Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Радиофизический факультет

8-я Международная научно-практическая конференция

# Актуальные проблемы радиофизики
# АПР 2019

## Сборник трудов конференции

Российский фонд фундаментальных исследований

1-4 октября 2019 года
г. Томск

# Метод итерированных ядер в задаче о распространении волн в неоднородных средах: учет членов высших порядков

*Лосев Дмитрий Витальевич*
***Бардашов Дмитрий Сергеевич***
*Томский государственный университет*
*E-mail: l-kaf@mail2000.ru*

## Введение

Большинство сред, которые представляют интерес для изучения, являются неоднородными. Задача о распространении радиоволн в неоднородной среде с произвольной пространственной зависимостью не имеет точных решений, поэтому приходится использовать приближенные методы. Существующие подходы в описании поля, прошедшего через неоднородную среду, можно разделить на две основные группы [1,2]: методы, учитывающие многолучевое распространение (например метод Борна) и методы с многократным взаимодействием (например методы геометрической оптики, плавных возмущений и др.). Эти подходы имеют разные области применения: первый тип эффективно описывает рассеяние волн сосредоточенными объектами, второй – изменение характеристик излучения при прохождении волны через плавно неоднородную среду. В цикле работ [3-6] была предпринята попытка создания метода, объединяющего достоинства этих подходов. Основная идея метода состоит в применении к интегральному уравнению

$$E(\mathbf{r}_0) = E_0(\mathbf{r}_0) + k^2 \int_V G_0(R_0) E(\mathbf{r}) \delta\varepsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\,, \tag{1}$$

описывающему задачу распространения радиоволн в неоднородной безграничной среде в скалярном приближении, метода итерированных ядер. Здесь поле $E_0(\mathbf{r}_0)$ представляет собой напряженность поля первичной волны, $\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = (\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$ – возмущенное значение диэлектрической проницаемости среды относительно фонового значения $\varepsilon_0$ (иногда его также называют относительным отклонением диэлектрической проницаемости среды от фонового значения), $G_0(R_0) = \dfrac{e^{ikR_0}}{4\pi R_0}$, $R_0 = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|$ – функция Грина безграничной однородной среды с волновым числом $k$, а объемный интеграл по безграничному пространству в правой части описывает рассеянное неоднородностями поле. Привлекая понятие резольвенты [7], решение интегрального уравнения (1) можно представить в виде

$$E(\mathbf{r}_0) = E_0(\mathbf{r}_0) + k^2 \int_V E_0(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}\,,$$

где $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ – резольвента интегрального уравнения (1), которую определяют рядом Неймана

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} W_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\,,$$

а итерированное ядро $W_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ находится по рекуррентному соотношению

$$W_{n+1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int W_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') W(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}'\,,$$

$$W_1(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) = G_0(R_0) \delta\varepsilon(\mathbf{r})\,.$$

Основная трудность такого подхода заключается в громоздкости записи итерированных ядер, представляющих собой многомерные интегралы весьма сложного вида, суммировать которые в полном объеме не представляется возможным. Поэтому приходится либо ограничиваться малым количеством учитываемых ядер (борновское приближение, теория двукратного рассеяния и т.д.), либо использовать упрощающие приближения. Наиболее естественным представляется разложение произвольной зависимости $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ по полной системе базисных функций и последующее точное вычисление возникающих интегралов. В [3] был предложен такой метод вычисления при использовании ряда Тейлора.

В [6] представлено решение в линейном приближении

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}') \approx \delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \varepsilon_x (x' - x) + \varepsilon_y (y' - y) + \varepsilon_z (z' - z) = \delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \nabla\varepsilon(\mathbf{r})(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

(используются обозначения $\varepsilon_x \equiv \left.\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{r}')}{\partial x'}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}$ и т.д.), которое имеет вид

$$E(\mathbf{r}_0) = E_0(\mathbf{r}_0) + k^2 \int_V E_0(\mathbf{r}) \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{e^{ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}}}{4\pi R_0} d\mathbf{r}\,, \tag{2}$$

где

$$A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = 1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\nabla\varepsilon(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}). \tag{3}$$

В данной статье обсуждаются пути уточнения этого решения.

**1. Учет членов высших порядков**

Ввиду сложности задачи ограничимся вычислением второго и третьего итерированных ядер с точностью до членов второго порядка разложения $\delta\varepsilon(\mathbf{r}')$ в ряд Тейлора

$$\begin{gathered} W_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \approx \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \int_V G(R')G(R_0')\big[\delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \nabla\varepsilon(\mathbf{r})(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \\ + \frac{\varepsilon_{xx}}{2}(x'-x)^2 + \frac{\varepsilon_{yy}}{2}(y'-y)^2 + \frac{\varepsilon_{zz}}{2}(z'-z)^2 + \\ + \varepsilon_{xy}(x'-x)(y'-y) + \varepsilon_{xz}(x'-x)(z'-z) + \varepsilon_{yz}(y'-y)(z'-z)\big]d\mathbf{r}', \end{gathered}$$

где

$$\varepsilon_{xx} \equiv \left.\frac{\partial^2\varepsilon(\mathbf{r}')}{\partial x'^2}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}, \quad \varepsilon_{xy} \equiv \left.\frac{\partial^2\varepsilon(\mathbf{r}')}{\partial x'\partial y'}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}, \quad R' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \quad R_0' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|\,.$$

Применяя формулы для вычисления интегралов [3], приходим к следующему виду второго итерированного ядра

$$W_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{G(R_0)R_0\delta\varepsilon(\mathbf{r})}{s}\left[\delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{6} + \frac{1}{3s^2}\left(1 + \frac{sR_0}{2}\right)\beta_0\right],$$

где введено обозначение $s = -2ik$, а функции

$$\alpha_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \varepsilon_x(x_0 - x) + \varepsilon_y(y_0 - y) + \varepsilon_z(z_0 - z) = \nabla\varepsilon(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}),$$

$$\begin{gathered} \alpha_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \varepsilon_{xx}(x_0 - x)^2 + \varepsilon_{yy}(y_0 - y)^2 + \varepsilon_{zz}(z_0 - z)^2 + \\ + 2\varepsilon_{xy}(x_0 - x)(y_0 - y) + 2\varepsilon_{xz}(x_0 - x)(z_0 - z) + 2\varepsilon_{yz}(y_0 - y)(z_0 - z), \end{gathered}$$

$$\beta_0 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \Delta\varepsilon(\mathbf{r})$$

описывают члены разложения в ряд Тейлора первого и второго порядка соответственно.

Аналогично третье ядро представимо как

$$\begin{gathered} W_3(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \approx \frac{G_0(R_0)R_0\,\delta\varepsilon(\mathbf{r})}{s^2}\cdot \\ \cdot\left\{\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{6}\right)^2\left[1 + \frac{\tau}{2}\right] + \frac{2\beta_0}{s^2}\left(\delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \alpha_1 + \frac{3\alpha_2}{10}\right)\left[1 + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{12}\right] + \left(\frac{\nabla\varepsilon(\mathbf{r})}{s}\right)^2\right\}. \end{gathered}$$

Сравнивая эти выражения с вычисленными в [6], можно утверждать, что по крайней мере первые слагаемые вычисленных начальных ядер сохранят свой вид при учете членов высших порядков при следующей модификации функции $A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ из (3):

$$A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = 1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \frac{\alpha_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{2} + \frac{\alpha_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{6} + \frac{\alpha_3(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{24} + \ldots = 1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{(n+1)!},$$

где функции $\alpha_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ представляют собой сумму всех членов разложения Тейлора соответствующего порядка.

## 2. Дальнейшее уточнение решения

До сих пор при построении уточненного решения мы ограничивались первыми слагаемыми вычисленных ядер, отбрасывая члены вида $(\nabla\varepsilon(\mathbf{r}))^2$ и более высокого порядка. Попытаемся теперь учесть все члены до второго порядка включительно. Структура вычисленных итерированных ядер подсказывает нам искать решение в виде

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=G_A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+(\nabla A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0))^2G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\Delta A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0), \qquad (4)$$

где функция $G_A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ задана выражением

$$G_A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{e^{ik\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}R_0}}{4\pi R_0},$$

а функции $G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ и $G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ подлежат определению из условия максимального удовлетворения уравнению Гельмгольца.

Подстановка в уравнение Гельмгольца и перегруппировка членов по порядку малости дает

$$\Delta G+k^2\varepsilon(\mathbf{r})G=-G_Ak^2\{A-\varepsilon+R_0\nabla A\nabla R_0\}+$$
$$+(\nabla A)^2\left\{\Delta G_1+k^2\varepsilon G_1-\left(\frac{ikR_0}{4A^{3/2}}+\frac{(kR_0)^2}{4A}\right)G_A\right\}+2\nabla\left[(\nabla A)^2\right]\nabla G_1+G_1\Delta\left[(\nabla A)^2\right]+$$
$$+\Delta A\left\{\Delta G_2+k^2\varepsilon G_2+\frac{ikR_0}{2\sqrt{A}}G_A\right\}+2\nabla(\Delta A)\nabla G_2+G_2\Delta(\Delta A).$$

Поэтому для удовлетворения уравнению Гельмгольца вплоть до членов второго порядка необходимо обращение в нуль каждой из фигурных скобок:

$$A-\varepsilon+R_0\nabla A\nabla R_0=0,$$
$$\Delta G_1+k^2\varepsilon G_1=\left(\frac{ikR_0}{4A^{3/2}}+\frac{(kR_0)^2}{4A}\right)G_A, \qquad (5)$$
$$\Delta G_2+k^2\varepsilon G_2=-\frac{ikR_0}{2\sqrt{A}}G_A.$$

Выбор функции $A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ обеспечивает удовлетворение первому уравнению вплоть до членов, по крайней мере, четвертого порядка малости включительно. Уравнение для функции $G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ по сути является тем же уравнением Гельмгольца с известной правой частью и допускает приближенное решение в виде

$$G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\int_V\left(\frac{ikR_0'}{4A^{3/2}(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)}+\frac{(kR_0')^2}{4A(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)}\right)\frac{e^{ikR_0'\sqrt{A(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)}}}{4\pi R_0'}\frac{e^{ikR'\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}')}}}{4\pi R'}d\mathbf{r}'.$$

Такое решение является громоздким и неудобным для применения, поэтому упростим его, вычислив интеграл приближенно, предполагая функции $A(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ и $A(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)$ медленно меняющимися,

$$G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\approx\frac{e^{ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}}}{32\pi ikA^{5/2}}\left[1-ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}-\frac{1}{3}(kR_0)^2A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right].$$

За счет приближенности полученной формулы для $G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ возникает погрешность удовлетворения уравнению (5). Подстановка в уравнение дает

$$\Delta G_1+k^2\varepsilon G_1-\left(\frac{ikR_0}{4A^{3/2}}+\frac{(kR_0)^2}{4A}\right)G_A=-\frac{e^{ikR_0\sqrt{A}}}{32\pi ikA^{5/2}}\left\{2k^2R_0\nabla A\nabla R_0\left(1+\frac{1}{2}ikR_0\sqrt{A}\right)+\right.$$
$$\left.+(\nabla A)^2\left[\frac{(ikR_0)^3}{3\sqrt{A}}+\frac{5(kR_0)^2}{4A}+\frac{35ikR_0}{4A^{3/2}}-\frac{35}{4A^2}-\frac{(kR_0)^4}{12}\right]+\Delta A\left[\frac{(kR_0)^2}{6}-\frac{5ikR_0}{2\sqrt{A}}+\frac{5}{2A}\right]\right\}.$$

Аналогично решение уравнения для функции $G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ дает

$$G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\int_V\frac{ikR_0'}{2\sqrt{A(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)}}\frac{e^{ikR_0'\sqrt{A(\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)}}}{4\pi R_0'}\frac{e^{ikR'\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}')}}}{4\pi R'}d\mathbf{r}'\approx$$
$$\approx-\frac{e^{ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}}}{32\pi ikA^{3/2}}\left[1-ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}\right].$$

Погрешность при этом равна

$$\Delta G_2+k^2\varepsilon G_2+\frac{ikR_0}{2\sqrt{A}}G_A=\frac{e^{ikR_0\sqrt{A}}}{32\pi ikA^{3/2}}\left\{k^2R_0\nabla A\nabla R_0+\right.$$
$$\left.+(\nabla A)^2\left[\frac{(ikR_0)^3}{4\sqrt{A}}+\frac{3(kR_0)^2}{2A}+\frac{15ikR_0}{4A^{3/2}}-\frac{15}{4A^2}\right]+\Delta A\left[\frac{3}{2A}-\frac{3ikR_0}{2\sqrt{A}}-\frac{(kR_0)^2}{2}\right]\right\}.$$

Итак, выражение для функции Грина уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее ему с точностью до членов второго порядка малости включительно, имеет вид

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{e^{ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}}}{4\pi R_0}\left\{1-\frac{(\nabla A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0))^2ikR_0}{8k^2A^{5/2}}\left[1-ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}-\frac{1}{3}(kR_0)^2A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)ikR_0}{8k^2A^{3/2}}\left[1-ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}\right]\right\}.$$

Для справки приведем погрешность удовлетворения этой функцией уравнения Гельмгольца

$$\Delta G+k^2\varepsilon G=-\frac{e^{ikR_0\sqrt{A}}}{32\pi ikA^{5/2}}\left[(\nabla A)^2\left\{2k^2R_0\nabla A\nabla R_0\left(1+\frac{1}{2}ikR_0\sqrt{A}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+(\nabla A)^2\left[\frac{(ikR_0)^3}{3\sqrt{A}}+\frac{5(kR_0)^2}{4A}+\frac{35ikR_0}{4A^{3/2}}-\frac{35}{4A^2}-\frac{(kR_0)^4}{12}\right]+\Delta A\left[\frac{(kR_0)^2}{6}-\frac{5ikR_0}{2\sqrt{A}}+\frac{5}{2A}\right]\right\}-$$
$$-2\nabla\left[(\nabla A)^2\right]\left\{\frac{\nabla R_0}{3}k^2R_0A\left(1-ikR_0\sqrt{A}\right)-\nabla A\frac{5}{2A}\left(1-ikR_0\sqrt{A}-\frac{1}{15}\left(ikR_0\sqrt{A}\right)^3\right)\right\}-$$
$$-\Delta\left[(\nabla A)^2\right]\left\{1-ikR_0\sqrt{A}+\frac{1}{3}\left(ikR_0\sqrt{A}\right)^2\right\}-\Delta A\left\{k^2R_0\nabla A\nabla R_0+\right.$$
$$\left.+(\nabla A)^2\left[\frac{(ikR_0)^3\sqrt{A}}{4}+\frac{3(kR_0)^2}{2}+\frac{15ikR_0}{4\sqrt{A}}-\frac{15}{4A}\right]+\Delta A\left[\frac{3}{2}-\frac{3ikR_0\sqrt{A}}{2}-\frac{(kR_0)^2A}{2}\right]\right\}+$$
$$\left.+2\nabla(\Delta A)\left\{k^2A^2R_0\nabla R_0+\nabla A\left[\frac{(kR_0)^2A}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3ikR_0\sqrt{A}}{2}\right]\right\}+\Delta(\Delta A)\left\{A\left(1-ikR_0\sqrt{A}\right)\right\}\right].$$

Процесс уточнения решения можно продолжать аналогичным образом.

Вопрос здесь, собственно, состоит в балансе между точностью формулы и сложностью записи и затратами на ее получение. В частности, добавление к формуле (4) слагаемых

$$\frac{e^{ikR_0\sqrt{A(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}}}{4\pi R_0}\left\{(\nabla A)^3\nabla R_0\frac{R_0^3}{24A^3}\left[1+\frac{1}{2}ikR_0\sqrt{A}\right]-\right.$$

$$\left.-\nabla\left[(\nabla A)^2\right]\nabla R_0\frac{5R_0^3}{144A^2}\left(1-\frac{2}{5}ikR_0\right)+\Delta A\nabla A\nabla R_0\frac{R_0^3}{32A^2}-\nabla(\Delta A)\nabla R_0\frac{R_0^3}{16A}\right\}$$

дает точность вплоть до членов третьего порядка включительно.

Заключение

В статье представлены приближенные решения задачи распространения волн в неоднородной среде различного порядка точности, полученные с помощью применения метода итерированных ядер. Основное сделанное приближение заключалось в неточном учете зависимости величины $\delta\varepsilon$, стоящей под знаком интеграла, от координат в процессе вычисления итерированных ядер. Эта зависимость моделировалась несколькими членами разложения Тейлора. Затем на основе суммирования ряда Неймана, которое удалось провести без дополнительных приближений, был осуществлен переход от описания многократного рассеяния падающего поля неоднородностями среды к описанию изменения амплитудно-фазовых характеристик полного поля, определяемых неоднородной средой в целом. Отметим, что такая трансформация процессов рассеяния в процесс распространения была проведена математически строго, в отличие от большинства существующих асимптотических методов, в которых описание распространения волны определяется эвристическими соображениями, основанными лишь на физических представлениях.

Предложенное решение имеет компактный вид и объединяет в себе достоинства методов борновского рассеяния и геометрической оптики, в которые оно переходит в предельных случаях малого и плавного изменения характеристик неоднородной среды. Преимуществом предложенного решения является также его применимость для любого вида зондирующего излучения и профиля неоднородности.

Показан путь повышения точности функции Грина для неоднородной среды на основе добавления к ее составу дополнительных слагаемых. Их функциональный вид определяется требованием максимального удовлетворения решения уравнению Гельмгольца и представляет собой компромисс между точностью и простотой решения.

Список публикаций:

*[1] Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 464 с.*

*[2] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1981.*

*[3] Бардашов Д.С., Лосев Д.В. Метод резольвенты в теории распространения волн в неоднородных средах. // Известия Вузов. Физика, 2006, № 9. Приложение. – С. 19-22.*

*[4] Бардашов Д.С., Лосев Д.В., Якубов В.П. Метод итерированных ядер в задаче о переходном слое Эпштейна. // Известия Вузов. Физика, 2008, № 9/2. – С. 19-20.*

*[5] Бардашов Д.С., Лосев Д.В. Метод итерированных ядер при распространении волн в плавно-неоднородных средах. // Известия Вузов. Физика, 2013, № 8/2. – С. 32-34.*

*[6] Лосев Д.В., Бардашов Д.С. Метод итерированных ядер в задачах распространения волн в неоднородных средах. // Журнал радиоэлектроники. 2014, №12. URL: http://jre.cplire.ru/jre/dec14/index.html*

*[7] Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 300 с.*