

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/66/12

А. Юлдашев, Ш.Т. Пирматов

**АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

Рассматривается построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчета гибких пластин с использованием нелинейной теории Лява, разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин, апробация построенной автоматизированной системы и исследование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

Ключевые слова: алгоритм, пластина, теория упругости, сферическая пластинка.

Динамический расчёт гибких пластин используется при проектировании корпусов судов, самолетов, ракет и других технических объектов, которые наряду с достаточной прочностью должны иметь наименьший вес, достигающийся путем применения облегченных пластин и снижения запаса прочности.

В данной работе на основе метода конечных разностей разрабатывается вычислительный алгоритм решения динамических краевых задач теории гибких пластин.

В связи с этим методы динамического расчёта пластин как в классической линейной постановке, так и в геометрической нелинейной постановке задачи постоянно совершенствуются.

В настоящей работе рассматриваются следующие вопросы:

1. Построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчёта гибких прямоугольных пластин с использованием нелинейной теории Лява.

2. Разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин.

3. Апробация построенной автоматизированной системы.

4. Использование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

Проблема создания автоматизированной системы решения задач теории упругости и пластичности впервые была поставлена в монографии В.К. Кабулова [1], где сформулированы основные задачи алгоритмизации и указаны пути их машинного решения.

Задача алгоритмизации решается в четыре этапа. На первом в зависимости от геометрических свойств объекта и физических свойств материала выбирается расчётная схема конструкции. Второй этап связан с выводом исходных дифференциальных уравнений и соответствующих им граничных условий. Выбор вычислительного алгоритма и численное решение полученных уравнений составляет третий этап исследований. Четвертый этап завершается анализом полученных численных результатов, описывающих напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкций.

При этом построение вычислительного алгоритма для численного решения сформулированных краевых задач представляет собой основной этап алгоритмизации.

В соответствии с проведенным анализом проблем, возникающих при автоматизации расчета тонкостенных элементов конструкций машиностроения, целесообразно остановиться на нелинейной динамической расчетной схеме гибкой однородной изотропной линейно-упругой оболочкой произвольной формы, при описании движения которой учитываются как влияние сдвигов, так и инерции вращения.

Такая модель даст возможность расчета в рамках единой достаточно гибкой и быстродействующей схемы широкого класса динамических процессов, происходящих в разнообразных по форме и не слишком сильно ограниченных по толщине пластинках и оболочках, которые составляют заметную часть элементов конструкций.

Различные варианты динамических дифференциальных уравнений движения пластин достаточно хорошо разработаны и апробированы. Очевидно, что при создании системы автоматизированного расчёта не имеет особого смысла построение отдельных алгоритмов для расчёта плоских пластин.

В настоящей работе рассматриваются уравнения движения гибких прямоугольных пластин. Уравнения приводятся к удобной для вычислений безразмерной форме. Описываются конечно-разностные схемы, используемые для преобразования уравнений движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, по схеме Рунге-Кутты.

1. Уравнения движения прямоугольных пластин

Уравнения движения без учета влияния сдвигов и инерции вращения в геометрически нелинейной постановке в форме Лава [3, 10, 11, 12] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{y}} - \bar{Q}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} - \bar{Q}_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} &= \rho h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}, \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{y}} - \bar{Q}_1 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \bar{Q}_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} &= \rho h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}^2}, \\ \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial \bar{y}} + \bar{T}_1 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}^2} + 2\bar{S} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{T}_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{q} &= \rho h \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \frac{12}{h^2} D(\bar{\epsilon}_{11} + \mu \bar{\epsilon}_{22}), \quad \bar{T}_2 = \frac{12}{h^2} D(\bar{\epsilon}_{11} + \mu \bar{\epsilon}_{22}), \\ \bar{S} = \bar{S}_1 = -\bar{S}_2 &= \frac{6(1-\mu)}{h^2} D \bar{\epsilon}_{12}, \quad \bar{Q}_1 = D \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 \bar{w}, \\ \bar{Q}_2 &= D \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla^2 \bar{w}, \quad \bar{\epsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2, \\ \bar{\epsilon}_{12} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\epsilon}_{22} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2. \end{aligned}$$

$D = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала; h – толщина пластин; $\bar{q}$ – внешняя нагрузка.

Подставляя выражения для $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ в (1), получаем уравнения движения в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{a}_1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{a}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{a}_3 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{a}_4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{a}_5 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{a}_6 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{b}_1 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{b}_2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{b}_3 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{b}_4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{b}_5 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{b}_6 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} &= \bar{c}_1 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \bar{c}_2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \bar{c}_3 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} + \bar{c}_4 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{c}_5 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{c}_6 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{q} q_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{12}{h^2}, \quad \bar{a}_2 = \frac{6(1-\mu)}{h^2}, \quad \bar{a}_3 = \frac{6(1+\mu)}{h^2}, \\ \bar{a}_4 &= \frac{12}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 \bar{w}, \quad \bar{a}_5 = \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla^2 \bar{w}, \\ \bar{a}_6 &= \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{b}_1 = \frac{6(1-\mu)}{h^2}, \quad \bar{b}_2 = \frac{12}{h^2}, \quad \bar{b}_3 = \frac{6(1+\mu)}{h^2}, \\ \bar{b}_4 &= \frac{6(1-\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{b}_5 = \frac{6(1+\mu)}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \nabla^2 \bar{w}, \\ \bar{b}_6 &= \frac{12}{h^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \nabla^2 \bar{w}, \quad \bar{c}_1 = -1, \quad \bar{c}_2 = -2, \quad \bar{c}_3 = -1, \\ \bar{c}_4 &= \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \right\}, \\ \bar{c}_5 &= \frac{12}{h^2} (1-\mu) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right), \\ \bar{c}_6 &= \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] \right\}, \\ \bar{q}_0 &= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}, \quad \bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned}$$

Вводя следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = \frac{\bar{y}}{b}, \quad u = \frac{\bar{u}}{h}, \quad v = \frac{\bar{v}}{h}, \quad w = \frac{\bar{w}}{h}, \quad \gamma = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{b}{h}, \quad t = \sqrt{\rho h \frac{b^4}{D}} \bar{t}, \quad (3)$$

в (2) получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + c_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \beta,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где a, b – длина и ширина пластины.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 12(\gamma\delta)^2, \quad a_2 = b(1-\mu)\delta^2, \quad a_3 = b(1+\mu)\gamma\delta^2, \\
 a_4 &= 12\gamma^3\delta \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{12\delta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 a_5 &= 6(1+\mu)\gamma\delta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 a_6 &= 6(1-\mu)\gamma\delta \frac{\partial w}{\partial y}, \quad b_1 = 6(1-\mu)\gamma\delta^2, \quad b_2 = 12\delta^2, \quad b_3 = 6(1+\mu)(\gamma\delta)^2, \\
 b_4 &= 6(1-\mu)\gamma^2\delta \frac{\partial w}{\partial y}, \quad b_5 = 6(1+\mu)\gamma^2\delta \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 b_6 &= 12\delta \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{12\delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \\
 c_1 &= -\gamma^4, \quad c_2 = -2\gamma^2, \quad c_3 = -1, \\
 c_4 &= 12\gamma^2\delta \left\{ \gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]^2 \right\}, \\
 c_5 &= 6(1-\mu)\gamma\delta \left(\gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
 c_6 &= 12\delta \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu\gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \\
 \beta &= qq_0, \quad q = q(x, y, z), \quad q_0 = \frac{12(1-\mu^2)}{E} \delta^4.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (4) решается в области

$$G = \Omega \times T \quad (\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad T = \{0 \leq t \leq t_1\})$$

с начальными и граничными условиями

$$y|_{t=0} = y^0, \quad \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}^0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
T_v \delta u_v|_{\Gamma} &= 0, \\
T_{v\tau} \delta u_{v\tau}|_{\Gamma} &= 0, \\
M_v \delta \frac{\partial w}{\partial v}|_{\Gamma} &= 0, \\
R_v \delta w|_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $y(x, y, t) = \{u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)\}$.

2. Интегрирование уравнений движения гибких прямоугольных пластин методом прямых

Система уравнений (4) с начальными и граничными условиями (5), (6) решается методом сеток в области

$$\begin{aligned}
G = \Omega_{h_1 h_2} \times T \quad (\Omega_{h_1 h_2} = \{0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_j \leq 1\} \quad T = \{0 \leq t \leq t_1\}) \\
\left(x_i = ih_1, \quad y = jh_2, \quad h_1 = \frac{1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{1}{N_2}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2} \right).
\end{aligned}$$

Пользуясь центральными разностными формулами, аппроксимирующими частные производные по x и y с точностью второго порядка [4–9, 13], вместо (4) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_{ij} &= a_{ij}^{(1)} v_{i-1,j-1} + a_{ij}^{(2)} w_{i-1,j-1} + a_{ij}^{(3)} u_{i-1,j} + a_{ij}^{(4)} w_{i-1,j} + a_{ij}^{(5)} v_{i-1,j+1} + a_{ij}^{(6)} w_{i-1,j+1} + \\
&\quad + a_{ij}^{(7)} u_{i,j-1} + a_{ij}^{(8)} w_{i,j-1} + a_{ij}^{(9)} u_{i,j} + a_{ij}^{(10)} w_{i,j} + a_{ij}^{(11)} u_{i,j+1} + a_{ij}^{(12)} w_{i,j+1} + \\
&\quad + a_{ij}^{(13)} v_{i+1,j-1} + a_{ij}^{(14)} w_{i+1,j-1} + a_{ij}^{(15)} u_{i+1,j} + a_{ij}^{(16)} w_{i+1,j} + a_{ij}^{(17)} v_{i+1,j+1} + a_{ij}^{(18)} w_{i+1,j+1}, \\
\ddot{v}_{ij} &= b_{ij}^{(1)} u_{i-1,j-1} + b_{ij}^{(2)} w_{i-1,j-1} + b_{ij}^{(3)} v_{i-1,j} + b_{ij}^{(4)} w_{i-1,j} + b_{ij}^{(5)} u_{i-1,j+1} + b_{ij}^{(6)} w_{i-1,j+1} + \\
&\quad + b_{ij}^{(7)} v_{i,j-1} + b_{ij}^{(8)} w_{i,j-1} + b_{ij}^{(9)} v_{i,j} + b_{ij}^{(10)} w_{i,j} + b_{ij}^{(11)} v_{i,j+1} + b_{ij}^{(12)} w_{i,j+1} + \\
&\quad + b_{ij}^{(13)} u_{i+1,j-1} + b_{ij}^{(14)} w_{i+1,j-1} + b_{ij}^{(15)} v_{i+1,j} + b_{ij}^{(16)} w_{i+1,j} + b_{ij}^{(17)} u_{i+1,j+1} + b_{ij}^{(18)} w_{i+1,j+1}, \\
\ddot{w}_{ij} &= c_{ij}^{(1)} w_{i-1,j-1} + c_{ij}^{(2)} w_{i-1,j} + c_{ij}^{(3)} w_{i-1,j+1} + c_{ij}^{(4)} w_{i,j-1} + c_{ij}^{(5)} w_{i,j} + c_{ij}^{(6)} w_{i,j+1} + c_{ij}^{(7)} w_{i+1,j-1} + \\
&\quad + c_{ij}^{(8)} w_{i+1,j} + c_{ij}^{(9)} w_{i+1,j+1} + c_{ij}^{(10)} w_{i-2,j} + c_{ij}^{(11)} w_{i,j-2} + c_{ij}^{(12)} w_{i,j+2} + c_{ij}^{(13)} w_{i+2,j} + \beta_i,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(17)} = -a_{ij}^{(5)} = -a_{ij}^{(13)} = a_3 \frac{N_1 N_2}{4}, \\
a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(18)} = -a_{ij}^{(6)} = -a_{ij}^{(14)} = a_5 \frac{N_1 N_2}{4}, \\
a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(15)} = a_1 N_1^2, \quad a_{ij}^{(4)} = a_{ij}^{(16)} = a_4 N_1^2, \\
a_{ij}^{(7)} &= a_{ij}^{(11)} = a_2 N_2^2, \quad a_{ij}^{(8)} = a_{ij}^{(12)} = a_6 N_2^2, \\
a_{ij}^{(9)} &= -2(a_1 N_1^2 + a_2 N_2^2), \quad a_{ij}^{(10)} = -2(a_4 N_1^2 + a_6 N_2^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{(1)} &= b_{ij}^{(17)} = -b_{ij}^{(5)} = -b_{ij}^{(13)} = b_1 \frac{N_1 N_2}{4}, \quad b_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(18)} = -b_{ij}^{(6)} = -b_{ij}^{(14)} = b_1 \frac{N_1 N_2}{4}, \\
b_{ij}^{(3)} &= b_{ij}^{(15)} = b_2 N_1^2, \quad b_{ij}^{(4)} = b_{ij}^{(16)} = b_4 N_1^2, \quad b_{ij}^{(7)} = b_{ij}^{(11)} = b_3 N_2^2, \quad b_{ij}^{(8)} = b_{ij}^{(12)} = b_6 N_2^2, \\
b_{ij}^{(9)} &= -2(b_2 N_1^2 + b_3 N_2^2), \quad b_{ij}^{(10)} = -2(b_4 N_1^2 + b_6 N_2^2), \\
c_{ij}^{(1)} &= N_1^2 N_2^2 c_2 + c_5 \frac{N_1 N_2}{4}, \quad c_{ij}^{(2)} = -4N_1^4 c_1 - 2N_1^2 N_2^2 c_2 + N_1^2 c_4, \\
c_{ij}^{(3)} &= N_1^2 N_2^2 c_2 - c_5 \frac{N_1 N_2}{4}, \quad c_{ij}^{(4)} = -4N_2^4 c_3 + 6c_3 N_2^4 - 2c_4 N_1^2 + 4N_1^2 N_2^2 c_2 - 2N_2^2 c_6, \\
c_{ij}^{(4)} &= c_{ij}^{(6)}, \quad c_{ij}^{(3)} = c_{ij}^{(7)}, \quad c_{ij}^{(8)} = c_{ij}^{(2)}, \quad c_{ij}^{(9)} = c_{ij}^{(1)}, \\
c_{ij}^{(10)} &= c_1 N_1^4, \quad c_{ij}^{(11)} = c_3 N_2^4, \quad c_{ij}^{(12)} = c_{ij}^{(11)}, \quad c_{ij}^{(13)} = c_{ij}^{(10)}, \\
a_4 &= 6\gamma^3 \delta N_1 \left\{ w_{i+1,j} - w_{i-1,j} + \frac{1}{12\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_2^2 (w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j-1}) \right] \right\}, \\
a_5 &= 3(1+\mu)\gamma\delta N_2 \left\{ w_{i,j+1} - w_{i,j-1} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2w_{i,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}) + N_2^2 (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) \right] \right\}, \\
a_6 &= 3(1-\mu)\gamma\delta N_1 (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \quad b_4 = 3(1-\mu)\gamma^2 \delta N_2 (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), \\
b_5 &= 3(1+\mu)\gamma^2 \delta N_1 \left\{ w_{i+1,j} - w_{i-1,j} + \frac{1}{6(1+\mu)\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - w_{i-2,j}) + N_2^2 (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}) \right] \right\}, \\
b_6 &= 6\delta N_1 \left\{ w_{i,j+1} - w_{i,j-1} + \frac{1}{12\delta^2} \left[(\gamma N_1)^2 (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}) + N_2^2 (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) \right] \right\}, \\
c_4 &= 6\gamma^2 \delta N_1 \left\{ \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right] + \mu \left[v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right] \right\}, \\
c_5 &= 3(1-\mu)\gamma\delta \left[(\gamma N_1)(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + N_2 (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \frac{\gamma N_1 N_2}{2\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \right], \\
c_6 &= 6\delta \left\{ N_2 \left[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right] + \mu \gamma N_1 \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

с начальными и граничными условиями

$$y_{ij} \big|_{t=0} = y_{ij}^0, \quad \dot{y}_{ij} \big|_{t=0} = \dot{y}_{ij}^0. \quad (8)$$

В случае заземления контура

$$y_{0,j} \mid_{x=0} = 0, \quad y_{N_1,j} \mid_{x=1} = 0, \quad y_{i,0} \mid_{y=0} = 0, \quad y_{iN_2} \mid_{y=1} = 0; \quad (9)$$

$$w_{-1,j} \mid_{x=0} = w_{1,j}, \quad w_{i+1,j} \mid_{x=1} = w_{N_1-1,j}, \quad w_{i,-1} \mid_{y=0} = w_{i,1}, \quad w_{i,N_2+1} \mid_{y=1} = w_{i,N_2-1}, \quad (10)$$

а в случае шарнирного отпирания

$$w_{-1,j} \mid_{x=0} = -w_{1,j}, \quad w_{T+1,j} \mid_{x=1} = -w_{N_1-1,j}, \quad w_{i,-1} \mid_{y=0} = -w_{i,1}, \quad w_{i,N_2+1} \mid_{y=1} = -w_{i,N_2-1}. \quad (11)$$

Учитывая соответствующие разностные краевые условия, систему (7) представим в следующей форме:

$$\ddot{Y}_I = MY_I + g, \quad (12)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & D_1 & E_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 & E_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & A_{N_1-4} & B_{N_1-4} & C_{N_1-4} & D_{N_1-4} & E_{N_1-4} \\ & & A_{N_1-3} & B_{N_1-3} & C_{N_1-3} & D_{N_1-3} & E_{N_1-3} \\ & & & A_{N_1-2} & B_{N_1-2} & C_{N_1-2} & D_{N_1-2} \\ & & & & A_{N_1-1} & B_{N_1-1} & C_{N_1-1} \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ & a_{22} & & & & \\ & & a_{33} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{N_2-3,N_2-3} & & \\ & & & & a_{N_2-2,N_2-2} & \\ & & & & & a_{N_2-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_{N_2-2,N_2-3} & b_{N_2-2,N_2-2} & b_{N_2-2,N_2-1} \\ & & & b_{N_2-1,N_2-2} & b_{N_2-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & c_{N_2-2,N_2-4} & c_{N_2-2,N_2-3} & c_{N_2-2,N_2-2} & c_{N_2-2,N_2-1} \\ & & c_{N_2-1,N_2-3} & c_{N_2-1,N_2-2} & c_{N_2-1,N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$D_i = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & & & & & \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & & & & \\ & d_{32} & d_{33} & d_{34} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & d_{N_2-3, N_2-4} & d_{N_2-3, N_2-3} & d_{N_2-3, N_2-2} & & & \\ & & d_{N_2-2, N_2-3} & d_{N_2-2, N_2-2} & d_{N_2-2, N_2-1} & & \\ & & & d_{N_2-1, N_2-2} & d_{N_2-1, N_2-1} & & \end{pmatrix},$$

$$E_i = \begin{pmatrix} e_{11} & & & & & & \\ & e_{22} & & & & & \\ & & e_{33} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & e_{N_2-3, N_2-3} & & & \\ & & & & e_{N_2-2, N_2-2} & & \\ & & & & & e_{N_2-1, N_2-1} & \end{pmatrix},$$

$$g_i = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{N_1-2} \\ g_{N_1-1} \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{N_2-2} \\ g_{N_2-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(10)} \end{pmatrix}, \quad b_{\bar{j}, \bar{j}-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(1)} & a_{ij}^{(2)} \\ b_{ij}^{(1)} & 0 & b_{ij}^{(2)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(3)} & 0 & a_{ij}^{(4)} \\ 0 & b_{ij}^{(3)} & b_{ij}^{(4)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b_{j, \bar{j}+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(5)} & a_{ij}^{(6)} \\ b_{ij}^{(5)} & 0 & b_{ij}^{(1)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$c_{i, j-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(11)} \end{pmatrix}, \quad c_{j, j-1} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(7)} & 0 & a_{ij}^{(8)} \\ 0 & b_{ij}^{(7)} & b_{ij}^{(8)} \end{pmatrix},$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(4)} & 0 & a_{ij}^{(10)} \\ 0 & b_{ij}^{(9)} & b_{ij}^{(10)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(5)} \end{pmatrix}, \quad c_{j, j+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(11)} & a_{ij}^{(12)} \\ b_{ij}^{(11)} & 0 & b_{ij}^{(12)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(6)} \end{pmatrix},$$

$$c_{i,j+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(6)} \end{pmatrix}, \quad d_{j,j-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(13)} & a_{ij}^{(14)} \\ b_{ij}^{(13)} & 0 & b_{ij}^{(14)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(7)} \end{pmatrix},$$

$$d_{j,j} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(15)} & 0 & a_{ij}^{(16)} \\ 0 & b_{ij}^{(15)} & b_{ij}^{(16)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(8)} \end{pmatrix}, \quad d_{j,j+1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(17)} & a_{ij}^{(18)} \\ b_{ij}^{(17)} & 0 & b_{ij}^{(18)} \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(9)} \end{pmatrix},$$

$$e_{j,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(13)} \end{pmatrix}, \quad Y_{Ii} = \begin{pmatrix} Y_{I1,j} \\ Y_{I2,j} \\ \dots \\ Y_{IN_1-2,j} \\ Y_{IN_1-1,j} \end{pmatrix}, \quad Y_j = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{N_2-2} \\ Y_{N_2-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{при } i = 1, j = \overline{1, (N_2 - 1)} \quad \bar{c}_1 = c_1 \neq A_1;$$

$$\text{при } i = N_1 - 1, j = \overline{1, (N_2 - 1)} \quad \bar{c}_{N_1-1} = c_{N_1-1} \neq E_{N_1-1};$$

$$\text{при } i = \overline{1, (N_1 - 1)}, j = 1 \quad \bar{c}_{ij}^{(5)} = c_{ij}^{(5)} \neq c_{ij}^{(11)};$$

$$\text{при } i = \overline{1, (N_1 - 1)}, j = N_2 - 1 \quad \bar{c}_{ij}^{(5)} = c_{ij}^{(5)} \neq c_{ij}^{(12)}.$$

Для решения системы (12) с начальными условиями (8) применяется симметричная формула Рунге-Кутты четвертого порядка точности [4, 6, 7]. При этом система уравнений (12) приводится к виду

$$\dot{Y} = \Upsilon Y + \tilde{b}, \quad (13)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} Y_I \\ Y_{II} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Тогда начальные условия примут вид

$$\left. \begin{aligned} Y_I|_{t=0} &= Y_I^0, & Y_{II}|_{t=0} &= Y_{II}^0, \\ \dot{Y}_I|_{t=0} &= \dot{Y}_I^0, & \dot{Y}_{II}|_{t=0} &= \dot{Y}_{II}^0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С учетом (14) уравнения (13) решаются по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_I &= Y_I^0 + \tau \bar{\alpha} \bar{Y}_{II}, & Y_I' &= Y_I' + \tau \bar{\beta} \bar{Y}_{II}, \\ \bar{Y}_{II} &= Y_{II}^0 + \tau \bar{\alpha} \dot{Y}_{II}, & Y_{II}' &= Y_{II}' + \tau \bar{\beta} \dot{Y}_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $\bar{Y}, \bar{Y}_{II}, Y_I^0, Y_{II}^0$ – соответственно текущие и начальные значения, Y_I', Y_{II}' – искомые функции.

После определения искомых функции методом Рунге-Кутты по формуле (15) вычисляются расчетные величины по следующим формулам:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\gamma N_1}{2\delta} \left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right],$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\delta} \left[N_2(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \gamma N_1(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{\gamma N_1 N_2}{2\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \right],$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{N_2}{2\delta} \left[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right],$$

$$\chi_{11} = \frac{(\gamma N_1)^2}{\delta^2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}),$$

$$\chi_{12} = \frac{\gamma N_1 N_2}{4\delta^2} (w_{i+1,j-1} - w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}),$$

$$\chi_{11} = \frac{N_2^2}{\delta^2} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}),$$

$$Q_1 = -\frac{\gamma N_1}{\delta^3} \left[\frac{(\gamma N_1)^2}{2} (w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - 2w_{i-2,j}) + \right. \\ \left. + \frac{N_2^2}{2} (w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j-1}) \right],$$

$$Q_2 = -\frac{N_2}{\delta^3} \left[\frac{N_2^2}{2} (w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}) + \right. \\ \left. \frac{(\lambda N_1)^2}{2} (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j+1} - 2w_{i,j-1}) \right],$$

$$T_1 = \varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}, \quad T_2 = \varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11}, \quad s = \varepsilon_{12},$$

$$M_{11} = -(\chi_{11} + \mu \chi_{22}), \quad M_{22} = -(\chi_{22} + \mu \chi_{11}), \quad M_{12} = \chi_{12},$$

$$\sigma_{11}^k = \sigma_{11}^m + (-1)^k \sigma_{11}^u, \quad \sigma_{22}^k = \sigma_{22}^m + (-1)^k \sigma_{22}^u, \quad \sigma_{12}^k = \sigma_{12}^m + (-1)^k \sigma_{12}^u, \quad (k = 1, 2).$$

3. Динамический расчёт гибких прямоугольных пластин

Исследуется напряженно-деформированное состояние защемленных и шарнирно-опертых по контуру гибких прямоугольных пластин, подвергаемых действию мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки с постоянной интенсивностью. Обе задачи решаются при нулевых начальных условиях и следующих значениях параметров счета; шаг сетки по пространственным координатам $N_1 = N_2 = 10$; отношение ширины пластин к длине $\gamma = b/a = 1$; отношение ширины пластин к толщине $\delta = b/h = 50$; шаг по времени τ и интенсивности нагрузки β будут указаны в каждой задаче.

Задача 1. Прямоугольная пластина, защемленная по контуру. Шаг по времени $\tau_x = 0.00125$ при решении задач в линейной постановке; $\tau_{H\lambda} = 0.00025$ при нелинейной, интенсивность нагрузки $\beta = 400$.

Для реализации линейных и нелинейных задач потребовалось соответственно 1 ч 10 мин и 2 ч 17 мин машинного времени. Результаты расчета оформлены в виде графиков (рис. 1).

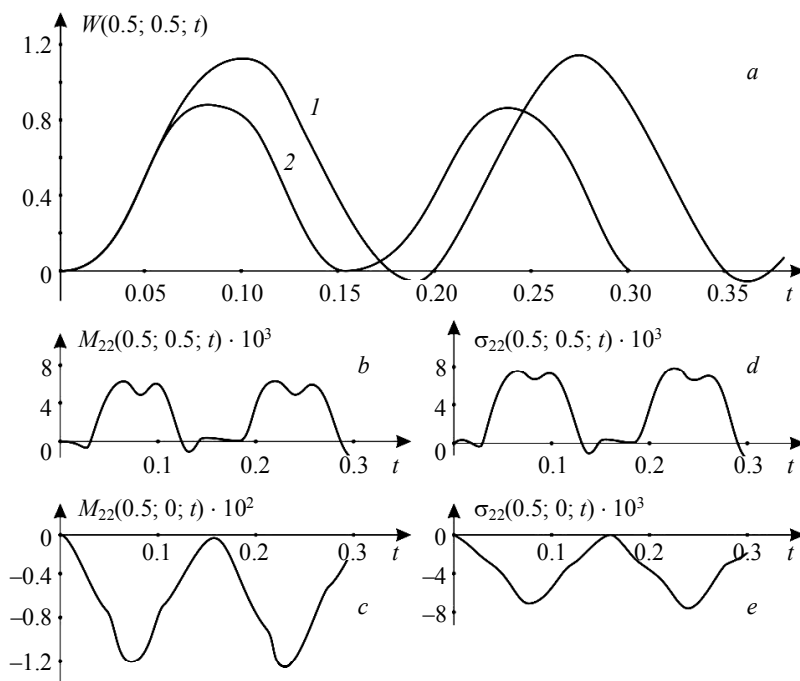


Рис. 1. График прогиба в центре пластин с истечением времени в линейной (1) и нелинейной (2) постановке задачи (a); график момента в центре $(0.5, 0.5, t)$ и на краю $(0.5, 0, t)$ пластин с истечением времени (b, c); график изменения напряжения в центре $(0.5, 0.5, t)$ и на краю $(0.5, 0, t)$ пластин с истечением времени (d, e)

Fig. 1. A chart of a deflection at the center of plates in the course of time for 1, linear and 2, nonlinear problem formulations (a); a chart of a momentum at the center $(0.5, 0.5, t)$ and on the edge $(0.5, 0, t)$ of plates in the course of time (b, c); a chart of tension variation at the center $(0.5, 0.5, t)$ and on the edge $(0.5, 0, t)$ of plates in the course of time (d, e)

Из рис. 1 видно, что прогиб в центре пластин по линейной теории достигает максимума соответственно при $t = 0.100$ и 0.275 ($w_\lambda = 1.123; 1.153$), минимума при $t = 0.19$ и 0.36 ($w_\lambda = -0.055; -0.0576$) а по линейной – максимума соответственно при $t = 0.0725$ и 0.2275 ($w_{H\lambda} = 0.87209; 0.88245$); минимума при $t = 0.155$ и 0.3075 ($w_{H\lambda} = 0; -0.032$).

Разница между результатами, линейной и нелинейной теориями, при $t = 0.100$; $t_{H\lambda} = 0.0725$ и $t_\lambda = 0.275$; $t_{H\lambda} = 0.2275$ составляет соответственно $k = 28.8$ и 30.6% а при $t = 0.0725$ $k = 15$.

Рис. 1, a показывает, что при решении задач в нелинейной постановке увеличивается частота колебаний и уменьшается период колебаний на $14.2, 33.3\%$.

Изменения прогиба пластин по линейной и нелинейной теории совпадают до момента времени $t = 0.05$. Следовательно, при данной нагрузке до этого момента времени можно решать задачу в линейной постановке, при $t > 0.05$ увеличивается отклонения между величиной прогиба, полученной по линейной и нелинейной теории.

Задача 2. Прямоугольная пластина, шарнирно-опертая по контуру. Для реализации линейных и нелинейных задач шарнирно-опертых по контуру гибких пластин при $\beta = 125$, $t_\lambda = 0.005$, $t_{H\lambda} = 0.000225$ потребовалось соответственно 1 ч 40 мин и 3 ч 0.5 мин машинного времени. Основные результаты оформлены в виде графиков рис. 2.

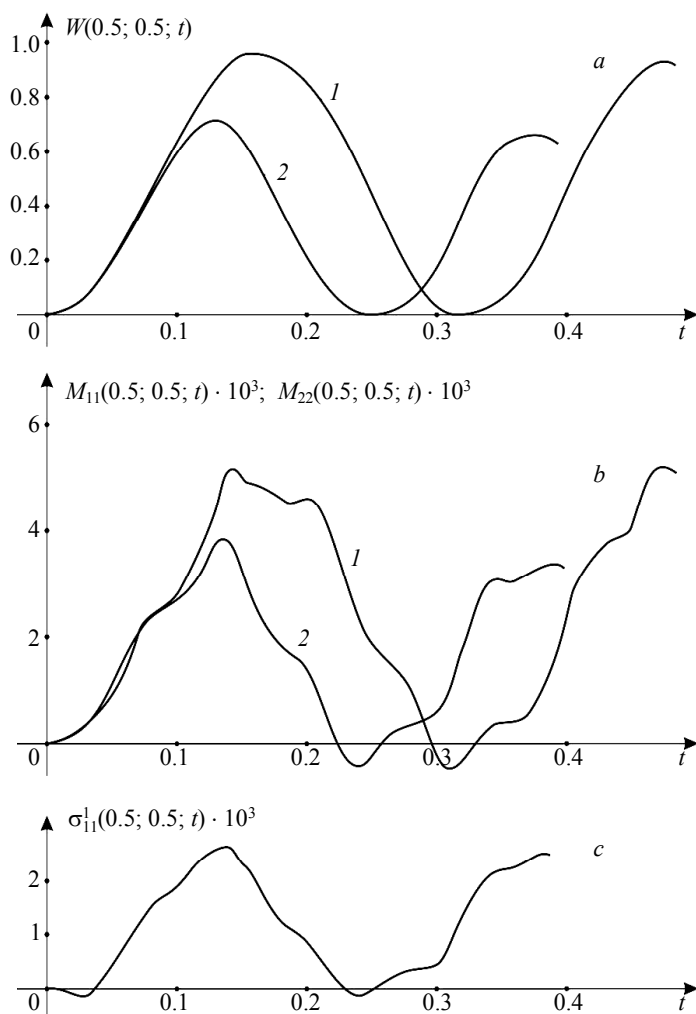


Рис. 2. График прогиба в центре $(0.5, 0.5, t)$ пластин с истечением времени в линейной (1) и нелинейной (2) постановке задачи (a), график момента в точке $(0.5, 0.5, t)$ в линейной (1) и нелинейной (2) постановке задачи (b), график напряжения в точке $(0.5, 0.5, t)$ с истечением времени (c)

Fig. 2. A chart of a deflection at the center $(0.5, 0.5, t)$ of plates in the course of time for 1, linear and 2, nonlinear problem formulations (a); a chart of a momentum at the point $(0.5, 0.5, t)$ for 1, linear and 2, nonlinear problem formulations (b); a chart of tension at the point $(0.5, 0.5, t)$ in the course of time (c)

Изменения прогибов и моментов в сечении $x = 1/2$, $y = 1/2$ с течением времени по линейной и нелинейной теориям, приведены на рис.2. Видно, что до момента времени $t = 0.086$ изменение прогиба в центре пластин по линейной и нелинейной теории совпадает, а при $t > 0.086$ увеличивается отклонение между ними.

Из рис. 2 видно, что в нелинейных постановках задачи частота колебаний увеличивается, а период уменьшается. Линейные прогибы в центре пластин достигает максимума при $t = 0.157$; 0.470 ($w_\lambda = 1.003$; 1.015) и минимума – при $t = 0.315$; ($w_\lambda = -0.0175$), а по нелинейной – максимума при $t = 0.1275$; 0.3725 ($w_{H\lambda} = 0.7470$; 0.7488) и минимума при $t = 0.2445$ ($w_{H\lambda} = 0,0021$). Разница между величинами прогибов по линейной и нелинейной теории при $t = 0.157$ и 1.1275 составляет $k = 33\%$, а при $t = 0.1275 - 22,6\%$.

Заключение

Таким образом, основные результаты работы следующие:

1. Построена единая вычислительная схема решения краевых задач динамического расчета гибких пластин методом конечных разностей. При постановке краевых задач в перемещениях использована нелинейная теория Вольмира, причем в динамических задачах учтено как нормальные, так и потенциальные инерционные слагаемые уравнений движения.

2. Разработана автоматизированная система полного динамического расчета гибких прямоугольных пластин с произвольными начальными и граничными условиями. В основу системы положены стандартные программы образования и решения больших систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих динамическое состояние распределения операционной и внешней памяти ЭВМ, вычисления расчетных величин и выдачи результатов на печать.

3. Исследован характер сходимости метода конечных разностей и неявных итерационных процессов решения систем нелинейных алгебраических уравнений в зависимости от интенсивности внешней нагрузки, отношения ширины к толщине пластины и граничных условий. Установлено, что значения прогибов, полученные М.С. Карнишиным [8], оказались завышенными. Скорость сходимости итерационного процесса не зависит от количества узлов сетки. Применяемый итерационный процесс позволяет получить результаты для широкого диапазона больших прогибов.

4. Учет силы инерции сдвига, введенный А.С. Вольмиром, приводит к уменьшению изгибных и увеличению мембранных расчетных величин.

5. Установлено, что с увеличением степени нелинейности задачи уменьшается амплитуда изгибных расчетных величин и периода колебаний пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент: Фан, 1966. 394 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ-НКГЛ ССР, 1935. 674 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т. I-II, Физматгиз, 1959.

5. Буриев Г., Юлдашев А. Динамический расчет гибких пластин методом прямых на ЭВМ. Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн. Кишинев, 1968.
6. Демидович Б.П., Марон И.А. Численные методы анализа / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Физматгиз. 1962.
7. Бате К.Ю. Методы конечных элементов. М: Физматлит, 2010. 1024 с.
8. Корнишин М.С. Некоторые вопросы применения метода конечных разностей для решения краевых задач теории пластин // Прикладная механика. 1963. Т. 9. № 3.
9. Юлдашев А., Пирматов Ш.Т., Минарова Н. Уравнение равновесия гибких круглых пластин // Austrian J. Technical and Natural Sciences. 2015. No. 3–4. P. 32–35.
10. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
11. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
12. Берикханова Г.Е., Жумагулов Б.Т., Кангужин Б.Е. Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 72–86.
13. Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. 189 с.
14. Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е. Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Статья поступила 20.03.2019 г.

Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. (2020) ALGORITHMIZATION OF SOLVING DYNAMIC EDGE PROBLEMS OF THE THEORY OF FLEXIBLE RECTANGULAR PLATES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 143–157

DOI 10.17223/19988621/66/12

Keywords: algorithm, plate, theory of elasticity, spherical plate.

In this paper, a computational algorithm is developed on the basis of the finite difference method for solving dynamic edge problems of the theory of flexible shells with account for shears and rotary inertia.

Dynamic calculations of flexible plates is used in designing hulls of ships, aircraft, missiles, and other technical objects, which, along with sufficient strength, should have the least weight ensured by the use of lightweight plates and by reducing the margin of safety. The problem of developing an automated system for solving problems of the theory of elasticity and plasticity was first raised in the monograph by V.K. Kabulov. This work reveals the main problems of algorithmization and indicates approaches for their machine solution.

In accordance with the analyzed problems, which arise during automated calculations of thin-walled elements of mechanical engineering structures, it is reasonable to use a nonlinear dynamic computational scheme for a flexible homogeneous isotropic linear elastic shell of arbitrary shape and to take into account the effect of both shears and rotary inertia when describing the motion of the shell. Such a model allows one to apply a sufficiently flexible and fast-acting scheme to calculate a wide class of dynamic processes taking place within the plates and shells of different shapes which are not over-limited in thickness and serve as significant parts of mechanical engineering elements.

A number of dynamic differential equations of plate motion have been developed and tested. Obviously, there is no need to build other algorithms to calculate flat plates when developing an automated computational system.

Adash YULDASHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: Yuldashev687@scientifictext.ru

Shamshod T. PIRMATOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: shamshod@rambler.ru

REFERENCES

1. Kabulov V.K. (1966) *Algoritmizatsiya v teorii uprugosti i deformatsionnoy teorii plastichnosti* [Algorithmization in the theory of elasticity and deformation theory of plasticity]. Tashkent: Fan.
2. Vol'mir A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
3. Lyav A. (1935) *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: ONTI-NKTL SSR.
4. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1959) *Metody vychisleniy* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz.
5. Buriev G., Yuldashev A. (1968) Dinamicheskiy raschet gibkikh plastin metodom pryamykh na EVM [Dynamic calculation of flexible plates by the method of lines on computers]. *Proceedings of the All-Union Symposium on the Propagation of Elastic and Elastoplastic Waves, Kishinev*.
6. Demidovich B.P., Maron I.A. (1962) *Chislennye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moscow: Fizmatgiz.
7. Bate K.Yu. (2010) *Metody konechnykh elementov* [Finite element methods]. Moscow: Fizmatlit.
8. Kornishin M.S. (1963) Nekotorye voprosy primeneniya metoda konechnykh raznostey dlya resheniya kraevykh zadach teorii plastin [Some issues of the application of finite difference method to solve edge problems of the plate theory]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*. 9(3).
9. Yuldashev A., Pyrmatov S.T., Minarova N. (2015) Uravnenie ravnovesiya gibkikh kruglykh plastin [An equilibrium equation for flexible round plates]. *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*. 3–4. pp. 32–35.
10. Korobeynikov S.N. (2000) *Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solid bodies]. Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN.
11. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid bodies]. Moscow: Nauka.
12. Berikhanova G.E., Zhumagulov B.T., Kanguzhin B.E. (2010) Matematicheskaya model' kolebaniy paketa pryamougol'nykh plastin s uchedom tochechnykh svyazey [Mathematical model of rectangular plate stack oscillations with account for point-like coupling]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1 (9). pp. 72–86.
13. Bazarov M.B., Safarov I.I., Shokin Yu.I. (1996) *Chislennoe modelirovanie kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem* [Numerical simulation of the oscillations of dissipative homogeneous and heterogeneous mechanical systems]. Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN.
14. Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikov E.V., Vyachkin E.A., Gileva A.E. (2018) Razrabotka matematicheskoy modeli staticheskogo deformirovaniya sloistykh konstruktsey s neszhimaemymi sloyami [Mathematical modeling of static deformation of a layered construction with incompressible layers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Received: March 20, 2019