

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VII Международной молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 23–25 мая 2019 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2019

Как видим, аппроксимация, полученная с помощью ОБР, является более точной, чем аппроксимации второго (гауссовская) и третьего порядков. Получается, что ОБР-аппроксимация применима и при малых значениях параметра N , т.е. может быть использована для систем типа $M|G|GI_\infty$ при небольшой интенсивности входящего потока ($N \geq 1$). Анализ применимости ОБР-аппроксимации при меньших значениях интенсивности входящего потока, а также анализ зависимости области применимости данной аппроксимации относительно дисперсий (длин интервалов между заявками входящего потока и длительности обслуживания) представляет собой тему для отдельного исследования.

Заключение

В работе выполнено исследование применимости отрицательного биномиального распределения в качестве аппроксимации для стационарного распределения числа заявок в системе массового обслуживания $M|G|GI_\infty$, которое не представляется возможным получить аналитически без использования асимптотических методов. В работе предлагается метод вычисления параметров указанной ОБР-аппроксимации, основанный на гауссовской аппроксимации, полученной методом асимптотического анализа. Проведён сравнительный анализ областей применимости различных аппроксимаций и установлено, что ОБР является наилучшей среди них. Более того, она оказалась применимой даже при небольших значениях интенсивности входящего потока, что делает её чрезвычайно полезной для практического применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Исследование системы массового обслуживания $M|G|GI_\infty$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013 – № 2 (23). – С. 75–83.
2. *Моисеев А.Н.* Исследование математических моделей систем и сетей массового обслуживания с высокоинтенсивными непуассоновскими входящими потоками: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: Томск: ТГУ, 2016. 333 с.
3. *Fedorova E.* Quasi-geometric and gamma approximation for retrial queueing systems // Communications in Computer and Information Science. – 2014. – Vol. 487. – P. 123–136.
4. *Fedorova E.A., Nazarov A.A., Paul S.V.* Discrete gamma probability distribution approximation in retrial queues // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях (АВМТБ-2017): материалы Междунар. науч. конф. Россия, Москва, 23–27 окт. 2017 г. – М.: Изд-во РУДН, 2017. – С. 560–565.
5. *Fedorova E., Voytkov K.* Retrial Queue $M/G/1$ with Impatient Calls Under Heavy Load Condition // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 800. – P. 347–357.
6. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
7. *Moiseev A., Nazarov A.* Investigation of high intensive general flow // Proc. IV International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics” (PCI’2012), September 12–14, 2012, Baku, Azerbaijan. – Baku: ANAS, 2012. – P. 161–163.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ $M|MP|1$ С N ТИПАМИ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК В УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА*

О.Д. Лизюра, А.А. Назаров, С.В. Пауль

Томский государственный университет

Введение

RQ-системы характеризуются следующей отличительной особенностью: заявка нашедшая прибор занятым при поступлении в систему пробует занять прибор снова после осуществления некоторой случайной задержки. Необслуженные заявки после неудачной попытки занять прибор поступают на орбиту, откуда через некоторое время снова обращаются к прибору. RQ-системы являются адекватными моделями телекоммуникационных систем, компьютерных сетей. В монографиях [1,2] приводятся обширные исследования моделей с данной особенностью.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-01-00277.

В RQ-системах время, в течение которого прибор находится в незанятом состоянии, является временем простоя системы. В целях увеличения эффективности работы системы нелишним будет уменьшить время простоя. Мы рассматриваем системы, где прибор не только принимает заявки на обслуживание, поступающие в систему из входящего потока, но и вызывает заявки извне, когда находится в свободном состоянии. В теории массового обслуживания уже рассматривались модели, где заявки вызывались прибором извне [3], однако в рассмотренных моделях не было учтено повторное обращение заявок с орбиты. Модели с повторным обращением и с вызываемыми заявками имеют приложение в работе таких систем, как call-центры, где оператор в свободное время совершает звонки или занимается альтернативными видами деятельности. О приложениях RQ-систем в моделировании call-центров подробно изложено в работах [4,5]. RQ-системы с данной особенностью поведения прибора будем называть системами с вызываемыми заявками.

RQ-системы с вызываемыми заявками активно изучаются в последнее время [6,7]. В работах упомянутых выше исследуются марковские RQ-системы с вызываемыми заявками. Модель RQ-системы с несколькими типами вызываемых заявок была рассмотрена в статье [8]. Для такой модели был получен численный алгоритм нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите. Также рассматривалась многолинейная RQ-система [9].

В данной работе в качестве метода исследования рассматриваемых моделей предлагается метод асимптотического анализа. В работе [10] метод асимптотического анализа применяется для исследования RQ-системы M|M|1 с вызываемыми заявками в условии большой задержки заявок на орбите.

В данной работе рассматривается RQ-система MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок. Мы предполагаем, что интенсивности вызова и длительности обслуживания разнотипных заявок различны. Цель данного исследования рассмотреть предложенную систему в условии предельно редких изменений состояний входящего потока.

1. Постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему с одним обслуживающим прибором, на вход которой поступает MMPP-поток заявок. Заявки, поступающие в систему из потока, занимают прибор для обслуживания и обслуживаются экспоненциальное случайное время с параметром μ_1 , если прибор свободен. Если поступившая заявка застаёт прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки экспоненциальная с параметром σ .

Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. В системе N типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n . Вызванная заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n . Для удобства исследования пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до $N + 1$. Рис. 1 иллюстрирует структуру описанной модели.

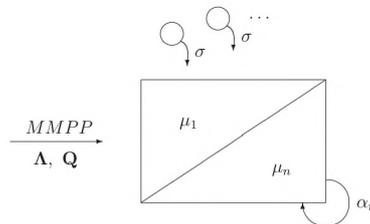


Рис. 1. RQ-система MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок

Пусть $i(t)$ — число поступивших заявок в системе в момент времени t , без учета вызванной заявки, если она обслуживается на приборе. Ставится задача нахождения стационарного распределения вероятностей данного процесса методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока.

2. Система уравнений Колмогорова

Случайный процесс $i(t)$ не является марковским, поэтому введем дополнительный процесс $k(t)$, характеризующий состояние прибора в момент времени t следующим образом: 0, если прибор свободен, 1, если прибор занят обслуживанием поступившей заявки, n , если прибор занят обслуживанием вызванной заявки типа n , где $n = \overline{2, N+1}$. Также введем процесс $m(t)$ — цепь Маркова, управляющую ММРР-поток. Процесс $m(t)$ задается матрицей инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} . Когда $m(t) = m$, интенсивность входящего потока равна λ_m , $m = \overline{1, M}$.

Трехмерный процесс $\{i(t), k(t), m(t)\}$ образует цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим $P\{i(t) = i, k(t) = k, m(t) = m\} = P_k(i, m, t)$ — вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k , в системе находится i поступивших заявок и управляющая ММРР-поток цепь Маркова $m(t)$ принимает значение m .

Запишем систему уравнений Колмогорова в стационарном режиме:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_m + i\sigma + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n\right)P_0(i, m) + \mu_1 P_1(i+1, m) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n P_n(i, m) + \sum_{v=1}^M P_0(i, v)q_{vm} &= 0, \\ -(\lambda_m + \mu_1)P_1(i, m) + \lambda_m P_1(i-1, m) + \lambda_m P_0(i-1, m) + i\sigma P_0(i, m) + \sum_{v=1}^M P_1(i, v)q_{vm} &= 0, \\ -(\lambda_m + \mu_n)P_n(i, m) + \lambda_m P_n(i-1, m) + \alpha_n P_0(i, m) + \sum_{v=1}^M P_n(i, v)q_{vm} &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \end{aligned}$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u, m) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} P_k(i, m), \quad k = \overline{0, N+1},$$

где $j = \sqrt{-1}$. Домножим уравнения системы на e^{ju_i} и просуммируем по i , чтобы получить систему уравнений для частичных характеристических функций

$$\begin{aligned} -\left(\lambda_m + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n\right)H_0(u, m) + j\sigma \frac{\partial H_0(u, m)}{\partial u} + \mu_1 e^{-ju} H_1(u, m) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n H_n(u, m) + \\ + \sum_{v=1}^M H_0(u, v)q_{vm} &= 0, \\ -(\lambda_m + \mu_1)H_1(u, m) + \lambda_m e^{ju} H_1(u, m) + \lambda_m e^{ju} H_0(u, m) - j\sigma \frac{\partial H_0(u, m)}{\partial u} + \\ + \sum_{v=1}^M H_1(u, v)q_{vm} &= 0, \\ -(\lambda_m + \mu_n)H_n(u, m) + \lambda_m e^{ju} H_n(u, m) + \alpha_n H_0(u, m) + \\ + \sum_{v=1}^M H_n(u, v)q_{vm} &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Метод асимптотического анализа

В системе уравнений (1) введем следующие замены:

$$q_{vm} = \varepsilon s_{vm}, \quad H_k(u, m) = F_k(u, m, \varepsilon), \quad k = \overline{0, N+1},$$

и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & - \left(\lambda_m + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n \right) F_0(u, m, \varepsilon) + \mu_1 e^{-ju} F_1(u, m, \varepsilon) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n F_n(u, m, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon \sum_{v=1}^M F_0(u, v, \varepsilon) s_{vm} + j\sigma \frac{\partial F_0(u, m, \varepsilon)}{\partial u} = 0, \\ & - (\lambda_m + \mu_1) F_1(u, m, \varepsilon) + \lambda_m e^{ju} F_1(u, m, \varepsilon) + \lambda_m e^{ju} F_0(u, m, \varepsilon) - \\ & - j\sigma \frac{\partial F_0(u, m, \varepsilon)}{\partial u} + \varepsilon \sum_{v=1}^M F_1(u, v, \varepsilon) s_{vm} = 0, \\ & - (\lambda_m + \mu_n) F_n(u, m, \varepsilon) + \lambda_m e^{-ju} F_n(u, m, \varepsilon) + \alpha_n F_0(u, m, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon \sum_{v=1}^M F_n(u, v, \varepsilon) s_{vm} = 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 1. Если существуют пределы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(u, m, \varepsilon) = F_k(u, m)$, то

$$\begin{aligned} F(u) = \sum_{k=0}^{N+1} \sum_{m=1}^M F_k(u, m) &= \sum_{m=1}^M C_m \frac{\mu_1}{\mu_1 - \lambda_m} \left(1 + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1 - p_{1m}}{1 - p_{1m} e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_m}{\sigma} (1+v_m) + 1} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1 - p_{nm}}{1 - p_{nm} e^{ju}} \right)^{\frac{\alpha_n (\theta_{nm} - \lambda_m)}{\sigma \theta_{nm}}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } p_{1m} = \frac{\lambda_m}{\mu_1}, \quad \theta_{nm} = \mu_n + \lambda_m - \mu_1, \quad v_m = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\theta_{nm}}, \quad p_{nm} = \frac{\lambda_m}{\mu_n + \lambda_m}, \quad n = \overline{2, N+1}.$$

Доказательство. В системе уравнений (2) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} & - \left(\lambda_m + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n \right) F_0(u, m) + \mu_1 e^{-ju} F_1(u, m) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n F_n(u, m) + j\sigma \frac{\partial F_0(u, m)}{\partial u} = 0, \\ & - (\lambda_m + \mu_1) F_1(u, m) + \lambda_m e^{ju} F_1(u, m) + \lambda_m e^{ju} F_0(u, m) - j\sigma \frac{\partial F_0(u, m)}{\partial u} = 0, \\ & - (\lambda_m + \mu_n) F_n(u, m) + \lambda_m e^{ju} F_n(u, m) + \alpha_n F_0(u, m) = 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \end{aligned}$$

Данная система уравнений сводится к системе из одного дифференциального и $N+1$ алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F_1(u, m) &= \frac{\lambda_m}{\mu_1 + \lambda_m (1 - e^{ju})} F_0(u, m) - \frac{j\sigma}{\mu_1 + \lambda_m (1 - e^{ju})} \frac{\partial F_0(u, m)}{\partial u}, \\ F_n(u, m) &= \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} F_0(u, m), \quad n = \overline{2, N+1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_0(u, m)}{\partial u} = j \frac{\lambda_m}{\sigma} \left[\frac{\lambda_m e^{ju}}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} + \frac{\mu_1 + \lambda_m (1 - e^{ju})}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right] F_0(u, m).$$

Проинтегрируем обе части третьего уравнения системы (3) по u :

$$\ln F_0(u, m) - \ln C_m = \int_0^u j \frac{\lambda_m}{\sigma} \left[\frac{\lambda_m e^{jx}}{\mu_1 - \lambda_m e^{jx}} + \frac{\mu_1 + \lambda_m (1 - e^{jx})}{\mu_1 - \lambda_m e^{jx}} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n e^{jx}}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{jx})} \right] dx,$$

где C_m – константа интегрирования. Решая дифференциальное уравнение, получим функцию $F_0(u, m)$ в явном виде:

$$F_0(u, m) = C_m \left(\frac{\mu_1 - \lambda_m}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_m}{\sigma}(1+v_m)} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\mu_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right)^{\frac{\alpha_n (\theta_{nm} - \lambda_m)}{\sigma \theta_{nm}}},$$

где $\theta_{nm} = \mu_n + \lambda_m - \mu_1$, $v_m = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\theta_{nm}}$. С помощью соотношений (3) получим функции

$F_k(u, m)$:

$$F_1(u, m) = C_m \frac{\lambda_m}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} \left(\frac{\mu_1 - \lambda_m}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_m}{\sigma}(1+v_m)} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\mu_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right)^{\frac{\alpha_n (\theta_{nm} - \lambda_m)}{\sigma \theta_{nm}}} \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right),$$

$$F_n(u, m) = C_m \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \left(\frac{\mu_1 - \lambda_m}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_m}{\sigma}(1+v_m)} \times$$

$$\times \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\mu_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right)^{\frac{\alpha_n (\theta_{nm} - \lambda_m)}{\sigma \theta_{nm}}}, \quad n = \overline{2, N+1}.$$

Просуммируем полученные функции по k :

$$\sum_{k=0}^{N+1} F_k(u, m) = F(u, m) = C_m \frac{\mu_1}{\mu_1 - \lambda_m} \left(1 + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right) \left(\frac{\mu_1 - \lambda_m}{\mu_1 - \lambda_m e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_m}{\sigma}(1+v_m)+1} \times$$

$$\times \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{\mu_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right)^{\frac{\alpha_n (\theta_{nm} - \lambda_m)}{\sigma \theta_{nm}}}.$$

Просуммируем полученные выражения для частных характеристических функций по m :

$$F(u) = \sum_{m=1}^M C_m \frac{\mu_1}{\mu_1 - \lambda_m} \left(1 + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\mu_n + \lambda_m (1 - e^{ju})} \right) \left(\frac{1 - p_{1m}}{1 - p_{1m} e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda_m}{\sigma}(1+v_m)+1} \prod_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1 - p_{nm}}{1 - p_{nm} e^{ju}} \right)^{\frac{\alpha_n (\theta_{nm} - \lambda_m)}{\sigma \theta_{nm}}},$$

где $p_{1m} = \frac{\lambda_m}{\mu_1}$, $p_{nm} = \frac{\lambda_m}{\mu_n + \lambda_m}$, $n = \overline{2, N+1}$. Теорема доказана.

В ходе доказательства теоремы 1 найдена характеристическая функция числа поступивших заявок в системе с помощью метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель системы ММРР|М|1 с N типами вызываемых заявок. С помощью метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений входящего потока получена характеристическая функция числа поступивших заявок в системе.

Для дальнейшего исследования данной системы планируется построить имитационную модель, с помощью которой можно определить границы применимости асимптотического результата. Также планируется изучение RQ-систем $M|GI|1$ и $GI|M|1$ с N типами вызываемых заявок с помощью методов асимптотического анализа в различных предельных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial queueing systems: a computational approach. – Springer, Berlin, 2008. – 320 p.
2. Falin G., Templeton J. Retrial queues. – CRC Press, 1997.
3. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е. Об однофазной системе массового обслуживания с двумя типами заявок и относительным приоритетом // Техническая кибернетика. – 1983. – Т. 3. – С. 48–56.
4. Bhulai S., Koole G. A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48. – № 8. – P. 1434–1438.
5. Deslauriers A., L'Ecuyer P., Pichitlamken J., Ingolfsson A., Avramidis A.N. Markov chain models of a telephone call center with call blending // Computers & operations research. – 2007. – Vol. 34. – № 6. P. 1616–1645.
6. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Markovian retrial queues with two-way communication // Journal of industrial and management optimization. – 2012. – Vol. 12. – № 4. – P. 781–806.
7. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two-way communication // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37. – № 4. – P. 1811–1822.
8. Sakurai H., Phung-Duc T. Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // Top. – 2015. – Vol. 23. – № 2. – P. 466–492.
9. Phung-Duc T., Kawanishi K. An efficient method for performance analysis of blended call centers with radial // Asia-Pacific Journal of Operational Research. – 2014. – Vol. 31. – № 02. – P. 144–148.
10. Nazarov A.A. Asymptotic analysis of markovial retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // In Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. – 2017. – P. 678–693.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СУММАРНОГО ОБЪЕМА ЗАНЯТОГО РЕСУРСА НА БЛОКАХ СИСТЕМЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И ВХОДЯЩИМ ММРР-ПОТОКОМ

Е.Н. Чернышова, Е.Ю. Лисовская

Томский государственный университет

Введение

В настоящее время наблюдается увеличение объема трафика беспроводных сетей, что обусловлено развитием технологий мобильного широкополосного доступа четвертого поколения (4G), а также постоянно растущим запросом на трафик в системах пятого поколения (5G) [2,3]. Анализ источников, рекомендаций и стандартов международных организаций установил, что необходимы комплексные модели, которые адекватно описывали бы особенности методов управления доступом и механизмами резервирования ресурсов сетей [1,4].

Для увеличения эффективности механизма управления ресурсами беспроводной сети, необходимо разрабатывать новые модели и методы анализа эффективности широкополосных беспроводных сетей. Решение данной проблемы сдерживается недостатками в теоретических основах, в том числе, в теории массового обслуживания из-за отсутствия адекватных моделей обслуживания и методов их анализа.

В данной работе предлагается построение и исследование математической модели системы массового обслуживания со случайными требованиями к объему занимаемого ресурса беспроводной сети с расщеплением (копированием) заявок [5]. Рассматриваемая модель позволит сделать оценку необходимых объемов резервируемых ресурсов для трафика и выработать стратегию их распределения.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания, состоящую из двух блоков, каждый из которых имеет неограниченное число приборов; на вход поступает ММРР поток