

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная
научная конференция
«Все грани математики и
механики»**

(25–28 апреля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Исследование математической модели «хищник-жертва» с учётом внутривидовой конкуренции и ареала обитания

Чу А. Р., Михайлов М. Д.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: chu.antoniy@gmail.com

Аннотация

Существует много различных математических моделей, описывающих динамику численности популяций, взаимодействующих по принципу «хищник-жертва», в основе которых лежит классическая модель Лотки-Вольтерра. В [1] модель приводится к более простому виду, с меньшим количеством коэффициентов. В данной работе в изменённой модели учитываются условия внутривидовой конкуренции среди хищников и жертв и ареал обитания в одномерном приближении. Построенная пространственная модель реализуется с помощью неявного метода и сравнение результатов численного счёта с результатами из [2] показывает, что процессы, описываемые модифицированной моделью также являются устойчивыми.

Ключевые слова: математическая модель, аппроксимация, устойчивость, узел, фокус, хищник-жертва, ареал обитания, внутривидовая конкуренция.

Модель Базыкина [1], представляющая модификацию классической модели Лотки-Вольтерра, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - uv, \\ \frac{dv}{dt} = -\gamma u + uv, \end{cases} \quad (1)$$

с соответствующими начальными условиями

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

С учётом внутривидовой конкуренции среди хищников и жертв система (1) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - uv - c_1 u^2, \\ \frac{dv}{dt} = -\gamma v + uv - c_2 v^2, \\ u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (2)$$

где c_1, c_2 -удельная скорость смертности жертв и хищников соответственно за счёт внутривидовой конкуренции, а γ - некоторый коэффициент, полученный в [1].

Исследование устойчивости системы (2), а также условия, обеспечивающие устойчивость процессов, описываемых системой (2), приведены в [2] (системы неравенств (10) и (11)) . Для определения параметров c_1, c_2, γ фиксируется два параметра c_1, γ и находится промежуток изменений для c_2 . Часть полученных результатов приведена в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 — Случай устойчивого фокуса

$\gamma \setminus c_1$	0,01	0,31	0,61	0,91
0,01	$0 < c_2 < 1.58$	$0 < c_2 < 1.49$	$0 < c_2 < 1.40$	$0 < c_2 < 1.33$
0,91	$0.18 < c_2 < 1.91$	$0 < c_2 < 1.57$	$0 < c_2 < 1.21$	$0 < c_2 < 0.74$
1,81	$0.54 < c_2 < 2.16$	$0.038 < c_2 < 1.45$	False	False
2,71	$0.88 < c_2 < 2.38$	$0 < c_2 < 1.02$	False	False

Таблица 2 — Случай устойчивого узла

$\gamma \setminus c_1$	0,01	0,31	0,61	0,91
0,01	$c_2 > 1.58$	$c_2 > 1.49$	$c_2 > 1.40$	$c_2 > 1.33$
0,91	$0 < c_2 < 0.18 \parallel c_2 > 1.91,$	$c_2 > 1.57$	$c_2 > 1.21$	$c_2 > 0.74$
1,81	$0 < c_2 < 0.54 \parallel c_2 > 2.16,$	$0 < c_2 < 0.038 \parallel \parallel c_2 > 1.45,$	False	False
2,71	$0 < c_2 < 0.88 \parallel c_2 > 2.38$	$0 < c_2 < 1.02$	False	False

Рассматривается модификация модели Базыкина-Свирижева с учётом внутривидовой конкуренции и ареала обитания. Ищутся функции $u(x, t), v(x, t) \in C_1^2(G) \cap C(\tilde{G}), \tilde{G} = \{(x, t) | 0 \leq x \leq L; 0 \leq$

$t \leq T\}$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - uv - c_1 u^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma v + uv - c_2 v^2, \end{cases} \quad (3)$$

с соответствующими начальными:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_1(x), \\ v(x, 0) = \varphi_2(x), \end{cases} \quad (4)$$

и граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=L} = 0. \quad (5)$$

Начальные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ задаются аналогично [3] (см. рисунки 1 и 2).

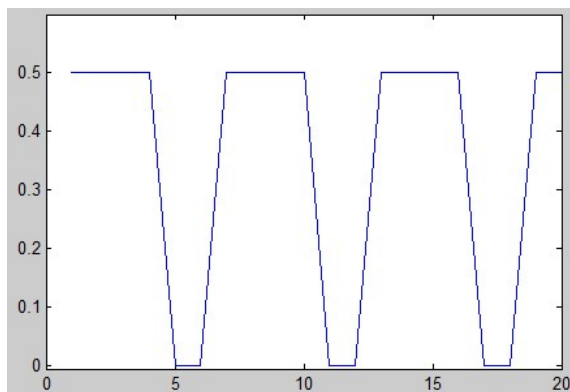


Рис. 1. Плотность популяции жертв в начальный момент времени

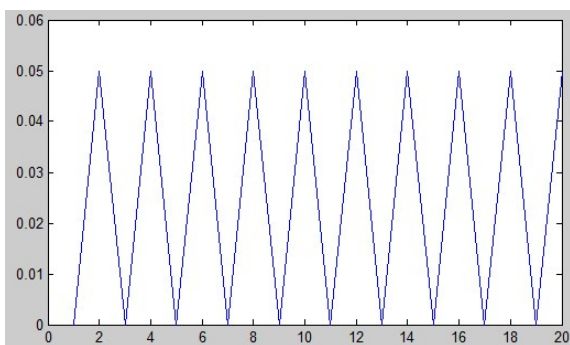


Рис. 2. Плотность популяции хищников в начальный момент времени

Чтобы решить поставленную задачу (3)-(5), будем использовать соответствующий разностный метод. Для этого покроем область $\tilde{G}$ некоторой равномерной сеткой $\tilde{\omega}_{h\tau} = \tilde{\omega}_h \times \omega_\tau$; $\tilde{\omega}_h = \{x_j | x_j = jh, j = 0, \dots, N\}$; $\omega_\tau = \{t_k | t_k = k\tau, k = 0, \dots, M\}$, и аппроксимируем дифференциальную задачу (3)-(5) соответствующей разностной. В результате получим:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = D_u \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + u_j^{n+1}(1 - v_j^n - c_1 u_j^n), \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = D_v \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{h^2} + v_j^{n+1}(-\gamma + u_j^n - c_2 v_j^n), \end{cases} \quad (6)$$

со следующими начальными:

$$\begin{cases} u_j^0 = \varphi_1(x_j), j = 0, \dots, N, \\ v_j^0 = \varphi_2(x_j), j = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (7)$$

и граничными условиями:

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = u_1^{n+1}, u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1}, n = 0, \dots, M-1, \\ v_0^{n+1} = v_1^{n+1}, v_N^{n+1} = v_{N-1}^{n+1}, n = 0, \dots, M-1. \end{cases} \quad (8)$$

Исследовались вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости соответствующего численного метода (6)-(8). Показано, что разностная задача аппроксимирует дифференциальную (3)-(5) с первым порядком по τ и h и абсолютно устойчива. Следовательно, по теореме Лакса [4] решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

Для реализации численного метода использовались следующие значения параметров переменных, взятые из таблиц 1 и 2:

$$\begin{aligned} &\text{для устойчивого фокуса:} \\ &\gamma = 0.01, c_1 = 0.01, c_2 = 0.3, u(x, 0) = \varphi_1(x), v(x, 0) = \varphi_2(x); \end{aligned} \quad (9)$$

для устойчивого узла:

$$\gamma = 0.21, c_1 = 1.21, c_2 = 0.05, u(x, 0) = \varphi_1(x), v(x, 0) = \varphi_2(x). \quad (10)$$

Результаты численных расчётов представляются в виде графиков (рис. 3 и 4), описывающих динамику изменения плотности популяции жертв (u) и хищников (v) в 8-ом узле пространственной сетки с течением времени.

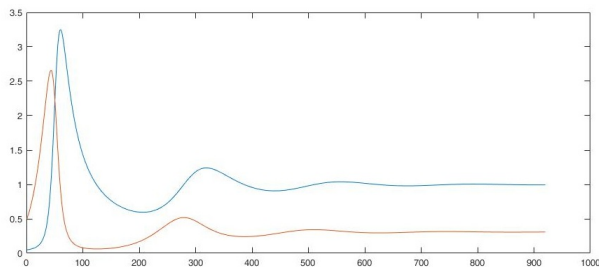


Рис. 3. Изменение плотностей популяции жертв и хищников с течением времени, полученные

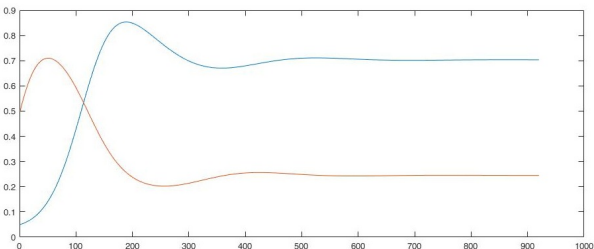


Рис. 4. Изменение плотностей популяции жертв и хищников с течением времени, полученные при значении параметров приведённых в (10)

На рисунках 5 и 6 приведены графики динамики плотности популяции жертв и хищников с течением времени в фазовой плоскости (u, v).

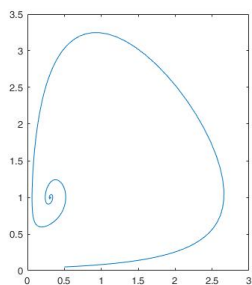


Рис. 5. Изменение плотностей популяции жертв и хищников по времени в фазовой плоскости, полученные при значении параметров приведённых в (9)

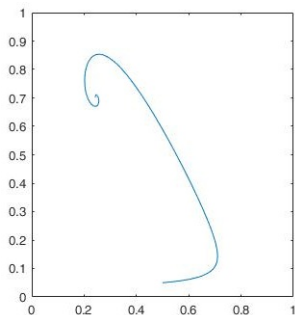


Рис. 6. Изменение плотностей популяции жертв и хищников по времени в фазовой плоскости, полученные при значении параметров приведённых в (10)

Сравнение результатов, представленных на рисунках 3 - 6 с результатами из [2], показывает их совпадение. Это говорит о том, что модификация системы «хищник-жертва» с учётом ареала обитания описывает устойчивые процессы.

В заключении следует отметить, что методика определения оптимальных значений параметров системы «хищник-жертва» может использоваться в задачах такого рода с учётом дополнительных факторов таких, как: изменение формы ареала обитания, учёт половой структуры, учёт возрастных данных и так далее.

Литература

1. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. С. 225-238.

2. Чу А. Р., Михайлов М. Д. Исследование математической модели "хищник-жертва" с учётом внутривидовой конкуренции // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» : сборник статей / под редакцией А.В. Старченко. Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. С. 118-124.

3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры // ФИЗМАТЛИТ, 2-е издание. 2005. С. 73-75.

4. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближённых вычислений / под редакцией А.В. Старченко. Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. 762 с.