, отметим, что анализ приведённых и других многочисленных вариантов численных расчётов по оценке безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_0^{(T)}$ показывает, что оценка $\hat{P}_0^{(T)}$ является достаточно стабильной для $T_m \geq 100$ ед. времени. Вследствие этого время моделирования T_m для всех экспериментов, результаты которых представлены в табл. 3.2 – 3.6, выбрано равным 100 ед. времени.

Во-вторых, анализ численных результатов, приведённых в табл. 3.2 – 3.6, показывает:

1) значение оценки безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_0^{(T)}$ увеличивается с увеличением длительности мёртвого времени T ($T = 1, 2, ..., 9$ ед. времени); последнее является вполне естественным, так как при увеличении длительности мёртвого времени происходит увеличение потерь полезной информации о потоке событий, что, в конечном итоге, отрицательно сказывается на качестве оценивания;

2) при фиксированной длительности мёртвого времени T значения оценки $\hat{P}_0^{(T)}$ уменьшаются в зависимости от значения параметра λ_1 $(\lambda_1 = 4,5,6,7,8)$, что является естественным, так как при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ условия различимости состояний потока улучшаются;

3) оценка дисперсии $\hat{D}_T$ для всех вариантов расчёта достаточно мала.

3.3. Оптимальное оценивание состояний обобщённого полусинхронного потока при наличии непродлевающегося мёртвого времени

3.3.1. Математическая модель обобщённого полусинхронного потока при его неполной наблюдаемости

Рассматривается обобщение полусинхронного дважды стохастического потока событий, которое заключается в возможности инициирования дополнительных событий; далее будем называть исследуемый поток обобщённым полусинхронным потоком.

Отличие обобщённого полусинхронного потока событий от полусинхронного, рассмотренного в параграфе 1.4, состоит в том, что при переходе сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ $(0 \le \delta \le 1)$ дополнительное событие. Следует отметить, что события пуассоновского потока и дополнительные события неразличимы для наблюдателя [23].

Лемма 3.8. Кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока является марковским процессом.

Доказательство является аналогичным с доказательством леммы 1.7 для полусинхронного потока событий. Момент времени

наступления дополнительного события совпадает с моментом времени перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1, который (момент времени), в свою очередь, совпадает с моментом окончания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2. Длительность пребывания в состоянии S_2 – случайная величина, распределённая по экспоненциальному закону $F_2(t)=1-e^{-\alpha_2 t}$, $t\geq 0$, обладающему свойством отсутствия последействия. Следовательно, $\lambda(t)$ – марковский процесс. *Лемма доказана.*

Построим матрицы инфинитезимальных характеристик кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$.

Отличие обобщённого полусинхронного потока от полусинхронного заключается в возможности инициирования дополнительного события в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1, следовательно, матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока будут отличаться от матриц $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ для полусинхронного потока, выписанных в параграфе 1.4, только элементами $d_{21}^{(0)}$ и $d_{21}^{(1)}$.

Перейдём к определению указанных элементов. Опишем возможные ситуации на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$, если в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_2$. Имеем:

1) за промежуток времени длительности Δt с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right)=\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$ закончится состояние S_2 процесса $\lambda(t)$, наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2\Delta t e^{-\lambda_2\Delta t}=\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_2 в состояние S_1 с вероятностью единица, и в момент перехода наступит дополнительное событие с вероятностью δ; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$\left(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\delta=o(\Delta t);$$

2) за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_2 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right)= =\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$, наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $\lambda_2\Delta t e^{-\lambda_2\Delta t}=\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_2 в S_1 с вероятностью единица, и в момент перехода не наступит дополнительное событие с вероятностью $(1-\delta)$; вероятность описанной ситуации есть

$$\left(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)(1-\delta)=o(\Delta t);$$

3) за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_2 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right)= =\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2\Delta t}=1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_2 в S_1 с вероятностью единица, и в момент перехода наступит дополнительное событие с вероятностью δ; вероятность описанной ситуации равна

$$\left(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\delta=\delta\alpha_2\Delta t+o(\Delta t);$$

4) за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_2 процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right)= =\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$, не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_2 с вероятностью $e^{-\lambda_2\Delta t}=1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)$, процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_2 в S_1 с вероятностью единица, и в момент перехода не наступит дополнительное событие с вероятностью $(1-\delta)$; вероятность рассмотренной ситуации есть

$$\left(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)(1-\delta)=(1-\delta)\alpha_2\Delta t+o(\Delta t).$$

Других исходов, обусловленных переходом процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1, нет. С учётом (1.1) запишем следующие пределы:

$$d_{21}^{(1)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \delta\alpha_2$$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1, связанного с наступлением дополнительного события потока;

$$d_{21}^{(0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1-\delta)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = (1-\delta)\alpha_2$$

– интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1, не связанного с наступлением дополнительного события потока.

При этом элементы $d_{ij}^{(1)}$ и $d_{ij}^{(0)}$, $i, j = 1,2$, матриц инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока событий удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{2} d_{1j}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{1j}^{(1)} = -\lambda_1 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_1 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2} d_{2j}^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} d_{2j}^{(1)} = (1-\delta)\alpha_2 - \left(\lambda_2 + \alpha_2\right) + \delta\alpha_2 + \lambda_2 = 0.$$

Матрицы интенсивностей переходов (инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$) принимают вид

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha_2 & -\left(\lambda_2 + \alpha_2\right) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha_2 & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Пусть $\pi_i\left(t \mid t^0\right)$ – априорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$, $i=1,2$, при условии, что функционирование обобщённого полусинхронного потока началось в момент времени t^0.

Лемма 3.9. Априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока событий имеют вид (1.8).

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1.9 для полусинхронного потока событий, так как поведение процесса $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока является аналогичным поведению полусинхронного потока.

Следствие леммы 3.9. Априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока событий совпадают с определёнными в (1.9) априорными финальными вероятностями π_1 и π_2 состояний процесса $\lambda(t)$ для полусинхронного потока.

Следует отметить, что из определения обобщённого полусинхронного потока событий явно не следует: в состоянии S_1 либо в состоянии S_2 наступает дополнительное событие при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1. Поскольку инициирование дополнительного события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1 происходят мгновенно, то при аналитическом решении задачи оптимального оценивания состояний потока указанное обстоятельство (наступление дополнительного события в состоянии S_1 либо в S_2) является несущественным. Однако данное обстоятельство должно быть учтено при имитационном моделировании обобщённого полусинхронного потока событий.

Замечание 3.9. Сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ для обобщённого полусинхронного потока событий не совпадает с интенсивностью потока, так как если при

переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1 дополнительное событие с вероятностью δ инициируется в состоянии S_2, то интенсивность потока в состоянии S_1 равна λ_1, в состоянии S_2 интенсивность потока равна $(\lambda_2 + \delta\alpha_2)$. Тогда средняя интенсивность обобщённого полусинхронного потока событий равна

$$\Lambda = \lambda_1 \frac{\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} + (\lambda_2 + \delta\alpha_2)\frac{p\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2}.$$

Если при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1 дополнительное событие с вероятностью δ инициируется в первом состоянии, то интенсивность потока в состоянии S_1 есть $(\lambda_1 + \delta\alpha_2)$, в состоянии S_2 интенсивность потока равна λ_2. При этом средняя интенсивность обобщённого полусинхронного потока определяется по указанной выше формуле, то есть средняя интенсивность потока Λ не зависит от того, в каком состоянии (в S_1 или в S_2) инициируется дополнительное событие при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1.

Замечание 3.10. Если $\delta = 0$, то имеем полусинхронный поток событий, рассмотренный в параграфе 1.4.

Далее будем рассматривать обобщённый полусинхронный поток в условиях, когда не все его события доступны наблюдению, то есть при неполной наблюдаемости потока. Каждое зарегистрированное в момент времени t_k событие порождает период времени фиксированной длительности T (мёртвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению и теряются для наблюдателя. Наступившие в течение периода мёртвого времени события не вызывают его продления, то есть рассматривается непродлевающееся мёртвое время, по окончании которого первое наступившее событие вновь создаёт период ненаблюдаемости той же длительности T и т. д. На рис. 3.2 приведена

схема формирования наблюдаемого потока событий при непродлевающемся мёртвом времени; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1, отмечены буквой δ; события обобщённого полусинхронного потока, недоступные наблюдению, обозначены чёрными кружками; $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

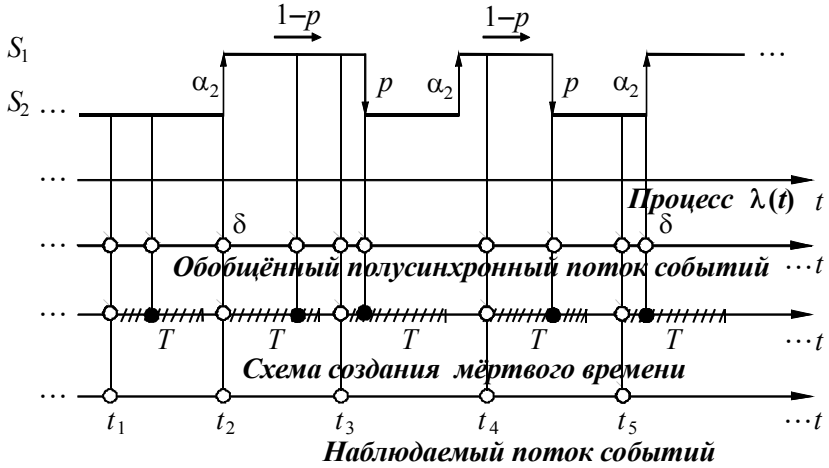

Рис. 3.2. Формирование наблюдаемого потока событий

Замечание 3.11. Для обобщённого полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях полной наблюдаемости, то есть при отсутствии мёртвого времени, аналогично с полусинхронным потоком (лемма 1.8) моменты наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$. Если рассматривать функционирование потока в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T, то наличие мёртвого времени способствует тому, что последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, порождённая моментами наступления событий в

наблюдаемом потоке $t_1, t_2, ..., t_k, ...$, тем более образует вложенную цепь Маркова.

По моментам наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ в наблюдаемом потоке требуется оценить состояние сопровождающего кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t выносится по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_i \mid t)$, где $w(\lambda_i \mid t)$ – апостериорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$.

3.3.2. Апостериорная вероятность на интервалах наблюдаемости потока

Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – момент начала наблюдения за потоком, t – момент окончания наблюдения, те же, что и описанные в подпараграфе 3.2.2.

Получим явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)\right)$ на интервалах времени (t_0, t_1) и $(t_k + T, t_{k+1})$, когда функционирующий в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T обобщённый полусинхронный поток событий доступен наблюдению.

С целью вывода рекуррентного соотношения для апостериорной вероятности состояний потока событий введём в рассмотрение двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$, где $\lambda^{(l)} = \lambda(l\Delta t)$ – значе-

ние процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)} = l\Delta t$ $\left(\lambda^{(l)} = \lambda_i, i = 1,2\right)$; $r_l = r_l(\Delta t)$ – количество событий потока на интервале времени $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина.

Лемма 3.10. Для обобщённого полусинхронного потока двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским процессом.

Доказательство идентично доказательству леммы 2.9 для полусинхронного потока событий. Компонента $\lambda^{(l)}$ процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ – марковская, так как согласно лемме 3.8 процесс $\lambda(t)$ – марковский. Компонента r_l на основании леммы 2.9 также марковская вне зависимости от того – принадлежит ли интервал $((l-1)\Delta t, l\Delta t)$ состоянию S_1 либо состоянию S_2 процесса $\lambda(t)$. Дополнительное событие потока наступает в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1, который совпадает с моментом окончания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии. В свою очередь, момент окончания состояния S_2 не зависит от предыстории, так как длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 – случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. Компонента $\lambda^{(l)}$ не влияет на r_l в силу конструкции процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$; компонента r_l (см. доказательство леммы 2.9) может как влиять, так и не влиять на компоненту $\lambda^{(l)}$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)} = l\Delta t$. Таким образом, двумерный случайный процесс $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$ является марковским. *Лемма доказана.*

Для марковского процесса $\left(\lambda^{(l)}, r_l\right)$, $l = \overline{0, m+1}$, справедлива рекуррентная формула (2.6) для апостериорных вероятностей состояний дважды стохастических потоков событий. Отметим, что

наблюдение за потоком производится на интервале времени $(m\Delta t,(m+1)\Delta t)=(t,t+\Delta t)$, $m=0,1,2,\ldots$.

Количество событий в наблюдаемом потоке, наступивших на интервале $(m\Delta t,(m+1)\Delta t)$, состоит из событий пуассоновского потока интенсивности $\lambda(m\Delta t)=\lambda_i$, $i=1,2$, либо из дополнительных событий, инициируемых в моменты перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1, либо из тех и других. В связи с этим в формуле (2.6) переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2, r_m\right)$ отражает, в частности, инициирование дополнительных событий при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 $\left(\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)$ в момент времени $t=m\Delta t$ в состояние S_1 $\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)$; переходная вероятность $p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ отражает, в частности, наступление событий пуассоновского потока с параметром $\lambda^{(m)}$ $\left(\lambda^{(m)}=\lambda_1\right.$ либо $\left.\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)$, где r_m, r_{m+1} – число событий пуассоновского потока, наступивших в наблюдаемом потоке на интервалах $((m-1)\Delta t, m\Delta t)$, $(m\Delta t,(m+1)\Delta t)$ соответственно. Компонента r_m в силу малости Δt может принимать значения $r_m=0$ или $r_m=1$ (аналогично для r_{m+1}). Вероятность более одного перехода процесса $\lambda(t)$ на интервале $(m\Delta t,(m+1)\Delta t)$ равна $o(\Delta t)$. Отметим также, что на интервале времени длительности Δt вероятность одновременного наступления события пуассоновского потока и перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 равна $o(\Delta t)$.

Следует подчеркнуть, что согласно описанию обобщённого полусинхронного потока событий, приведённому в подпараграфе 3.3.1, в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ поток ведёт себя как синхронный, во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ – как обобщён-

ный асинхронный; при этом в обобщённом полусинхронном потоке дополнительное событие инициируется с вероятностью δ, в то время как в обобщённом асинхронном дополнительное событие инициируется с вероятностью q в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1.

Рассмотрим переходную вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) \times$ $\times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ в (2.6).

Утверждение 3.3 (вытекает из утверждения 2.3 для синхронного потока и утверждений 3.1, 3.2 для обобщённого асинхронного потока). При переходе на интервале $(m\Delta t,(m+1)\Delta t)$ процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 $\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1\right)$ в состояние S_i, $i = 1,2$, переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ выпишется в виде

$$p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) =$$
$$= p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)}\right).$$

При переходе на интервале $(m\Delta t,(m+1)\Delta t)$ процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 $\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2\right)$ в состояние S_i, $i = 1,2$, переходная вероятность $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$ выпишется в виде

$$p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) =$$
$$= p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)}\right),\ d = 0;1.$$

При этом, как следует из утверждения 3.1, если $d = 0$, то:

а) при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 дополнительное событие не инициируется с вероятностью $(1-\delta)$,

б) условная вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_2 равна $p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)$ (дополнительное событие не инициируется по определению);

если $d=1$, то:

а) при переходе процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_1 дополнительное событие инициируется с вероятностью δ,

б) условная вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в S_2 с инициированием дополнительного события по определению равна $p_1\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2 \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=0$. *Утверждение доказано.*

Принимая во внимание утверждение 3.3, запишем рекуррентное соотношение (2.6) для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)$ состояний обобщённого полусинхронного потока в виде

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t+\Delta t\right)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p_m\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I\left(\lambda^{(m)}\right)\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p_m\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I\left(\lambda^{(m)}\right)\right)}, \quad (3.26)$$

$$p_m\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right)=\begin{cases} p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}=\lambda_1\right), \\ p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}=\lambda_2\right), d=0;1; \end{cases}$$

$$I\left(\lambda^{(m)}\right)=\begin{cases} \lambda^{(m+1)}, \text{ если } \lambda^{(m)}=\lambda_1, \\ 0, \qquad \text{если } \lambda^{(m)}=\lambda_2. \end{cases}$$

Следует напомнить, что рассматривается временной интервал $(t, t+\Delta t)$, расположенный на участках наблюдаемости потока (t_0, t_1) и $(t_k + T, t_{k+1})$, где t_0 – момент времени начала наблюдения за потоком; t_1 – момент времени наступления первого события наблюдаемого потока; $t_k + T$ – момент окончания периода мёртвого времени фиксированной длительности T, порожденного событием, наступившим в момент времени t_k; t_{k+1} – момент времени наступления очередного события потока, $k = 1, 2, \ldots$. Подчеркнём, что наступившие в моменты времени t_1, t_k, t_{k+1} события могут быть как событиями пуассоновских потоков с параметрами λ_1 либо λ_2, так и дополнительными событиями. Таким образом, полагается, что на интервале $(t, t+\Delta t)$ нет событий потока. Следовательно, в (3.26) положим $r_{m+1} = 0$ и $d = 0$.

Зададим (аналогично полусинхронному потоку, подпараграф 2.4.1) в (3.26), за исключением знаменателя, значение $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

Лемма 3.11. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ для обобщённого полусинхронного потока на начальном интервале наблюдения (t_0, t_1) и на интервалах $(t_k + T, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2 - 2\delta\alpha_2) w(\lambda_1 \mid t) - \\ -(\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2) w^2(\lambda_1 \mid t) = (1-\delta)\alpha_2. \qquad (3.27)$$

Доказательство. Поскольку в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ обобщённый полусинхронный поток ведёт себя как синхронный поток, то на основании леммы 2.6 переходные вероятности в (3.26) выпишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\right)=\\
&=p\left(r_{m+1}=0,\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=e^{-\lambda_1\Delta t}=1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t),\\
&p\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\right)=\\
&=p\left(r_{m+1}=0,\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_1\right)=0.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ исследуемый поток ведёт себя как обобщённый асинхронный поток. Тогда с учётом формул (3.4) и (3.5) (с заменой q на δ) переходные вероятности в (3.26) равны

$$
\begin{aligned}
&p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_1\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=\\
&=\left((1-\delta)\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)=(1-\delta)\alpha_2\Delta t+o(\Delta t),\\
&p_0\left(\lambda^{(m+1)}=\lambda_2\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)p\left(r_{m+1}=0\,|\,\lambda^{(m)}=\lambda_2\right)=\\
&=\left(1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(1-\lambda_2\Delta t+o(\Delta t)\right)=1-\left(\lambda_2+\alpha_2\right)\Delta t+o(\Delta t).
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

С учётом введённых обозначений и в результате подстановки (3.28), (3.29) в формулу (3.26) её числитель A и знаменатель B приобретают вид

$$
\begin{aligned}
A&=w\left(\lambda_1\,|\,t\right)+\left[-\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t\right)+(1-\delta)\alpha_2 w\left(\lambda_2\,|\,t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),\\
B&=1-\left[\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t\right)+\left(\lambda_2+\delta\alpha_2\right)w\left(\lambda_2\,|\,t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t),
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

где $w\left(\lambda_i\,|\,t\right)=w\left(\lambda^{(m)}=\lambda_i\,|\,t\right)$, $i=1,2$.

Подставляя (3.30) в (3.26), учитывая при этом, что $B^{-1}=1+\left[\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t\right)+\left(\lambda_2+\delta\alpha_2\right)w\left(\lambda_2\,|\,t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t)$, получаем (с точностью до членов $o(\Delta t)$) равенство (3.26) в виде

$$
\begin{aligned}
&w\left(\lambda_1\,|\,t+\Delta t\right)-w\left(\lambda_1\,|\,t\right)=\left[\lambda_1 w^2\left(\lambda_1\,|\,t\right)-\lambda_1 w\left(\lambda_1\,|\,t\right)+\right.\\
&\left.+(1-\delta)\alpha_2 w\left(\lambda_2\,|\,t\right)+\left(\lambda_2+\delta\alpha_2\right)w\left(\lambda_1\,|\,t\right)w\left(\lambda_2\,|\,t\right)\right]\Delta t+o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

Разделив левую и правую части последнего равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, с учётом того, что $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$, находим 3.27. *Лемма доказана*.

Рассмотрим два случая задания параметров обобщённого полусинхронного потока событий.

I. *Общий случай*: в уравнении (3.27) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 \neq 0$.

В явном виде апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)\right)$, принимающая в момент окончания мёртвого времени $t_k + T$ значение $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$, $k = 1,2,\ldots$, определяется следующей леммой.

Лемма 3.12. На временных интервалах между моментами окончания периода мёртвого времени $t_k + T$ и моментом времени t_{k+1} наступления очередного события наблюдаемого потока апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ как функция времени определяется соотношениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)}{1 + \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right](\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)(t - t_k - T)}, \quad (3.31)$$

если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$;

$$w(\lambda_1 \mid t) = \left\{ w\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] \times \right.$$
$$\left. \times e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)} \right\} \times \left\{ \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] - \right. \quad (3.32)$$
$$\left. - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)} \right\}^{-1},$$

$$w = (1 - \delta)\alpha_2 / (\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2),$$

если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$;

$t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$; $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$.

Доказательство. В уравнении Риккати (3.27) коэффициенты постоянны, поэтому оно интегрируется в квадратурах. В (3.27) обозначим $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2$, $b = -(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2 - 2\delta\alpha_2)$, $c = (1-\delta)\alpha_2$, разделяем переменные и интегрируем с учётом того, что в момент окончания периода мёртвого времени $t_k + T$, $k = 1,2,\ldots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ принимает значение $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$:

$$\int\limits_{w(\lambda_1 \mid t_k + T)}^{w(\lambda_1 \mid t)} \frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{a\left[w(\lambda_1 \mid t) - w_1\right]\left[w(\lambda_1 \mid t) - w_2\right]} = \int\limits_{t_k + T}^{t} dt, \qquad (3.33)$$

где w_1, w_2 – корни уравнения $aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c = 0$. Определяем

$$w_{1,2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2 - 2\delta\alpha_2) \mp \sqrt{D}}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)},$$

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2 - 2\delta\alpha_2)^2 - 4(\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)(1-\delta)\alpha_2 = \\ = (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)^2.$$

В зависимости от значения параметров потока $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_2$ уравнение $aw^2(\lambda_1 \mid t) + bw(\lambda_1 \mid t) + c = 0$ имеет два различных действительных корня: w_1, w_2 $(w_1 < w_2)$ или два одинаковых корня $w_1 = w_2$, что, в свою очередь, приводит к двум различным решениям уравнения (3.33) относительно апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$.

Возможны случаи:

1. Если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ $(D = 0)$, тогда $w_1 = w_2 = \\ = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_2 - 2\delta\alpha_2)}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)} = 1,$ и уравнение (3.33) принимает вид

$$\int\limits_{w(\lambda_1|t_k+T)}^{w(\lambda_1|t)} \frac{dw(\lambda_1\,|\,t)}{a\left[w(\lambda_1\,|\,t)-1\right]^2} = \int\limits_{t_k+T}^{t} dt\,,$$

откуда находим

$$-\frac{1}{a\left[w(\lambda_1\,|\,t)-1\right]}\Bigg|_{w(\lambda_1|t_k+T)}^{w(\lambda_1|t)} = \left(t-t_k-T\right).$$

В результате несложных преобразований в последнем уравнении и с учётом обозначения $a=\lambda_1-\lambda_2-\delta\alpha_2$ приходим к (3.31).

2. Если $\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2\neq 0$ $(D\neq 0)$, тогда

$$w_1=\frac{\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_2-2\delta\alpha_2\right)-\left(\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2\right)}{2\left(\lambda_1-\lambda_2-\delta\alpha_2\right)}=\frac{(1-\delta)\alpha_2}{\left(\lambda_1-\lambda_2-\delta\alpha_2\right)},$$

$$w_2=\frac{\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_2-2\delta\alpha_2\right)+\left(\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2\right)}{2\left(\lambda_1-\lambda_2-\delta\alpha_2\right)}=1.$$

Обозначим $w=w_1$ и запишем (3.33) в виде

$$\int\limits_{w(\lambda_1|t_k+T)}^{w(\lambda_1|t)} \frac{dw(\lambda_1\,|\,t)}{a\left[w(\lambda_1\,|\,t)-w\right]\left[w(\lambda_1\,|\,t)-1\right]} = \int\limits_{t_k+T}^{t} dt\,,$$

откуда следует

$$\frac{1}{a(1-w)}\ln\left|\frac{\left[w(\lambda_1\,|\,t)-w\right]}{\left[w(\lambda_1\,|\,t)-1\right]}\right|\Bigg|_{w(\lambda_1|t_k+T)}^{w(\lambda_1|t)} = -\left(t-t_k-T\right).$$

Потенцируя последнее уравнение, выполняя в нём необходимые преобразования и принимая во внимание, что $a(1-w)=\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2$, приходим к (3.32). *Лемма доказана.*

Замечание 3.12. На начальном интервале наблюдения за потоком (t_0, t_1) поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ как функции времени задаётся формулой (3.31) при $k = 0$, если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, либо формулой (3.32) при $k = 0$, если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$. В обоих случаях задания параметров потока начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_0 + T)$ заменяется на $w(\lambda_1 \mid t_0)$, момент времени $t_0 + T$ заменяется на момент t_0.

Расчёт апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ по формуле (3.31) или по формуле (3.32) на интервалах наблюдаемости потока $(t_k + T, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, согласно лемме 3.12, невозможен без знания начального условия $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ – значения вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент окончания периода мёртвого времени длительности T.

3.3.3. Апостериорная вероятность в условиях мёртвого времени

Рассмотрим полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \ldots$, на котором событие обобщённого полусинхронного потока имеет место только в граничной точке t_k; на самом полуинтервале события исходного потока недоступны для наблюдения. Будем считать, что апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в граничной точке t_k известна и равна $w(\lambda_1 \mid t_k)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t_k) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k)\right)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.13. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ для обобщённого полусинхронного потока событий на временных участках ненаблюдаемости $(t_k, t_k + T]$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k) - \pi_1 \right] e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)(t - t_k)}, \qquad (3.34)$$

$t_k < t \le t_k + T$, $k = 1,2,...$; π_1 определена в (1.9) согласно следствию леммы 3.9; $w(\lambda_1 \mid t_k)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$.

Доказательство. На временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, то есть в течение периода мёртвого времени, обобщённый полусинхронный поток событий является недоступным для наблюдения. Поэтому на $(t_k, t_k + T]$ поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ является идентичным поведению априорной вероятности $\pi_1(t \mid t^0)$ первого состояния сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ (лемма 3.9); отличие лишь в задании начального значения $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_k наступления события наблюдаемого потока.

Пусть $w(\lambda_i \mid t)$ – апостериорная вероятность того, что в момент времени t имеет место состояние S_i, $i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$; аналогично $w(\lambda_i \mid t + \Delta t)$ – апостериорная вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ имеет место состояние S_i, $i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$; моменты времени t, $t + \Delta t$ (Δt – достаточно малая величина) принадлежат полуинтервалу $(t_k, t_k + T]$, $k = 1,2,...$.

Опишем возможные ситуации на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, связанные с поведением процесса $\lambda(t)$ на полуинтервале ненаблюдаемости:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $w(\lambda_1 \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt не наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1 с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} = 1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$, и с вероятностью единица про-

цесс $\lambda(t)$ останется в состоянии S_1; вероятность описанной ситуации равна

$$w(\lambda_1 \mid t)\big(1-\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)\big)=w(\lambda_1 \mid t)-\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $w(\lambda_1 \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt с вероятностью $\lambda_1\Delta t e^{-\lambda_1\Delta t}=\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1, и в момент времени наступления события пуассоновского потока процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_1 в состояние S_1 с вероятностью $(1-p)$; вероятность этой ситуации равна

$$(1-p)w(\lambda_1 \mid t)\big(\lambda_1\Delta t+o(\Delta t)\big)=(1-p)\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_2$ с вероятностью $w(\lambda_2 \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\alpha_2\Delta t}\right)=\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью единица перейдёт из второго состояния в первое; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$w(\lambda_2 \mid t)\big(\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\big)=\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_2$ с вероятностью $w(\lambda_2 \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt не закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\alpha_2\Delta t}=1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$; вероятность данной ситуации есть

$$w(\lambda_2 \mid t)\big(1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)\big)=w(\lambda_2 \mid t)-\alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

5) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_1$ с вероятностью $w(\lambda_1 \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt с вероят-

ностью $\lambda_1 \Delta t e^{-\lambda_1 \Delta t} = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ наступит событие пуассоновского потока с параметром λ_1, и в момент времени наступления события пуассоновского потока процесс $\lambda(t)$ перейдёт из первого состояния во второе с вероятностью p; вероятность этой ситуации равна

$$pw(\lambda_1 \mid t)\big(\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)\big) = p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Других возможностей не имеется.

На основании рассмотренных ситуаций выпишем систему равенств относительно $w(\lambda_i \mid t)$, $i = 1,2,$, в момент времени $t + \Delta t$:

$$w(\lambda_1 \mid t + \Delta t) = w(\lambda_1 \mid t) - \lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t + (1-p)\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t + \\ + \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$w(\lambda_2 \mid t + \Delta t) = w(\lambda_2 \mid t) - \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\Delta t + p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t)\Delta t + o(\Delta t).$$

В результате несложных преобразований находим

$$w(\lambda_1 \mid t + \Delta t) - w(\lambda_1 \mid t) = \big[-p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\big]\Delta t + o(\Delta t),$$

$$w(\lambda_2 \mid t + \Delta t) - w(\lambda_2 \mid t) = \big[p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) - \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t)\big]\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив оба равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно апостериорных вероятностей $w(\lambda_i \mid t)$ состояний S_i, $i = 1,2$, процесса $\lambda(t)$ на интервалах наблюдаемости потока:

$$w'(\lambda_1 \mid t) = -p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t),$$

$$w'(\lambda_2 \mid t) = p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) - \alpha_2 w(\lambda_2 \mid t);\ w(\lambda_1 \mid t) + w(\lambda_2 \mid t) = 1.$$

Используя условие нормировки, сведём выписанную систему к одному дифференциальному уравнению относительно $w(\lambda_1 \mid t)$:

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + \big(p\lambda_1 + \alpha_2\big) w(\lambda_1 \mid t) = \alpha_2$$

с начальным условием $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 1,2,\ldots$. Интегрируя последнее уравнение методом разделения переменных и принимая во внимание, что $\pi_1 = \alpha_2 / (p\lambda_1 + \alpha_2)$, находим (3.34). *Лемма доказана*.

Итак, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$, являющаяся начальным условием для $w(\lambda_1 \mid t)$, рассчитываемой по формуле (3.31) либо по формуле (3.32) на интервалах наблюдаемости потока, вычисляется по формуле (3.34) в момент времени $t = t_k + T$, $k = 1,2,\ldots$. Однако применение (3.34) невозможно без знания $w(\lambda_1 \mid t_k)$ – значения апостериорной вероятности в момент t_k наблюдения события потока, которое порождает период мёртвого времени фиксированной длительности T.

Перейдём к определению $w(\lambda_1 \mid t_k)$, рассматривая ситуацию наблюдения одного события потока на интервале $(m\Delta t, (m+1)\Delta t) = (t, t + \Delta t)$, допустим, в момент времени t_k, $k = 1,2,\ldots$.

Лемма 3.14. В обобщённом полусинхронном потоке событий в момент времени t_k апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ задаётся формулой пересчёта

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{\delta\alpha_2 + [(1-p)\lambda_1 - \delta\alpha_2]\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + \delta\alpha_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \quad (3.35)$$

$$k = 1,2,\ldots,$$

$$w(\lambda_2 \mid t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k + 0).$$

Доказательство. Рассмотрим два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$ соответственно. Положим также в формуле (3.26) всюду, за ис-

ключением знаменателя, значение $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. Тогда (3.26) принимает вид

$$w(\lambda_1 \mid t_k + \Delta t'') =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p_m\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I_1\left(\lambda^{(m)}\right)\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t_k - \Delta t'\right) p_m\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, I\left(\lambda^{(m)}\right)\right)}, \quad (3.36)$$

$$p_m\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}\right) = \begin{cases} p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right), \\ p_d\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right), \; d = 0;1; \end{cases}$$

$$I_1\left(\lambda^{(m)}\right) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \text{ если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, \qquad\quad \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2, \end{cases}$$

$$I\left(\lambda^{(m)}\right) = \begin{cases} \lambda^{(m+1)}, \text{ если } \lambda^{(m)} = \lambda_1, \\ 0, \qquad \text{если } \lambda^{(m)} = \lambda_2. \end{cases}$$

Обозначим A_1 – числитель, B_1 – знаменатель выражения (3.36). Принимая во внимание, что событие, наступившее в момент времени t_k, может быть либо дополнительным событием, либо событием пуассоновского потока, выпишем числитель A_1 и знаменатель B_1 выражения (3.36):

$$A_1 = w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right) p_m\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) \times$$

$$\times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, I_1\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1\right)\right) + w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right) \times$$

$$\times p_m\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2, I_1\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2\right)\right) =$$

$$= w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) \times$$

$$\times p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1\right) + w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right) \times$$

$$\times \Big[p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) +$$

$$+ p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right)\Big];$$

$$B_1 = A_1 + w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right) p_m\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) \times$$

$$\times p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, I\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1\right)\right) + w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right) \times$$

$$\times p_m\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2, I\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2\right)\right) =$$

$$= A_1 + w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right) p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1\right) \times$$

$$\times p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2\right) + w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right) \times$$

$$\times \Big[p_0\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} = 1 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) +$$

$$+ p_1\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right) p\left(r_{m+1} = 0 \mid \lambda^{(m)} = \lambda_2\right)\Big].$$

Следует напомнить, что в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$ поведение обобщённого полусинхронного потока идентично поведению синхронного потока, в состоянии S_2 процесса $\lambda(t)$ поведение обобщённого полусинхронного потока идентично поведению обобщённого асинхронного потока. В связи со сказанным, применяя лемму 2.8, формулы (3.4), (3.5), (3.13), (3.14) с заменой в них вероятности инициирования дополнительного события q на δ, перепишем числитель A_1 и знаменатель B_1 после несложных преобразований в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[(1-p)\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right) + \delta\alpha_2 w\left(\lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right)\right]\Delta t + o(\Delta t), \\ B_1 &= \left[\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t_k - \Delta t'\right) + \left(\lambda_2 + \delta\alpha_2\right) w\left(\lambda_2 \mid t_k - \Delta t'\right)\right]\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{3.37}$$

где $w\left(\lambda^{(m)} = \lambda_i \mid t_k - \Delta t'\right) = w\left(\lambda_i \mid t_k - \Delta t'\right)$, $i = 1, 2$.

Подставляя (3.37) в (3.36), выполняя деление числителя и знаменателя на Δt, учитывая при этом, что $w(\lambda_2 \mid t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k - \Delta t')$, и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ одновременно стремятся к нулю), получаем формулу пересчёта (3.35). *Лемма доказана*.

Замечание 3.13. Апостериорная вероятность $w(\lambda_i \mid t)$ состояния S_i, $i = 1,2$, кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$ в точке t_k (момент наблюдения события в обобщённом полусинхронном потоке), $k = 1,2,\ldots$, терпит разрыв первого рода (имеет место конечный скачок).

3.3.4. Апостериорная вероятность как функция времени для общего и особого случаев задания параметров потока

Полученные для $w(\lambda_1 \mid t)$ формулы (3.31), (3.32), (3.34), (3.35), а также формула (1.9) для априорной финальной вероятности π_1 состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ определяют поведение апостериорной вероятности на временных участках $[t_k, t_k + T]$, когда поток событий принципиально ненаблюдаем, на интервалах $(t_k + T, t_{k+1})$, $k = 1,2,\ldots$, на которых поток событий доступен наблюдению, а также на начальном интервале времени (t_0, t_1), на котором, согласно замечанию 3.12, в момент начала наблюдения за потоком $t_0 = 0$ в качестве начального значения вероятности $w(\lambda_1 \mid t_0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0)$ выбирается априорная финальная вероятность π_1.

Леммы 3.12 – 3.14 и замечание 3.12 позволяют сформулировать следующие теоремы для общего случая задания параметров потока: $\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 \neq 0$ (подпараграф 3.3.2).

Теорема 3.2. Для обобщённого полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $0 \le \delta < 1$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ определяется выражениями:

$$w(\lambda_1 \mid t) = 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_0)}{1 + \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right](\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)(t - t_0)}, \quad (3.38)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2},$$

$$t_0 \le t \le t_1,\ w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0);$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1\right] e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)(t - t_k)},\ k = 1,2,..., \quad (3.39)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{\delta\alpha_2 + \left[(1-p)\lambda_1 - \delta\alpha_2\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + \delta\alpha_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)},\ k = 1,2,...,$$

$$t_k \le t \le t_k + T;$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)}{1 + \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right](\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)(t - t_k - T)},$$

$$k = 1,2,...,\ t_k + T \le t < t_{k+1};$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = 1 - \frac{1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)}{1 + \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)\right](\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)(t_k - t_{k-1} - T)}, \quad (3.40)$$

$$k = 2,3,....$$

Доказательство осуществляется объединением формул (1.9), (3.31), (3.34), (3.35).

Теорема 3.3. Для обобщённого полусинхронного потока событий при наличии непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, $0 < \delta \leq 1$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ определяется соотношениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_0)}}{\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_0)}}, \quad (3.41)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2},$$

$$t_0 \leq t \leq t_1, \;\; w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0);$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1\right] e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)(t - t_k)}, \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{\delta\alpha_2 + \left[(1-p)\lambda_1 - \delta\alpha_2\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 + \delta\alpha_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2)\, w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

$$t_k \leq t \leq t_k + T;$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}}{\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \; t_k + T \leq t < t_{k+1};$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = \Big\{ w\left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)\right] - \left[w - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)\right] \times$$
$$\times e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1} - T)} \Big\} \times \Big\{ \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)\right] - \quad (3.42)$$
$$- \left[w - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)\right] e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1} - T)} \Big\}^{-1},$$

$$k = 2, 3, \ldots; \;\; w = (1 - \delta)\alpha_2 / (\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2), \; \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 \neq 0.$$

Доказательство проводится объединением формул (1.9), (3.32), (3.34), (3.35).

II. *Особый случай*, когда в уравнении (3.27) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 = 0$. Здесь возможны варианты.

1. $\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 = 0$, $0 \le \delta < 1$. Очевидно, что равенство нулю достигается для $\delta^* = (\lambda_1 - \lambda_2)/\alpha_2$, при этом $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 < 0$. Уравнение (3.27) примет вид

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} - (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)\left[w(\lambda_1 \mid t) - 1\right] = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение и принимая во внимание, что в момент окончания периода мёртвого времени $t_k + T$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ принимает значение $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$, являющееся начальным условием для интервала наблюдаемости потока $(t_k + T, t_k)$, находим решение на участках наблюдаемости в виде

$$w(\lambda_1 \mid t) = 1 - \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] e^{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}, \qquad (3.43)$$

где $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$; $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$.

Замечание 3.14. На начальном интервале наблюдения (t_0, t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ рассчитывается по формуле (3.43) при $k = 0$; при этом начальное условие $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$ заменяется на $w(\lambda_1 \mid t_0)$ (момент времени $t_k + T$ заменяется моментом времени t_0).

На полуинтервалах ненаблюдаемости потока $(t_k, t_k + T]$, t_k, $k = 1, 2, \ldots$, – момент времени наступления события в наблюдаемом потоке, расчёт апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в произволь-

ный момент времени t производится по формуле (3.39), в которой $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ – начальное значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_k, задаваемое формулой пересчёта.

Формула пересчёта (3.35) запишется в виде

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{1}{\lambda_1}\left[\lambda_1 - \lambda_2 + (\lambda_2 - p\lambda_1) w(\lambda_1 \mid t_k - 0)\right],\ k = 1,2,..., \quad (3.44)$$

где

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = 1 - \left[1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T)\right] e^{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1} - T)},\ k = 2,3,.... \quad (3.45)$$

2. $\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 = 0$, $\delta = 1$. Тогда дифференциальное уравнение (3.27) примет вид $dw(\lambda_1 \mid t)/dt = 0$; решение последнего уравнения есть

$$w(\lambda_1 \mid t) = const,\ t_0 < t < t_1,\ t_k + T < t < t_{k+1},\ k = 1,2,.... \quad (3.46)$$

Формула пересчёта (3.35) выпишется в виде

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{1}{\lambda_1}\left\{\alpha_2 + \left[(1-p)\lambda_1 - \alpha_2\right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)\right\},\ k = 1,2,.... \quad (3.47)$$

Так как $w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1$, $\pi_1 = \alpha_2 / (p\lambda_1 + \alpha_2)$, то, исходя из (3.46), запишем $w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1$ для $t_0 \le t < t_1$. Таким образом, для $t = t_1$ также находим $w(\lambda_1 \mid t = t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0) = \pi_1$. Подставляя последнее в формулу пересчёта (3.47), находим $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0) = \pi_1$ – начальное условие для первого интервала ненаблюдаемости, порождённого событием наблюдаемого потока, наступившим в момент t_1. Далее при подстановке $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0) = \pi_1$ в формулу (3.39), описывающую поведение $w(\lambda_1 \mid t)$ на временных интервалах, на которых исходный поток ненаблюдаем, находим $w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1$ для $t_1 < t \le t_1 + T$ и так далее. Тогда $w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1$ для $t \ge t_0$.

Замечание 3.15. При рассмотренном в особом случае 2 соотношении параметров потока отсутствует зависимость $w(\lambda_1 \mid t)$ от моментов наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k$, $k = 1, 2, ...$, и решение о том или ином состоянии потока выносится на основании априорных данных.

В рассмотренных общем и особом случаях задания параметров потока точка $t = t_k + T$ является точкой сшивания решений $w(\lambda_1 \mid t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, ...$.

3.3.5. Алгоритм принятия решения о состоянии обобщённого полусинхронного потока событий в условиях мёртвого времени

Формулы, полученные в 3.3.2 – 3.3.4, позволяют сформулировать алгоритм расчёта апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$, $w(\lambda_2 \mid t)$ для *общего случая* задания параметров потока, когда в уравнении (3.27) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 \neq 0$, а также на основании вычисленных вероятностей сформулировать алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) в произвольный момент времени t:

1) в момент времени начала наблюдения за потоком $t_0 = 0$ в качестве начального значения апостериорной вероятности задаётся $w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1 = \alpha_2 / (p\lambda_1 + \alpha_2)$;

2) по формуле (3.38) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $0 \le \delta < 1$, либо по формуле (3.41) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, $0 \le \delta \le 1$, рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в произвольный момент времени t, $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наступления первого события наблюдаемого потока;

3) по формуле (3.38) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $0 \le \delta < 1$, либо по формуле (3.41) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \ne 0$, $0 \le \delta \le 1$, вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_1: $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле пересчёта (3.35), с учётом пункта 3), для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$, являющаяся начальным значением для $w(\lambda_1 \mid t)$ в формуле (3.39);

5) в любой момент времени t, $t_1 < t < t_1 + T$, по формуле (3.39) производится расчёт вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$;

6) по формуле (3.39) для $k = 1$ в момент времени $t = t_1 + T$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t = t_1 + T)$, являющаяся начальным значением для $w(\lambda_1 \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) для $k = 1$ по формуле (3.31) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $0 \le \delta < 1$, либо по формуле (3.32) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \ne 0$, $0 \le \delta \le 1$, вычисляется $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $t_1 + T < t < t_2$, где t_2 – момент времени наступления второго события наблюдаемого потока;

8) k увеличивается на единицу и для $k = 2$ по формуле (3.40) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, $0 \le \delta < 1$, либо по формуле (3.42) в случае $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \ne 0$, $0 \le \delta \le 1$, вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t_2 - 0)$;

9) алгоритм переходит на шаг 4, затем шаги 4 – 8 повторяются для $k = 2$ и так далее.

При расчёте апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 \mid t)$, $w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t)$ в произвольный момент времени t принимается решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности.

Для *особого случая* задания параметров потока, когда в уравнении (3.27) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 = 0$, алгоритм оптималь-

ной оценки состояний обобщённого полусинхронного потока событий при наличии непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T аналогичен изложенному выше алгоритму оценивания для *общего случая* $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha_2 \neq 0$ и реализуется на основании формул (1.9), (3.39), (3.43) – (3.47).

3.4. Оптимальная оценка состояний MAP-потока, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени

Исследуется MAP-поток событий, описание которого приводится в параграфе 1.5. MAP-поток функционирует в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T [17]. На рис. 3.3 представлена схема формирования наблюдаемого потока событий при непродлевающемся мёртвом времени, подробно описанная в 3.2.1 для обобщённого асинхронного потока и в 3.3.1 для обобщённого полусинхронного потока событий.

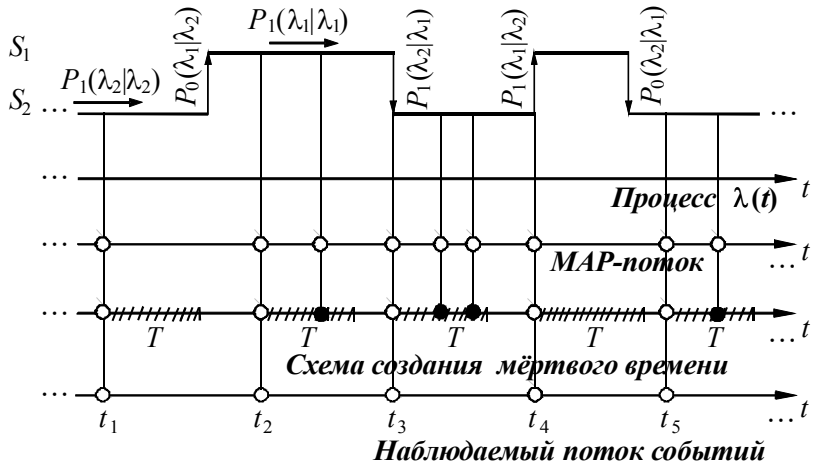

Рис. 3.3. Формирование наблюдаемого потока событий

Требуется по наблюдениям $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_1 | t)$ и $w(\lambda_2 | t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Следует напомнить, что задача об оптимальном оценивании состояний МАР-потока событий в условиях отсутствия мёртвого времени (то есть при полной наблюдаемости потока) решена в параграфе 2.5 главы 2. Однако наличие периодов мёртвого времени, порождаемых зарегистрированными в моменты времени t_k, $k = 1, 2, ...$, событиями, приводит к необходимости нахождения явного вида апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния случайного процесса $\lambda(t)$ на участках ненаблюдаемости МАР-потока событий; $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$.

3.4.1. Апостериорная вероятность на участках ненаблюдаемости потока

Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – момент начала наблюдения за МАР-потоком, t – момент вынесения решения о состоянии МАР-потока, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T, аналогичны рассмотренным в 3.2.2 для обобщённого асинхронного потока событий.

Будем рассматривать полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, ...$, на котором события МАР-потока недоступны для наблюдения; событие имеет место лишь в граничной точке t_k. Предположим, что в

граничной точке t_k апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ известна и равна $w(\lambda_1 \mid t_k)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t_k) = 1 - w(\lambda_1 \mid t_k)\right)$.

Лемма 3.15. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ для MAP-потока событий на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$ задаётся явной формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1\right] e^{-d(t - t_k)}, \qquad (3.48)$$

$t_k < t \le t_k + T$, $k = 1, 2, \ldots$; $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ определена формулой (2.50), $k = 1, 2, \ldots$; π_1 определена в (1.11); $d = \lambda_1 \left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]$.

Доказательство. На полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$ MAP-поток событий недоступен для наблюдения. В этой связи апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ на указанных полуинтервалах ведёт себя как априорная вероятность $\pi_1(t \mid t^0)$ первого состояния кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$ (лемма 1.12); отличие заключается в задании начального значения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени t_k наблюдения событий потока.

Обозначим $w(\lambda_i \mid t)$, $w(\lambda_i \mid t + \Delta t)$ – апостериорные вероятности того, что в моменты времени t и $t + \Delta t$ (Δt – достаточно малая величина) соответственно процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии S_i, $i = 1, 2$; моменты времени t и $t + \Delta t$ принадлежат $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \ldots$.

Опишем возможные ситуации на полуинтервале $(t, t + \Delta t]$, связанные с поведение процесса $\lambda(t)$ на рассматриваемом полуинтервале ненаблюдаемости потока $(t_k, t_k + T]$:

1) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$ с вероятностью $w(\lambda_i \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt не закончится состояние S_i процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\lambda_i \Delta t}=1-\lambda_i \Delta t+o(\Delta t)$, и с вероятностью единица процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии S_i, $i=1,2$; вероятность описанной ситуации равна

$$w(\lambda_i \mid t)\left(1-\lambda_i \Delta t+o(\Delta t)\right)=w(\lambda_i \mid t)-\lambda_i w(\lambda_i \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

2) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_i$ с вероятностью $w(\lambda_i \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_i процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\lambda_i \Delta t}\right)=\lambda_i \Delta t+o(\Delta t)$, наступит событие потока и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_i в S_i с вероятностью $P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)$, $i=1,2$; вероятность этой ситуации есть

$$w(\lambda_i \mid t)\left(\lambda_i \Delta t+o(\Delta t)\right)P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)=\lambda_i P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)w(\lambda_i \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

3) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_j$ с вероятностью $w(\lambda_j \mid t)$, $j=1,2$, и за промежуток времени длительности Δt закончится состояние S_j процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\lambda_j \Delta t}\right)=\lambda_j \Delta t+o(\Delta t)$, наступит событие потока и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_j в S_i, $i=1,2$, $j\neq i$, с вероятностью $p_1(\lambda_i \mid \lambda_j)$; вероятность рассмотренной ситуации равна

$$w(\lambda_j \mid t)\left(\lambda_j \Delta t+o(\Delta t)\right)P_1(\lambda_i \mid \lambda_j)=\lambda_j P_1(\lambda_i \mid \lambda_j)w(\lambda_j \mid t)\Delta t+o(\Delta t);$$

4) в момент времени t значение процесса $\lambda(t)=\lambda_j$ с вероятностью $w(\lambda_j \mid t)$, и за промежуток времени длительности Δt закон-

чится состояние S_j процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $\left(1-e^{-\lambda_j \Delta t}\right)=\lambda_j \Delta t+o(\Delta t)$, не наступит событие потока и процесс $\lambda(t)$ перейдёт из состояния S_j в S_i с вероятностью $P_0\left(\lambda_i \mid \lambda_j\right)$, $i, j=1,2$, $j \neq i$; вероятность ситуации есть

$$w\left(\lambda_j \mid t\right)\left(\lambda_j \Delta t+o(\Delta t)\right) P_0\left(\lambda_i \mid \lambda_j\right)=\lambda_j P_0\left(\lambda_i \mid \lambda_j\right) w\left(\lambda_j \mid t\right) \Delta t+o(\Delta t) .$$

Других возможных ситуаций нет.

Относительно вероятностей $w\left(\lambda_1 \mid t\right)$, $w\left(\lambda_2 \mid t\right)$ в момент времени $t+\Delta t$ имеем систему равенств:

$$\begin{gathered} w\left(\lambda_1 \mid t+\Delta t\right)=w\left(\lambda_1 \mid t\right)-\lambda_1 w\left(\lambda_1 \mid t\right) \Delta t+\lambda_1 P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right) w\left(\lambda_1 \mid t\right) \Delta t+ \\ +\lambda_2\left[P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_2\right)+P_0\left(\lambda_1 \mid \lambda_2\right)\right] w\left(\lambda_2 \mid t\right) \Delta t+o(\Delta t), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} w\left(\lambda_2 \mid t+\Delta t\right)=w\left(\lambda_2 \mid t\right)-\lambda_2 w\left(\lambda_2 \mid t\right) \Delta t+\lambda_2 P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right) w\left(\lambda_2 \mid t\right) \Delta t+ \\ +\lambda_1\left[P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_1\right)+P_0\left(\lambda_2 \mid \lambda_1\right)\right] w\left(\lambda_1 \mid t\right) \Delta t+o(\Delta t). \end{gathered}$$

В результате несложных преобразований находим

$$\begin{gathered} w\left(\lambda_1 \mid t+\Delta t\right)-w\left(\lambda_1 \mid t\right)=\left(-\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right] w\left(\lambda_1 \mid t\right)+\right. \\ \left.+\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right] w\left(\lambda_2 \mid t\right)\right) \Delta t+o(\Delta t), \\ w\left(\lambda_2 \mid t+\Delta t\right)-w\left(\lambda_2 \mid t\right)=\left(-\lambda_2\left[1-P_1\left(\lambda_2 \mid \lambda_2\right)\right] w\left(\lambda_2 \mid t\right)+\right. \\ \left.+\lambda_1\left[1-P_1\left(\lambda_1 \mid \lambda_1\right)\right] w\left(\lambda_1 \mid t\right)\right) \Delta t+o(\Delta t). \end{gathered}$$

Разделив оба соотношения на Δt и выполнив в них предельный переход при $\Delta t \to 0$, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений относительно апостериорных вероятностей $w\left(\lambda_i \mid t\right)$ состояний S_i, $i=1,2$, процесса $\lambda(t)$ на участках ненаблюдаемости потока $\left(t_k, t_k+T\right]$:

$$w'(\lambda_1 \mid t) = -\lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right]w(\lambda_1 \mid t) + \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]w(\lambda_2 \mid t),$$
$$w'(\lambda_2 \mid t) = \lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right]w(\lambda_1 \mid t) - \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]w(\lambda_2 \mid t),$$
$$w(\lambda_1 \mid t) + w(\lambda_2 \mid t) = 1.$$

С учётом условия нормировки полученная система сводится к одному дифференциальному уравнению относительно $w(\lambda_1 \mid t)$:

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} + \left(\lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]\right)w(\lambda_1 \mid t) = $$
$$= \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]$$

с начальным условием $w(\lambda_1 \mid t = t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Интегрируя последнее уравнение с разделяющимися переменными и учитывая, что $\pi_1 = \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right] \Big/ \left(\lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \right.$ $\left. + \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]\right)$, находим апостериорную вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в явном виде:

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k) - \pi_1\right]e^{-d(t - t_k)},$$

где $d = \lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]$.

Принимая во внимание замечание 2.7, согласно которому в точке t_k апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ для MAP-потока событий терпит разрыв первого рода, запишем начальное условие в виде $w(\lambda_1 \mid t_k) = w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$, подставляя которое в последнее выражение для $w(\lambda_1 \mid t)$, приходим к (3.48). *Лемма доказана*.

3.4.2. Поведение апостериорной вероятности как функции времени в общем и в особом случаях задания параметров потока

Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на начальном интервале наблюдения (t_0, t_1), на временных интервалах наблюдаемости потока $(t_k + T, t_{k+1})$, где t_k – момент наступления события MAP-потока, которое порождает период мёртвого времени фиксированной длительности T, t_{k+1} – момент наступления очередного наблюдаемого события MAP-потока, а также поведение $w(\lambda_1 \mid t)$ в точке t_k, $k = 1, 2, \ldots$, определяется леммами 2.15, 2.16 для общего случая задания параметров MAP-потока и леммами 2.16, 2.17 для особого случая задания параметров MAP-потока (параграф 2.5).

Опираясь на леммы 2.15, 2.16, 3.15, сформулируем теорему для общего случая задания параметров MAP-потока: $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$.

Теорема 3.4. Для MAP-потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на временной оси задаётся выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_0)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_0)\right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_0)}}, \quad (3.49)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0) = \pi_1 = \frac{\lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]}{\lambda_1\left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2\left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\right]},$$

$$t_0 \le t \le t_1, \; w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0);$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1 \right] e^{-d(t-t_k)},\ k = 1,2,...,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) =$$

$$= \frac{\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 \left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] + \left[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)},$$

$k = 1,2,...,\ t_k \le t \le t_k + T,\ d = \lambda_1 \left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) \right] + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \right];$

$$w(\lambda_1 \mid t) =$$

$$= \frac{w_1 \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] - w_2 \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k - T)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k - T)}}, \quad (3.50)$$

$$k = 1,2,...,\ t_k + T \le t < t_{k+1};$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= \frac{w_1 \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] - w_2 \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1} - T)}}{\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1} - T)}}, \quad (3.51)$$

$$k = 2,3,...;$$

$$w_{1,2} = \frac{1}{2a} \Bigg(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \mp$$

$$\mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)} \Bigg),$$

$$a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \ne 0,$$

где $0 \le w_1 < 1,\ w_2 \ge 1$ при $a > 0$; $0 \le w_1 \le 1,\ w_2 < 0$ при $a < 0$.

Доказательство проводится объединением формул (1.11), (2.46), (2.47), (2.50) и (3.48).

Результаты лемм 2.16, 2.17, 3.15 позволяют сформулировать теорему для особого случая задания параметров МАР-потока: $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$.

Теорема 3.5. Для МАР-потока событий при непродлевающемся мёртвом времени фиксированной длительности T для случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$ поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на временной оси определяется соотношениями

$$w(\lambda_1 \mid t) = -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w(\lambda_1 \mid t_0) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} \right] e^{b(t-t_0)}, \quad (3.52)$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0) = \pi_1 = \frac{\lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \right]}{\lambda_1 \left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) \right] + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \right]},$$

$$t_0 \le t \le t_1, \; w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0);$$

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1 \right] e^{-d(t-t_k)}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) =$$

$$= \frac{\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 \left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right]}, \quad (3.53)$$

$$k = 1, 2, \ldots, \; t_k \le t \le t_k + T, \; d = \lambda_1 \left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) \right] + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \right];$$

$$w(\lambda_1 \mid t) =$$

$$= -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + T) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} \right] e^{b(t-t_k-T)}, \quad (3.54)$$

$$k = 1,2,\ldots,\ t_k + T \le t < t_{k+1};$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) =$$

$$= -\frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} + \left[w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + T) + \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{b} \right] e^{b(t_k - t_{k-1} - T)}, \quad (3.55)$$

$$k = 2,3,\ldots;\ b = -\left[\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right].$$

Доказательство осуществляется объединением формул (1.11), (2.50), (2.55) и (3.48).

В общем и особом случаях задания параметров MAP-потока точка $t = t_k + T$ является точкой сшивания решений $w(\lambda_1 \mid t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1,2,\ldots$.

3.4.3. Алгоритм оптимального оценивания состояния MAP-потока событий при непродлевающемся мёртвом времени

Полученные в 2.5.2, 3.4.1, 3.4.2 формулы для общего случая задания параметров MAP-потока, когда в уравнении Риккати (2.44) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$, позволяют сформулировать алгоритм расчёта апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ $\left(w(\lambda_2 \mid t) = 1 - w(\lambda_1 \mid t) \right)$, а также алгоритм вынесения решения о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ (потока) в произвольный момент времени t:

1) в момент времени $t_0 = 0$ задаётся начальное значение апостериорной вероятности в виде $w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1$, определяемое формулой (1.11);

2) в любой момент времени t, $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, по формуле (3.49) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$;

3) в момент времени t_1 по формуле (3.49) вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$;

4) по формуле (2.50) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ – начальное значение для $w(\lambda_1 \mid t)$ в формуле (3.48);

5) в любой момент времени t, $t_1 < t < t_1 + T$, по формуле (3.48) для $k = 1$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$;

6) в момент времени $t = t_1 + T$ по формуле (3.48) для $k = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t = t_1 + T)$ – начальное значение для $w(\lambda_1 \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) по формуле (3.50) для $k = 1$ производится расчёт $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t, $t_1 + T < t < t_2$, где t_2 – момент наблюдения второго события потока;

8) k увеличивается на единицу и для $k = 2$ по формуле (3.51) вычисляется $w(\lambda_1 \mid t_2 - 0)$;

9) алгоритм переходит на шаг 4, затем для $k = 2$ шаги 4 – 8 повторяются и так далее.

Параллельно по ходу расчёта $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t принимается решение о состоянии сопровождающего кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$ (MAP-потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности T) по критерию максимума апостериорной вероятности.

Для *особого случая* задания параметров потока, когда в уравнении Риккати (2.44) коэффициент $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$, алгоритм оптимального оценивания состояния MAP-потока событий в условиях мёртвого времени аналогичен рассмотренному алгоритму для *общего случая* и реализуется с использованием формул (1.11), (3.48), (3.52) – (3.55).

3.4.4. Численные результаты оптимального оценивания

Алгоритм получения численных результатов оптимального оценивания состояний MAP-потока событий при непродлевающемся мёртвом времени фиксированной длительности T состоит из двух этапов.

Первый этап расчёта предполагает имитационное моделирование MAP-потока, схемы создания непродлевающегося мёртвого времени и наблюдаемого потока событий. На втором этапе расчёта непосредственно вычисляются вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_0 \le t < t_1$; $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$; $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k < t < t_k + T$; $w(\lambda_1 \mid t_k + T)$; $w(\lambda_1 \mid t)$, $t_k + T < t \le t_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$, по формулам (1.11), (2.50), (3.48) – (3.51), если $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \neq 0$, либо по формулам (1.11), (3.48), (3.52) – (3.55), если $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$, и строится оценка $\hat{\lambda}(t)$ истинной траектории кусочно-постоянного случайного процесса $\lambda(t)$, полученной путём имитационного моделирования MAP-потока событий при непродлевающемся мёртвом времени фиксированной длительности T.

Расчёты произведены для значений параметров, представленных в табл. 3.7, времени моделирования $T_m = 20$ ед. времени и значении $T = 1$ ед. времени.

Таблица 3.7

Модельные данные

$\lambda_1 = 2$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}8$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$
$\lambda_2 = 0{,}5$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}4$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}2$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}4$

В качестве иллюстрации на рис. 3.4 приведена траектория (верхняя часть рис. 3.4) процесса $\lambda(t)$ (истинная траектория), полученная путём имитационного моделирования, где S_1, S_2 – со-

стояния процесса $\lambda(t)$, и траектория (нижняя часть рис. 3.4) оценки $\hat{\lambda}(t)$, где S_1, S_2 – состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0{,}001$. На рис. 3.4 временные промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (область ошибочных решений), обозначены штриховкой.

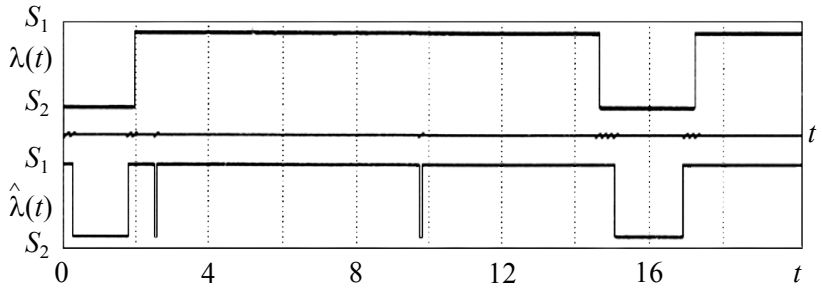

Рис. 3.4. Траектория процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

На рис. 3.5 приведена траектория поведения вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$, соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности моментов времени наблюдения событий $t_1, t_2, \ldots$ и последовательности моментов времени окончания периодов мёртвого времени $t_1 + T$, $t_2 + T, \ldots$.

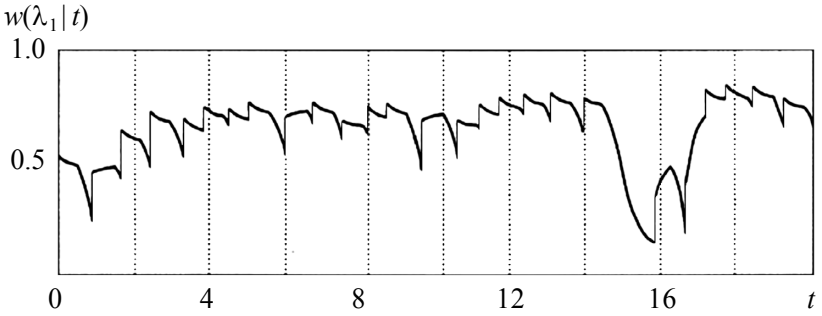

Рис. 3.5. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$

С целью установления частоты ошибочных решений о состояниях случайного процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за MAP-потоком, функционирующим в условиях мёртвого времени (наблюдаемый поток), проведён ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определённого набора параметров λ_1, λ_2, $P_1(\lambda_1|\lambda_1)$, $P_1(\lambda_2|\lambda_1)$, $P_0(\lambda_2|\lambda_1)$, $P_1(\lambda_2|\lambda_2)$, $P_1(\lambda_1|\lambda_2)$, $P_0(\lambda_1|\lambda_2)$, T единиц времени осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока событий на заданном отрезке $[0,T_m]$ – отдельная s-я реализация (испытание модели), $s=1,2,...$;

2) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1|t)$ первого состояния случайного процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке времени $[0,T_m]$;

3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0,T_m]$;

4) для отдельной s-й реализации определяется $d_s^{(T)}$ – суммарная протяжённость интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;

5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_s^{(T)} = d_s^{(T)} / T_m$, $s=\overline{1,N}$;

6) шаги 1 – 5 повторяются N раз с тем, чтобы рассчитать оценку безусловной (полной) вероятности ошибки принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ на $[0,T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_1^{(T)}, \hat{p}_2^{(T)}, ..., \hat{p}_N^{(T)}$ долей ошибочных решений в N испытаниях. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_0^{(T)} = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} \hat{p}_s^{(T)}$ и выборочная дисперсия $\hat{D}_T = \frac{1}{N-1}\sum_{s=1}^{N}\left(\hat{p}_s^{(T)} - \hat{P}_0^{(T)}\right)^2$.

Проведён ряд статистических экспериментов, суть которых заключается в следующем.

В первом статистическом эксперименте устанавливается зависимость оценки вероятности ошибки оценивания $\hat{P}_0^{(T)}$ и выборочной дисперсии $\hat{D}_T$ от времени моделирования T_m. Для первого эксперимента использовались значения параметров, представленные в табл. 3.8. Результаты первого статистического эксперимента приведены в табл. 3.9 для $T_m = 10, 20, 30, 50, 70, 100$ ед. времени.

Таблица 3.8

Исходные данные для первого статистического эксперимента

$\lambda_1 = 5$	$T = 2$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}1$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}8$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$
$\lambda_2 = 1$	$N = 100$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}1$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}8$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}1$

Таблица 3.9

Результаты первого статистического эксперимента

T_m	10	20	30	50	70	100
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,1703	0,1597	0,1634	0,1615	0,1608	0,1616
$\hat{D}_T$	0,0051	0,0023	0,0017	0,0011	0,0006	0,0005

Анализ приведённых в табл. 3.9 результатов позволяет сделать вывод о том, что с увеличением времени моделирования T_m выборочная дисперсия уменьшается. При этом оценка вероятности ошибки $\hat{P}_0^{(T)}$ является достаточно стабильной для $T_m \geq 50$ ед. времени.

Во втором статистическом эксперименте устанавливается зависимость оценки вероятности ошибки $\hat{P}_0^{(T)}$ и выборочной дисперсии $\hat{D}_T$ от параметра λ_2 при всех остальных фиксированных параметрах, представленных в табл. 3.10. Результаты второго статистического эксперимента приведены в табл. 3.11.

Таблица 3.10

Исходные данные для второго статистического эксперимента

$\lambda_1 = 5$	$T = 2$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}1$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}8$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$
$T_m = 100$	$N = 100$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}1$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}8$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}1$

Таблица 3.11

Результаты второго статистического эксперимента

λ_2	0,5	1	1,5	2	3
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,0842	0,1614	0,2253	0,2788	0,3717
$\hat{D}_T$	0,0003	0,0005	0,0004	0,0009	0,0011

Численные результаты, приведённые в табл. 3.11, показывают, что оценка вероятности ошибки $\hat{P}_0^{(T)}$ тем больше, чем «ближе» λ_1 и λ_2 по значениям.

Третий и четвёртый эксперименты проведены с целью установления типа зависимости оценки вероятности ошибки $\hat{P}_0^{(T)}$ и выборочной дисперсии $\hat{D}_T$ от значений λ_1 и λ_2. Результаты третьего и четвёртого экспериментов получены для общих значений параметров, приведённых в табл. 3.12. Результаты третьего и четвёртого экспериментов представлены в табл. 3.13, 3.14.

Таблица 3.12

Исходные данные для третьего и четвёртого статистических экспериментов

$T = 2$	$T_m = 100$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}1$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}8$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$
	$N = 100$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}1$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}8$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}1$

Для третьего эксперимента зафиксирована разность $\lambda_1 - \lambda_2 = 2$. В первой и второй строках табл. 3.13 указаны значения параметров λ_1 и λ_2, удовлетворяющие условию $\lambda_1 - \lambda_2 = 2$.

Таблица 3.13

Результаты третьего статистического эксперимента ($\lambda_1 - \lambda_2 = 2$)

λ_1	2,1	2,5	3	5
λ_2	0,1	0,5	1	3
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,0419	0,1606	0,2456	0,3618
$\hat{D}_T$	0,0002	0,0009	0,0011	0,0009

Для четвёртого эксперимента зафиксировано отношение $\lambda_1/\lambda_2 = 3$. В первой и второй строках табл. 3.14 указаны значения λ_1 и λ_2, удовлетворяющие условию $\lambda_1/\lambda_2 = 3$.

Таблица 3.14

Результаты четвёртого статистического эксперимента ($\lambda_1/\lambda_2 = 3$)

λ_1	3	6	9	15	21
λ_2	1	2	3	5	7
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,2473	0,2431	0,2481	0,2494	0,2488
$\hat{D}_T$	0,0010	0,0006	0,0004	0,0002	0,0002

Анализ численных результатов, приведённых в табл. 3.13 и 3.14, позволяет сделать вывод о том, что оценка вероятности ошибки $\hat{P}_0^{(T)}$ в большей степени зависит не от величины разности $\lambda_1 - \lambda_2$, а от величины отношения λ_1/λ_2, при этом, чем больше λ_1/λ_2, тем оценивание лучше.

В пятом статистическом эксперименте устанавливается зависимость оценки вероятности ошибки $\hat{P}_0^{(T)}$ и выборочной дисперсии $\hat{D}_T$ от длительности мёртвого времени T. Эксперимент поставлен для значений параметров, приведённых в табл. 3.15. Результаты статистического эксперимента представлены в табл. 3.16 – 3.20. В первой строке таблиц указана длительность мёртвого времени T

($T = 0,1,2,...,9$ ед. времени). Во второй и третьей строках таблиц для каждого T приведены численные значения $\hat{P}_0^{(T)}$ и $\hat{D}_T$.

Таблица 3.15

Исходные данные для пятого статистического эксперимента

$\lambda_2 = 1$	$T_m = 100$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0,98$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0,01$	$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0,01$
	$N = 100$	$P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0,7$	$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0,2$	$P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0,1$

При этом результаты в табл. 3.16 получены для $\lambda_1 = 4$, в табл. 3.17 – для $\lambda_1 = 5$, в табл. 3.18 – для $\lambda_1 = 6$, в табл. 3.19 – для $\lambda_1 = 7$, в табл. 3.20 – для $\lambda_1 = 8$.

Таблица 3.16

Результаты пятого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 4$)

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,0997	0,1512	0,1651	0,1739	0,1740	0,1841	0,1794	0,1868	0,1804	0,1864
$\hat{D}_T$	0,0011	0,0029	0,0050	0,0062	0,0065	0,0076	0,0068	0,0072	0,0079	0,0087

Таблица 3.17

Результаты пятого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5$)

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,0902	0,1655	0,1817	0,1837	0,2033	0,2073	0,2030	0,2076	0,2145	0,2122
$\hat{D}_T$	0,0007	0,0026	0,0054	0,0044	0,0066	0,0068	0,0068	0,0058	0,0079	0,0099

Таблица 3.18

Результаты пятого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 6$)

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,0823	0,1774	0,2016	0,2184	0,2178	0,2323	0,2392	0,2318	0,2391	0,2541
$\hat{D}_T$	0,0005	0,0023	0,0042	0,0055	0,0057	0,0071	0,0074	0,0066	0,0081	0,0092

Таблица 3.19

Результаты пятого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 7$)

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0^{(T)}$	0,0759	0,1850	0,2166	0,2378	0,2470	0,2477	0,2684	0,2568	0,2687	0,2712
$\hat{D}_T$	0,0002	0,0019	0,0040	0,0055	0,0057	0,0075	0,0074	0,0073	0,0085	0,0094

Таблица 3.20

Результаты пятого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 8$)

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{P}_0$	0,0746	0,1902	0,2315	0,2557	0,2579	0,2794	0,2800	0,2902	0,2929	0,3191
$\hat{D}_T$	0,0002	0,0023	0,0045	0,0045	0,0059	0,0065	0,0074	0,0069	0,0073	0,0078

Анализ результатов, приведённых в табл. 3.16 – 3.20, показывает:

1) тренд значений оценки $\hat{P}_0^{(T)}$ в зависимости от значения T возрастающий, так как при увеличении T увеличиваются потери полезной информации о потоке, что, в конечном итоге, ведёт к ухудшению качества оценивания;

2) если $T = 0$, то тренд значений оценки $\hat{P}_0^{(T)}$ в зависимости от λ_1 убывающий, так как при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ условия различимости состояний потока улучшаются;

3) при фиксированном значении T $(T = 1,2,...,9)$ тренд оценки $\hat{P}_0^{(T)}$ в зависимости от λ_1 возрастающий, так как увеличение λ_1 влечёт за собой увеличение потерь событий исходного MAP-потока;

4) оценка $\hat{D}_T$ для всех вариантов расчёта достаточно мала.

Вопросы и темы для самоконтроля

1. Почему поток событий называется асинхронным?

2. Почему поток событий называется синхронным?

3. Можно ли полусинхронный поток назвать полуасинхронным?

4. Какой поток является частным случаем MAP-потока?

5. В чём отличие обобщённого асинхронного потока событий от асинхронного потока?

6. Назвать отличие обобщённого полусинхронного потока событий от полусинхронного потока.

7. По какой причине представленные в главах 1 и 3 потоки относятся к классу дважды стохастических потоков?

8. Почему все рассмотренные потоки событий являются коррелированными?

9. Каким свойством должны обладать перечисленные выше потоки, чтобы стать некоррелированными?

10. Дать физическую интерпретацию инфинитезимальных характеристик сопровождающего случайного процесса.

11. Каким отличительным свойством обладает апостериорная вероятность?

12. Почему оценивание состояний потока по критерию максимума апостериорной вероятности является оптимальным?

13. Назовите условие применимости методики Стратоновича–Хазен для вывода рекуррентного соотношения, определяющего распределение апостериорных вероятностей для значений ненаблюдаемых компонент случайного процесса при условии известных значений наблюдаемых его компонент.

14. Вывести рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей состояний дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний.

15. Дать физическую интерпретацию того факта, что апостериорная вероятность для всех рассматриваемых потоков является разрывной функцией времени.

16. При выполнении какого условия поведение апостериорной вероятности первого состояния синхронного потока не зависит от предыстории? Дать физическую интерпретацию этого явления.

17. Какое условие обеспечивает независимость от предыстории поведения апостериорной вероятности первого состояния сопровождающего случайного процесса для полусинхронного потока? Дать физическую интерпретацию этого явления.

18. Какие условия обеспечивают независимость от предыстории (в общем и особом случаях задания параметров потока) поведения апостериорной вероятности первого состояния сопровождающего процесса для MAP-потока? Дать физическую интерпретацию этого явления.

19. Чем отличаются друг от друга понятия «непродлевающееся мёртвое время» и «продлевающееся мёртвое время»? Пояснить на временной диаграмме.

20. Изменятся ли условия пунктов 16–18 для синхронного, полусинхронного и MAP-потоков событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мёртвого времени?

21. Каким образом ведёт себя среднее количество потерянных событий исходного потока в зависимости от длительности мёртвого времени?

22. При каком типе мёртвого времени (продлевающееся, непродлевающееся), имеющего фиксированную длительность, потери событий исходного потока окажутся в среднем бóльшими?

23. Для какого потока – асинхронного или обобщённого асинхронного, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени, потери событий исходного потока будут в среднем бóльшими?

24. Для какого потока – полусинхронного или обобщённого полусинхронного, функционирующего в условиях непродлевающе-

гося мёртвого времени, потери событий исходного потока в среднем будут бóльшими?

25. Возможно ли получить аналитическую формулу для вероятности ошибки принятия решения о состояниях коррелированных потоков? Каким образом поступать в случае отрицательного ответа?

26. С какой целью осуществляется имитационное моделирование дважды стохастических потоков событий, функционирующих как в условиях полной наблюдаемости, так и при наличии непродлевающегося мёртвого времени?

Литература

1. *Erlang A. K.* The theory of probabilities and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. Seria B. 1909. Vol. 20, is. B. P. 33–39.

2. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 236 с.

3. *Гнеденко Б. В.*, *Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4-е, испр. М. : Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.

4. *Малинковский Ю. В.* Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика): учеб. пособие. Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. 146 с.

5. *Bartlett M. S.* The spectral analysis of point processes // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 1963. Vol. 25, № 2. P. 264–296.

6. *Cox D. R.* Some statistical methods connected with series of events // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 1955. Vol. 17, № 2. P. 129–164.

7. *Kingman J. F. C.* On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. Vol. 60, is. 4. P. 923–930.

8. *Башарин Г. П.*, *Кокотушкин В. А.*, *Наумов В. А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. Ч. 1, № 6. С. 92–99.

9. *Башарин Г. П.*, *Кокотушкин В. А.*, *Наумов В. А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. Ч. 2, № 1. С. 55–61.

10. *Neuts M. F.* A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. Vol. 16. P. 764–779.

11. *Lucantoni D. M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. Vol. 7. P. 1–46.

12. *Горцев А. М.*, *Нежельская Л. А.* Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий // Дискретная математика. 2011. Т. 23, вып. 2. С. 59–65.

13. *Назаров А. А.*, *Терпугов А. Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.

14. *Бушланов И. В.*, *Горцев А. М.*, *Нежельская Л. А.* Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.

15. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 2, 752 с.

16. *Горцев А. М.*, *Нежельская Л. А.* Полусинхронный дважды стохастический поток при продлевающемся мёртвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.

17. *Gortsev A. M., Nezhel'skaya L. A., Solov'ev A. A.* Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, is. 8. P. 1316–1326.

18. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального уравнения. М.: Советское радио, 1968. 256 с.

19. *Vishnevsky V. M., Dudin A. N., Kozyrev D. M., Larionov A. A.* Performance evaluation of broadband wireless networks along the long transport routes // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015): материалы Восемнадцатой международной научной конференции.. М., 2015. С. 241–156.

20. *Вишневский В. М., Дудин А. Н., Клименок В. И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : ТЕХНОСФЕРА, 2018. 564 с.

21. *Апанасович В. В., Коляда А. А., Чернявский А. Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.

22. *Горцев А. М., Леонова М. А., Нежельская Л. А.* Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мёртвого времени в обобщённом

асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.

23. *Горцев А. М., Калягин А. А., Нежельская Л. А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщённом полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.

Оглавление

Предисловие 3

Глава 1. Различные математические модели дважды стохастических потоков событий 5
1.1. О дважды стохастических потоках 5
1.2. Асинхронный (MMPP – Markovian Modulated Poisson Process) поток 8
1.3. Синхронный поток 18
1.4. Полусинхронный поток 30
1.5. MAP-поток 36

Глава 2. Оптимальное оценивание состояний дважды стохастических потоков событий при полной наблюдаемости потоков 46
2.1. Рекуррентные соотношения для апостериорных вероятностей состояний 46
2.2. Оптимальная оценка состояний асинхронного потока ... 52
2.2.1. Дифференциальное уравнение для апостериорных вероятностей 52
2.2.2. Явный вид апостериорных вероятностей и формула пересчёта 57
2.2.3. Алгоритм принятия решения о состоянии потока 63
2.3. Оптимальное оценивание состояний синхронного потока 64
2.3.1. Вывод дифференциального уравнения Бернулли 64
2.3.2. Поведение апостериорной вероятности на временной оси 69
2.3.3. Алгоритм оценки состояний синхронного потока событий 75
2.4. Оптимальная оценка состояний полусинхронного потока 76

2.4.1. Вывод дифференциального уравнения для апостериорных вероятностей 76
2.4.2. Апостериорные вероятности в явном виде и формула пересчёта 81
2.4.3. Алгоритм оптимального оценивания состояния потока 88
2.5. Оптимальное оценивание состояний MAP-потока 89
2.5.1. Уравнение Риккати для апостериорных вероятностей 89
2.5.2. Апостериорная вероятность как функция времени в общем и в особом случаях задания параметров потока и формула пересчёта 95
2.5.3. Алгоритм вынесения решения о состоянии потока и численные результаты оптимального оценивания 106

Глава 3. Оптимальное оценивание состояний дважды стохастических потоков событий при наличии непродлевающегося мёртвого времени 113
3.1. Условия неполной наблюдаемости за дважды стохастическими потоками событий 113
3.2. Оптимальная оценка состояний обобщённого асинхронного потока при непродлевающемся мёртвом времени 115
3.2.1. Описание обобщённого асинхронного потока в условиях неполной наблюдаемости 115
3.2.2. Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности 124
3.2.3. Вид апостериорной вероятности на временных интервалах наблюдаемости потока 125
3.2.4. Вид апостериорной вероятности на интервалах мёртвого времени 134
3.2.5. Поведение апостериорной вероятности на временной оси для общего и особого случаев задания параметров потока 140
3.2.6. Алгоритм оценки состояний обобщённого асинхронного потока событий при наличии мёртвого времени и численные результаты 145

3.3. Оптимальное оценивание состояний обобщённого полусинхронного потока при наличии непродлевающегося мёртвого времени 151
3.3.1. Математическая модель обобщённого полусинхронного потока при его неполной наблюдаемости 151
3.3.2. Апостериорная вероятность на интервалах наблюдаемости потока 158
3.3.3. Апостериорная вероятность в условиях мёртвого времени 168
3.3.4. Апостериорная вероятность как функция времени для общего и особого случаев задания параметров потока 175
3.3.5. Алгоритм принятия решения о состоянии обобщённого полусинхронного потока событий в условиях мёртвого времени 180
3.4. Оптимальная оценка состояний MAP-потока, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени 182
3.4.1. Апостериорная вероятность на участках ненаблюдаемости потока 183
3.4.2. Поведение апостериорной вероятности как функции времени в общем и в особом случаях задания параметров потока 188
3.4.3. Алгоритм оптимального оценивания состояния MAP-потока событий при непродлевающемся мёртвом времени 191
3.4.4. Численные результаты оптимального оценивания... 193

Вопросы и темы для самоконтроля 201

Литература 204

Учебное издание

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Учебное пособие

Редактор К.Г. Шилько
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 29.12.2020 г. Формат $60\times84\,^{1}/_{16}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Печ. л. 13,1. Усл.-печ. л. 12,2. Тираж 500 экз. Заказ № 4488.

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-973-0