МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

О.Н. Галажинская, Д.Д. Даммер

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть II. Случайные величины

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2020

УДК 519.22
ББК 22.172
Г15

Галажинская О.Н., Даммер Д.Д.
Г15 Практикум по теории вероятностей. Ч. II: Случайные величины : учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2020. – 200 с.

ISBN 978-5-94621-883-2

Пособие является продолжением «Практикума по теории вероятностей. Часть I. Случайные события» и предназначено для оказания помощи студентам при выполнении практических заданий в курсе «Теория вероятностей». Предложены в большом количестве разнообразные задачи с подробно разобранными решениями, а также задачи для самостоятельной работы студентов по каждой из тем. Приводятся все необходимые теоретические сведения из курса, для того, чтобы студент мог выполнить задания без обращения к дополнительной литературе.

Для студентов ИПМКН, ФТФ и других факультетов, изучающих курс «Теория вероятностей». Может быть полезным широкому кругу читателей, интересующихся решением вероятностных задач.

УДК 519.22
ББК 22.172

Рецензенты:
А.А. Назаров, доктор технических наук, профессор
А.В. Галажинский, доктор физико-математических наук, профессор РАН

ISBN 978-5-94621-883-2

© Галажинская О.Н., Даммер Д.Д., 2020
© Томский государственный университет, 2020

Введение

Во многих примерах, с которыми мы встречались в предыдущей части 1, в результате опыта появлялось некоторое число.

Например, при бросании игральной кости выпадало то или иное число очков, при обследовании партии готовых изделий обнаруживалось какое то число единиц брака, во время сессии из общего количества экзаменационных билетов, выученных оказывается то или иное число.

Среди решаемых задач в теории вероятностей исключительно много таких, в которых исход опыта выражается некоторым числом $\boldsymbol{X}$. При этом случайный характер исхода, влечет за собой случайность числа $\boldsymbol{X}$, это означает, что при повторении опыта оно меняется непредвиденным образом. Рассмотрим примеры:

1) Бросается кубик, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – выпавшее число очков;

2) Проводятся соревнования по стрельбе, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число попаданий при трех выстрелах;

3) Бросается монета, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число бросаний монеты до первого выпадения двух гербов подряд;

4) Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – время безотказной работы холодильника или любого другого бытового прибора;

5) Из данной аудитории наугад выбирается студент, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – рост студента;

6) Проводится наблюдение за температурой воздуха в данной местности за месяц, случайная величина $\boldsymbol{X}$ – средняя температура воздуха.

7) При 10 бросаниях баскетболиста в корзину, $\boldsymbol{X}$ - число попаданий – случайное число.

Чтобы все примеры подобного рода уложить в единую схему, введем понятие случайной величины.

Основные понятия и определения

Неформально случайной называют величину, которая в результате опыта принимает одно и только одно значение, заранее неизвестно какое и зависящее от случайных причин.

Введем строгое математическое определение случайной величины.

Пусть (Ω, F, P) – произвольное вероятностное пространство, (R, B) – борелевская прямая.

Случайной величиной называется ***<u>измеримая функция</u>*** $\xi = \xi(\omega)$, отображающая пространство элементарных событий Ω во множество действительных чисел R, т.е. функция, для которой прообраз $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ любого борелевского множества $B \in B$ принадлежит σ-алгебре *F*.

<u>Теорема</u> (***критерий измеримости***):

Для того чтобы функция $\xi(\omega)$ была случайной величиной (***<u>измеримой функцией</u>***), необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырех условий для произвольного действительного $x \in R$:

1. $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$;

2. $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in F$;

3. $\{\omega : \xi(\omega) > x\} \in F$;

4. $\{\omega : \xi(\omega) \ge x\} \in F$;

Докажем основные свойства случайных величин.

<u>Свойства случайных величин</u>

<u>1 свойство:</u> Функция $\xi(\omega) \equiv c$ является случайной величиной.

<u>Доказательство:</u>

Функция $\xi(\omega) \equiv c$ будет являться измеримой функцией или случайной величиной, если (согласно критерию измеримости) для любого $x \in R$, будет например, выполняться такое условие: $\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{\omega : c < x\} \in F$. Рассмотрим разные значения x:

- В случае если $x > c$, то $\{\omega : c < x\} = \Omega$ – т.е. совокупность таких ω, благоприятствует наступлению достоверного события, которое является элементом любой σ-алгебры *F*, т.е. условие $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$ выполняется;
- В случае если $x \le c$, то $\{\omega : c < x\} = \varnothing \in F$ – невозможное событие, которое также является элементом любой σ-алгебры событий *F,* т.е. условие $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$ также выполняется.

Мы показали, что для любого действительного x, выполняется условие $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, следовательно, наша функция $\xi(\omega) \equiv c$ действительно является случайной величиной. ■

2 свойство: Если $\xi(\omega)-$ случайная величина, то $\eta(\omega)=a\xi(\omega)+b$ также является случайной величиной.

Доказательство: Из условия известно, что $\xi(\omega)-$измеримая функция.

Выберем произвольное значение $x\in R$, тогда если функция $\eta(\omega)=a\xi(\omega)+b$ является измеримой, то для любого $x\in R$, должно выполняться $\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}\in F$, проверим, выполняется ли это условие:

$$\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}=\{\omega:a\xi(\omega)+b<x\}=\{\omega:a\xi(\omega)<x-b\}=\left\{\omega:\xi(\omega)<\frac{x-b}{a}\right\}=\xi^{-1}(-\infty,\frac{x-b}{a})\in F$$

Замечание: $\xi^{-1}(-\infty,\frac{x-b}{a})\in F-$это справедливо для любого $x\in R$, в силу измеримости $\xi(\omega)$ по условию.

Так как события $\eta^{-1}(-\infty,x)$ и $\xi^{-1}(-\infty,\frac{x-b}{a})$ эквивалентны, то $\eta^{-1}(-\infty,x)\in F$, а, следовательно, $\eta(\omega)=a\xi(\omega)+b-$ является измеримой функцией. ■

3 свойство: Если $\xi(\omega)-$ случайная величина, то $\eta=\xi^2$ также является случайной величиной.

Доказательство:

1. По определению: случайной величиной называется ***измеримая функция***, т.е. такая функция, для которой прообраз любого борелевского множества $B\in B$ на прямой R, принадлежит σ-алгебре F, *т.е.* $\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in F$. По-другому можем записать, согласно одному из условий критерия измеримости: $\xi^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in F$

2. Выберем произвольное значение $x\in R$, тогда если функция $\eta=\xi^2$ является измеримой, то для любого $x\in R$, необходимо и достаточно выполнения $\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}\in F$, проверим, выполняется ли это условие:

при $x\le 0$***:*** $\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}=\{\omega:\xi^2<x\}=\varnothing\in F$ - выполняется;

при $x>0$***:***

$$\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}=\{\omega:\xi^2<x\}=\{\omega:|\xi|<\sqrt{x}\}=\{\omega:-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x}\}=\{\omega:\xi\in(-\sqrt{x},\sqrt{x})\}=$$
$$=\left\{\omega:\xi\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\infty,-\sqrt{x}\right)\setminus\left(-\infty,\sqrt{x}+\frac{1}{n}\right)\right\}\right\}=\xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\infty,-\sqrt{x}\right)\setminus\left(-\infty,\sqrt{x}+\frac{1}{n}\right)\right\}\right)\in F$$

Почему?: Применение теоретико-множественных операций к измеримым борелевским множествам вида: $\left(-\infty,-\sqrt{x}\right)$ и $\left(-\infty,\sqrt{x}+\frac{1}{n}\right)$, не выводит нас за пределы борелевской σ-алгебры, *т.е. получаемые множества также будут являться борелевскими*. В силу измеримости $\xi(\omega)$, для которой прообраз любого борелевского множества $B\in \mathrm{B}$ на прямой R, принадлежит $\sigma-$ алгебре F и того, что события $\eta^{-1}(-\infty,x)$ и $\xi^{-1}(B)$ эквивалентные (т.е. наступлению этих событий благоприятствуют одни и те же элементарные исходы), заключаем: $\eta^{-1}(-\infty,x)\in F$.

Показали, что для любого $x\in R$ выполняется, что $\eta^{-1}(-\infty,x)\in F$, т.е. $\eta=\xi^2-$ действительно является случайной величиной (измеримой функцией). ■

4 свойство: Если $\xi(\omega)-$ случайная величина, то $\eta=|\xi|$ также является случайной величиной.

Доказательство:

1. Выберем произвольное значение $x\in R$, тогда если функция $\eta=|\xi|$ является измеримой функцией, то для любого $x\in R$, должно выполняться $\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}\in F$, проверим, выполняется ли это условие:

2. ***при*** $x\le 0$: $\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}=\{\omega:|\xi|<x\}=\varnothing\in F$ - выполняется;

3. ***при*** $x>0$:

$$\eta^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\eta(\omega)<x\}=\{\omega:|\xi|<x\}=\{\omega:-x<\xi<x\}==\{\omega:\xi\in(-x,x)\}=$$
$$==\left\{\omega:\xi\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(-\infty,-x)\setminus\left(-\infty,x+\frac{1}{n}\right)\right\}\right\}=\xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(-\infty,-x)\setminus\left(-\infty,x+\frac{1}{n}\right)\right\}\right)\in F$$

События $\eta^{-1}(-\infty,x)$ и $\xi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(-\infty,-x)\setminus\left(-\infty,x+\frac{1}{n}\right)\right\}\right)$ эквивалентные (т.е. наступлению этих событий благоприятствуют одни и те же элементарные исходы), поэтому $\eta^{-1}(-\infty,x)\in F$. То есть действительно $\eta=|\xi|-$ является случайной величиной (измеримой функцией). ■

5 свойство: Если $\xi(\omega),\eta(\omega)-$ случайные величины, заданные на (Ω,F,P), то $\alpha(\omega)=\xi(\omega)+\eta(\omega)$ также является случайной величиной.

Доказательство: Рассмотрим функцию $\alpha(\omega)=\xi(\omega)+\eta(\omega)$. Если она является измеримой, то для любого $x\in R$, должно выполняется $\alpha^{-1}(-\infty,x)\in F$.

$$\alpha^{-1}(-\infty,x)=\{\omega:\alpha<x\}=\{\omega:\xi+\eta<x\}=\{\omega:\xi<x-\eta\}$$

Выберем такое число $r \in Q$ - множества рациональных чисел, которое является всюду плотным в R, для которого: $\xi < r < x - \eta$, тогда можем продолжить, что $\alpha^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \xi < x - \eta\} = \{\omega : \xi < r < x - \eta\} = \bigcup\limits_{r \in Q} \{\omega : \xi < r\} \bigcap \{\omega : \eta < x - r\} \in F$.

Почему записали, что $\bigcup\limits_{r \in Q} \{\omega : \xi < r\} \bigcap \{\omega : \eta < x - r\} \in F$, потому, что имеем объединение пересечений измеримых множеств, элементов $\sigma -$ алгебры событий F.

То есть действительно функция $\alpha(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega)$ является случайной величиной. ■

6 свойство: Если $\xi(\omega), \eta(\omega) -$ случайные величины, то $\alpha(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega)$ также является случайной величиной.

Доказательство:

Рассмотрим функцию $\alpha(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega)$. Если она является измеримой, то для любого $x \in R$, должно выполняется $\alpha^{-1}(-\infty, x) \in F$.

$$\alpha^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \alpha < x\} = \{\omega : \xi - \eta < x\} = \{\omega : \xi < x + \eta\}$$

Выберем такое число $r \in Q$ - (из множества рациональных чисел, которое является всюду плотным в R), для r выполняется: $\xi < r < x + \eta$.

Тогда можем продолжить, что:

$$\alpha^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \xi < x + \eta\} = \{\omega : \xi < r < x + \eta\} = \bigcup_{r \in Q} \{\{\omega : \xi < r\} \bigcap \{\omega : \eta > r - x\}\} =$$

$$= \bigcup_{r \in Q} \{\{\omega : \xi < r\} \bigcap \{\Omega \setminus \omega : \eta \le r - x\}\} = \bigcup_{r \in Q} \left\{\{\omega : \xi < r\} \bigcap \left\{\Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : \eta < (r - x) + \frac{1}{n}\right\}\right\}\right\} \in F$$

То есть действительно функция $\alpha(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega)$ является случайной величиной. ■

7 свойство: Если $\xi(\omega), \eta(\omega) -$ случайные величины, заданных на (Ω, F, P), то $\alpha(\omega) = \xi(\omega) \cdot \eta(\omega)$ также является случайной величиной.

Доказательство:

1. Рассмотрим функцию $\alpha(\omega) = \xi(\omega) \cdot \eta(\omega)$. Представим ее в виде $\alpha(\omega) = \xi(\omega) \cdot \eta(\omega) = \frac{(\xi + \eta)^2 - (\xi - \eta)^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left((\xi + \eta)^2 - (\xi - \eta)^2\right)$.

2. Выше было доказано что: $\eta = \xi^2$ - случайная величина, $\alpha(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega)$ - случайная величина, $\alpha(\omega) = \xi(\omega) - \eta(\omega)$ - случайная величина. Нам не хватает только свойства, что если $\xi(\omega)-$ случайная величина, то $\eta = k \cdot \xi$ также является случайной величиной. После того, как мы это докажем, можем утверждать, что $\alpha(\omega) = \xi(\omega) \cdot \eta(\omega)$ также является случайной величиной.

3. При $k = 0$, $\eta = k \cdot \xi = 0$ - является измеримой функцией, как постоянная (***свойство 1***);

4. При $k > 0$, имеем: $\eta^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \eta < x\} = \{\omega : k \cdot \xi < x\} = \left\{\omega : \xi < \frac{x}{k}\right\} = \xi^{-1}(-\infty, \frac{x}{k}) \in F$

5. При $k < 0$, имеем:

$$\eta^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \eta < x\} = \{\omega : k \cdot \xi < x\} = \left\{\omega : \xi > \frac{x}{k}\right\} = \Omega \setminus \left\{\omega : \xi \le \frac{x}{k}\right\} = \Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : \xi < \frac{x}{k} + \frac{1}{n}\right\} \in F . \blacksquare$$

8 свойство: Если $\xi(\omega)-$ случайная величина такая, что $\xi \neq 0$, то $\eta = \frac{1}{\xi(\omega)}-$ также является случайной величиной.

Доказательство: Рассмотрим несколько случаев:

1. при $x > 0$:

$$\eta^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \eta(\omega) < x\} = \left\{\omega : \frac{1}{\xi(\omega)} < x\right\} = \left\{\omega : \xi(\omega) > \frac{1}{x}\right\} \bigcup \{\omega : \xi(\omega) < 0\} =$$

$$= \left\{\Omega \setminus \omega : \xi(\omega) \le \frac{1}{x}\right\} \bigcup \{\omega : \xi(\omega) < 0\} = \left\{\Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : \xi(\omega) < \frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right\}\right\} \bigcup \{\omega : \xi(\omega) < 0\} \in F$$

2. при $x < 0$:

$$\eta^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \eta(\omega) < x\} = \left\{\omega : \frac{1}{\xi(\omega)} < x\right\} = \left\{\omega : \frac{1}{x} < \xi(\omega) < 0\right\} =$$

$$= \left\{\omega : \xi(\omega) > \frac{1}{x}\right\} \bigcap \{\omega : \xi(\omega) < 0\} = \left\{\Omega \setminus \omega : \xi(\omega) \le \frac{1}{x}\right\} \bigcap \{\omega : \xi(\omega) < 0\} =$$

$$= \left\{\Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : \xi(\omega) < \frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right\}\right\} \bigcap \{\omega : \xi(\omega) < 0\} \in F$$

3. при $x = 0$:

$$\eta^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \eta(\omega) < x\} = \left\{\omega : \frac{1}{\xi(\omega)} < x\right\} = \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \xi^{-1}(-\infty, x) \in F$$

Для любого $x \in R$ мы получили $\eta^{-1}(-\infty, x) = \{\omega : \eta(\omega) < x\} \in F$, т.е. действительно $\eta = \frac{1}{\xi(\omega)}-$ случайная величина (измеримая функция). $\blacksquare$

9 свойство: Если $\xi_n(\omega), n=1,2,...$ случайные величины, заданные на (Ω, F, P), то $\max\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ и $\min\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, а также $\gamma = \sup_n\{\xi_n\}$ и $\beta = \inf_n\{\xi_n\}$ тоже являются случайными величинами.

Доказательство: Докажем для: $\gamma = \sup_n\{\xi_n\}$ и $\beta = \inf_n\{\xi_n\}$:

$\gamma^{-1} = \{\omega : \gamma(\omega) < x\} = \left\{\omega : \sup_n \xi_n < x\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \xi_n < x\} \in F$, т.е. $\gamma = \sup_n\{\xi_n\}$ - действительно является случайной величиной.

Так как известно, что $\beta = \inf_n\{\xi_n\} = -\sup_n\{-\xi_n\}$, то очевидно, что $\beta -$ также измерима. ■

10 свойство: Пусть $\xi_n(\omega), n=1,2,...$ последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве (Ω, F, P). Показать, что $\eta_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n$ – верхний и нижний $\eta_1 = \underline{\lim_n}\,\xi_n$ пределы последовательности случайных величин, тоже являются случайными величинами.

Доказательство: В силу предыдущего свойства, функция $\gamma_n = \sup_{k\geq n}\{\xi_k\}$ для любого ***n*** является измеримой функцией, т.е. случайной величиной. Тогда опять же в силу доказанного **9** свойства функция $\eta_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\xi_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n}\xi_k$ измерима, т.е. $\eta_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n$ – действительно является случайной величиной.

Аналогично для $\eta_1 = \underline{\lim_n}\,\xi_n$: $\beta_n = \inf_{k\geq n}\xi_n$ – СВ, в силу **9** свойства, тогда $\eta_1 = \underline{\lim_n}\,\xi_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\xi_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n}\xi_k$, также в силу этого свойства.

Итак, случайная величина это измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$, отображающая пространство элементарных событий Ω во множество действительных чисел R. ■

Рассмотрим *задачу, иллюстрирующую случайную величину, как измеримую функцию*.

Пример 1.1: Проводится ***опыт***: бросается монета 2 раза.

Запишем пространство элементарных исходов: $\Omega = \{ГГ, РР, ГР, РГ\}$. Или, обозначив элементарные исходы через $\omega_i, i=\overline{1,4}$: $\omega_1 = ГГ, \omega_2 = РР, \omega_3 = ГР, \omega_4 = РГ$, можем переписать $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Рассмотрим случайную величину ξ- число появлений герба. Очевидно, что ξ может быть равна: 0,1,2 в зависимости от исхода опыта:

$\xi = 2$ в случае наступления ω_1;

$\xi = 1$ в случае наступления ω_3 или ω_4;

$\xi = 0$ когда наступило элементарное событие ω_2,

т.е. $\xi(\omega_2) = 0;\ \xi(\omega_3) = \xi(\omega_4) = 1;\ \xi(\omega_1) = 2$.

Таким образом ξ - числовая функция со множеством значений $\{0,1,2\}$.

Покажем, что данная случайная величина является измеримой функцией, кроме того, что является числовой.

Замечание 1: На самом деле понятие измеримой функции, является обобщением понятия числовой функции.

Любая числовая функция связывает два числовых пространства (множества). Любая измеримая функция связывает пространства с выделенными сигма алгебрами.

Случайная величина связывает: (Ω,F) – пространство случайных событий, где F – это σ – алгебра событий, и (R,B) – борелевскую прямую, где B – борелевская σ – алгебра.

Замечание 2: σ – алгебра событий F это по сути список всех событий, которые мы рассматриваем в рамках данного опыта.

Максимальная сигма алгебра будет состоять из $2^n = |F|$ элементов, где n – размерность конечного пространства элементарных исходов. В данной задаче размерность $|F| = 2^n = 2^4 = 16,$ т.е. наш список событий, или наша ***максимальная сигма алгебра*** состоит из 16 элементов, запишем его:

$$F = \left\{ \begin{array}{r} \varnothing,\Omega,(\omega_1),(\omega_2),(\omega_3),(\omega_4),(\omega_1,\omega_2),(\omega_1,\omega_3),(\omega_1,\omega_4),(\omega_2,\omega_3),(\omega_2,\omega_4),(\omega_3,\omega_4), \\ (\omega_1,\omega_2,\omega_3),(\omega_2,\omega_3,\omega_4),(\omega_1,\omega_3,\omega_4),(\omega_1,\omega_2,\omega_4) \end{array} \right\}$$

Например, событие (ω_2,ω_3) означает, что при проведении опыта: двукратном подбрасывании монеты, выпала или два раза решка, или первый раз герб, а второй решка. А событие $(\omega_2,\omega_3,\omega_4)$ означает, что решка выпала хотя бы один раз, т.к. $\omega_2 = PP, \omega_3 = ГР, \omega_4 = РГ$.

Обычно измеримость функции проверяется относительно заданной σ – алгебры. Проведем проверку измеримости нашей функции, относительно максимальной σ – алгебры F.

Критерий измеримости можем использовать любой из приведённых выше, используем например такой: для того, чтобы функция была ***измеримой*** **необходимо и достаточно**, чтобы, для $\forall\, x \in R$ выполнялось: $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$.

Пусть $x \le 0$, тогда множество тех омега, для которых выполняется $\{\xi(\omega) < 0\} = \varnothing \in F$, т.к. нет ни одного значения ξ, попадающего в интервал $(-\infty, 0)$.

Пусть $0 < x \le 1$, т.е. сдвинем вправо от нуля x и посмотрим какие значения ξ, оказываются левее наперед заданного $0 < x < 1$, такое значение одно: $\xi(\omega_2) = 0;$ и множество тех омега, для которых выполняется $\{\xi(\omega) < x\} = \omega_2 \in F$.

Пусть $1 < x \le 2$, посмотрим какие значения ξ, оказываются левее такого наперед заданного x.

Таких значений несколько: $\xi(\omega_2) = 0;$ или $\xi(\omega_3) = \xi(\omega_4) = 1.$

И множество тех ω, для которых выполняется $\xi(\omega) < x$ выглядит так:

$$\{\omega : \xi(\omega) = 0\} \cup \{\omega : \xi(\omega) = 1\} = \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup \{\omega_4\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \in F,$$

Пусть $x > 2$; тогда значения ξ, лежащие в интервале $(-\infty, x)$: $\xi(\omega_2) = 0;$ $\xi(\omega_3) = \xi(\omega_4) = 1;$ $\xi(\omega_1) = 2$, и совокупность ω, для которых выполняется $\xi(\omega) < x$ выглядит так:

$$\{\omega : \xi(\omega) = 0\} \cup \{\omega : \xi(\omega) = 1\} \cup \{\omega : \xi(\omega) = 2\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\} \cup \{\omega_4\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \Omega \in F.$$

Итак, для $\forall\, x \in R$ выполняется: $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in F$, т.е. функция $\xi(\omega)$ действительно является измеримой функцией.

Пример 1.2. ***Опыт:*** подбрасывается кубик однократно.

Запишем пространство элементарных исходов: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Пусть задана функция $\xi(\omega) = \omega$. Запишем ее в виде таблицы:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$\xi(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

Проверим измеримость функции $\xi(\omega)=\omega$ относительно разных сигма алгебр.

Например, такой:

$F_1=\{\varnothing,\Omega,\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}=\{\varnothing,\Omega,\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\},\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}\}$, где Ω – достоверное событие, $\varnothing$ – невозможное событие, $\{1,3,5\}$ – событие, означающее, что выпало нечетное число очков, $\{2,4,6\}$ – выпало четное число очков.

Используем для проверки измеримости такой критерий измеримости: для того, чтобы функция была измеримой необходимо и достаточно, чтобы, для любого $x\in R$ выполнялось $\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in F_1$.

Выберем произвольное значение $x\in R$, например $x=3$, тогда множество тех ω, для которых выполняется $\{\omega:\xi(\omega)<3\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}=\{\omega_1,\omega_2\}\notin F_1$, в нашем списке событий (множестве множеств) F_1, нет такого элемента $\{\omega_1,\omega_2\}$, поэтому заключаем, что функция $\xi(\omega)=\omega$ не является измеримой, относительно заданной сигма алгебры F_1.

Зададим максимальную сигма алгебру F, которая включает в себя все возможные подмножества пространства элементарных исходов Ω и выглядит так:

$$F=\left\{\begin{array}{l}\varnothing,\Omega,\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\\ \{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\\ \{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{2,4,6\},\\ \{2,5,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\\ \{1,3,4,5\},\{1,3,4,6\},\{1,4,5,6\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\{2,4,5,6\},\{3,4,5,6\},\\ \{1,2,4,5\},\{1,2,4,6\},\{1,2,5,6\},\{1,3,5,6\},\{2,3,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,6\},\\ \{2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,4,5,6\},\{1,3,4,5,6\},\{1,2,3,5,6\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\end{array}\right\}$$

Элементов в нашей максимальной сигма алгебре должно быть $|F|=2^6=64$, (у n - элементного множества подмножеств 2^n).

Проверим измеримость нашей функции $\xi(\omega)=\omega$, относительно такой сигма алгебры. При ранее заданном значении $x=3$, мы получили:

$$\{\omega:\xi(\omega)<3\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}=\{\omega_1,\omega_2\}$$

Такого элемента не было в первой сигма алгебре F_1, но такой элемент очевидно имеется в максимальной $\sigma-$алгебре F : $\{\omega_1,\omega_2\}=\{1,2\}\in F$.

И для всех x из промежутка: $2<x\le 3$, будет справедливо, что $\{\omega:\xi(\omega)<3\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}=\{\omega_1,\omega_2\}$.

Проведем проверку для любого $x\in R$.

Пусть $x\le 1$, тогда $\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{\varnothing\}\in F$.

Пусть $1<x\le 2$, тогда $\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{1\}\in F$.

При $2<x\le 3$, провели проверку ранее.

Для $3<x\le 4$, справедливо:

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=3\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}=\{1,2,3\}\in F.$$

Для $4<x\le 5$, справедливо:

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=3\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=4\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=$$
$$=\{1,2,3,4\}\in F.$$

Пусть $5<x\le 6$, тогда:

$$\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=3\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=4\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=5\}=$$
$$=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}=\{1,2,3,4,5\}\in F.$$

Зададим $x>6$, тогда множество тех ω, для которых выполняется

$$\{\omega:\xi(\omega)<12\}=\{\omega:\xi(\omega)=1\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=2\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=3\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=4\}\cup\{\omega:\xi(\omega)=5\}\cup$$
$$\cup\{\omega:\xi(\omega)=6\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega\in F,$$

Таким образом для максимальной сигма алгебры, какой бы мы не выбрали $x\in R$, всегда получаем такую совокупность ω, для которой справедливо $\{\omega:\xi(\omega)<x\}\in F$.

То есть наша заданная функция $\xi(\omega)=\omega$ является случайной величиной (измеримой функцией), закон распределения которой может быть представлен в виде ряда распределения:

ξ_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Самостоятельно: Проверить, что $F=\left\{\varnothing,\Omega,\left\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\right\},\left\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\right\}\right\}$, действительно является $\sigma-$алгеброй.

Пример 1.3: В урне 3 белых и 2 черных шара. Шары поочередно без возвращения извлекаются из урны. Пусть $\xi-$число белых шаров, извлеченных до первого черного шара. Описать $\sigma-$алгебру, порождающую случайную величину ξ, и построить ряд распределения этой случайной величины.

Решение: Содержимое урны пять различимых между собой шаров:

$$\underbrace{\begin{array}{c}3\text{ белых: }Б_1, Б_{2,}Б_3\\ + \\ 2\text{ черных: }Ч_1, Ч_{2,}\end{array}}_{5\text{ шаров}}$$

Опыт: 5 шаров достают поочередно из урны без возвращения. Результаты опыта могут быть такие:

$$\Omega=\{\underbrace{(Б_1,Б_2,Б_3,Ч_1,Ч_2)}_{\omega_1};\underbrace{(Б_2,Б_3,Ч_2,Ч_1,Б_1)}_{\omega_2};\underbrace{(Б_2,Б_3,Ч_2,Б_1,Ч_1)}_{\omega_3};$$
$$\underbrace{(Б_1,Ч_1,Ч_2,Б_3,Б_1)}_{\omega_4};\underbrace{(Б_1,Ч_1,Б_3,Б_1,Ч_2)}_{\omega_5},\underbrace{(Б_1,Ч_1,Б_2,Ч_2,Б_3)}_{\omega_6},$$
$$\underbrace{(Ч_2,Б_3,Б_2,Ч_1,Б_1)}_{\omega_7},\underbrace{(Ч_1,Б_3,Ч_2,Б_2,Б_1)}_{\omega_8},\underbrace{(Ч_1,Б_2,Б_3,Б_1,Ч_2)}_{\omega_9},\underbrace{(Ч_1,Ч_2,Б_2,Б_1,Б_3)}_{\omega_{10}}\ \}$$

То есть каждый элементарный исход — это набор из 5 шаров.

Наши выборки будут перестановками с повторением. Разберемся почему. По определению: перестановками ***с повторениями из n элементов*** называют различные упорядочения данного конечного множества, состоящего из n элементов k типов $(k<n)$.

Количество таких комбинаций находится по формуле:

$$P_n(n_1,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!...n_k!},\ i=1,...,k,\ n=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

У нас $n=5$ элементов конечного множества, среди которых $n_1=3$ элементов 1-го типа (3 белых шара$(Б_1,Б_2,Б_3)$) и $n_2=2$ элементов 2-го типа (2 черных шара$(Ч_1,Ч_2)$).

По формуле получаем $P_5(3,2)=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{120}{6\cdot 2}=10$, т.е. $|\Omega|=10$.

Замечание: Считаем одинаковыми элементарные исходы с подобным чередованием черных и белых шаров:

$$\{Б,Б,Б,Ч,Ч\}=\{Б_1,Б_2,Б_3,Ч_1,Ч_2\}=\{Б_2,Б_1,Б_3,Ч_1,Ч_2\}=\{Б_2,Б_3,Б_1,Ч_1,Ч_2\}=\{Б_1,Б_3,Б_2,Ч_1,Ч_2\}=...=\omega_1,$$

$$\{Б,Б,Ч,Ч,Б\}=\{Б_2,Б_3,Ч_2,Ч_1,Б_1\}=\{Б_1,Б_2,Ч_2,Ч_1,Б_3\}=\{Б_3,Б_2,Ч_2,Ч_1,Б_1\}=\{Б_1,Б_2,Ч_1,Ч_2,Б_3\}=...=\omega_2,$$

$$\{Б,Б,Ч,Б,Ч\}=\{Б_2,Б_3,Ч_2,Б_1,Ч_1\}=\{Б_2,Б_1,Ч_2,Б_3,Ч_1\}=\{Б_1,Б_3,Ч_2,Б_2,Ч_1\}=\{Б_1,Б_2,Ч_2,Б_3,Ч_1\}=...=\omega_3$$

$$\{Б,Ч,Ч,Б,Б\}=\{Б_1,Ч_1,Ч_2,Б_2,Б_3\}=\{Б_1,Ч_2,Ч_1,Б_2,Б_3\}=\{Б_2,Ч_1,Ч_2,Б_1,Б_3\}=\{Б_2,Ч_2,Ч_1,Б_2,Б_3\}=....=\omega_4$$

$$\{Б,Ч,Б,Б,Ч\}=\{Б_1,Ч_1,Ч_2,Б_2,Б_3\}=\{Б_1,Ч_2,Ч_1,Б_2,Б_3\}=\{Б_2,Ч_1,Ч_2,Б_1,Б_3\}=\{Б_2,Ч_2,Ч_1,Б_2,Б_3\}=....=\omega_5$$

$$\{Б,Ч,Б,Ч,Б\}=\{Б_1,Ч_1,Ч_2,Б_2,Б_3\}=\{Б_1,Ч_2,Ч_1,Б_2,Б_3\}=\{Б_2,Ч_1,Ч_2,Б_1,Б_3\}=\{Б_2,Ч_2,Ч_1,Б_2,Б_3\}=....=\omega_6$$

$$\{Ч,Б,Б,Ч,Б\}=\{Ч_1,Б_3,Б_2,Ч_2,Б_1\}=\{Ч_2,Б_3,Б_2,Ч_1,Б_1\}=\{Ч_1,Б_3,Б_1,Ч_2,Б_2\}=\{Ч_2,Б_1,Б_2,Ч_1,Б_3\}=....=\omega_7,$$

$$\{Ч,Б,Ч,Б,Б\}=\{Ч_1,Б_1,Ч_2,Б_2,Б_3\}=\{Ч_2,Б_1,Ч_1,Б_2,Б_3\}=\{Ч_1,Б_3,Ч_2,Б_2,Б_1\}=\{Ч_2,Б_3,Ч_1,Б_2,Б_1\}=...=\omega_8,$$

$$\{Ч,Б,Б,Б,Ч\}=\{Ч_1,Б_3,Б_2,Б_1,Ч_2\}=\{Ч_2,Б_3,Б_2,Б_1,Ч_1\}=\{Ч_1,Б_2,Б_3,Б_1,Ч_2\}=\{Ч_2,Б_2,Б_3,Б_1,Ч_1\}=...=\omega_9,$$

$$\{Ч,Ч,Б,Б,Б\}=\{Ч_1,Ч_2,Б_1,Б_2,Б_3\}=\{Ч_2,Ч_1,Б_1,Б_2,Б_3\}=\{Ч_1,Ч_2,Б_2,Б_1,Б_3\}=\{Ч_2,Ч_1,Б_3,Б_2,Б_1\}=...=\omega_{10}$$

Вероятность любого из элементарных исходов $\omega_i, i=\overline{1,10}$, можем найти используя теорему умножения и рассуждая аналогично для каждого элементарного исхода:

$$P(\omega_i)=\underbrace{\frac{3}{5}}_{\substack{взяли\\ 1\text{–}ый\\ белый\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{2}{4}}_{\substack{взяли\\ 2\text{–}ой\\ черный\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{взяли\\ 3\text{–}ий\\ черный\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{2}{2}}_{\substack{взяли\\ 4\text{–}ый\\ белый\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1}}_{\substack{взяли\\ 5\text{–}ый\\ белый\ шар}}=\underbrace{\frac{2}{5}}_{\substack{взяли\\ 1\text{–}ый\\ черный\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{взяли\\ 2\text{–}ой\\ черный\ шар}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{3}{3}}_{\substack{взяли\\ 3\text{–}ий\\ белый\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{2}{2}}_{\substack{взяли\\ 4\text{–}ый\\ белый\ шар}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1}}_{\substack{взяли\\ 5\text{–}ый\\ белый\ шар}}=.....=\frac{1}{10},\quad i=\overline{1,10}$$

Опишем $\sigma-$алгебру, порождающую случайную величину $\xi-$ число белых шаров, извлеченных до первого черного шара.

Максимальная сигма алгебра F в случае вышеуказанного Ω содержит $N_F=2^{10}=1024-$ элементов, каждый из которых является событием.

Так как нас интересует в опыте, выпадение числа белых шаров до появления черного, то введем такие события:

$A_0 = \{$ первым достали черный шар $\}$;

$A_1 = \{$ первым выпал белый шар, следующим черный $\}$;

$A_2 = \{$ первым достали белый шар, вторым белый, третьим черный $\}$;

$A_3 = \{$ первым выпал белый шар, вторым белый, третьим белый, четвертым черный шар $\}$.

$A_0 = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$, $A_1 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$, $A_3 = \{\omega_1\}$.

Найдем вероятности введенных событий:

$$P(A_0) = P(\omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}) = P(\omega_7) + P(\omega_8) + P(\omega_9) + P(\omega_{10}) = 4/10.$$

Эту вероятность нашли, используя теорему о вероятности суммы несовместных событий.

Аналогично находим $P(A_1)$, $P(A_2), P(A_3)$:

$$P(A_1) = P(\omega_4 + \omega_5 + \omega_6) = P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) = 3/10;$$

$$P(A_2) = P(\omega_2 + \omega_3) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = 2/10;$$

$$P(A_3) = P(\omega_1) = 1/10.$$

Тогда σ – алгебра событий F_1, будет выглядеть так:

$$F_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{\varnothing\}; \{\Omega\}; \{A_0\}; \{A_1\}; \{A_2\}; \{A_3\}; \{\overline{A_0}\}; \{\overline{A_1}\}; \{\overline{A_2}\}; \{\overline{A_3}\}; \{A_1 \cup A_2\}; \{A_2 \cup A_3\}; \{A_0 \cup A_3 \cup A_2\}; \\ \{A_3 \cup A_2 \cup A_1\}; \{A_0 \cap A_3\}; \{A_2 \cap A_3\}; \{A_1 \cap A_2\}; ....; \{A_0 \cap A_3 \cap A_2\}; \{A_1 \cap A_0 \cap A_3 \cap A_2\}; ... \end{array} \right\}.$$

Где, например, события: $\overline{A_0} = \{$ первым достали не черный шар $\} = \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$;

$\{A_2 \cap A_3\} = \{\varnothing\}$ – невозможное событие; $\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{$ первым выпал белый шар $\}$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ – число белых шаров, извлеченных до первого черного шара:

ξ_i	0	1	2	3
p_i	4/10	3/10	2/10	1/10

Тема 8. Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин

Случайная величина называется ***дискретной***, если множество ее значений конечно или счетно.

Рядом распределения вероятностей дискретной случайной величины ξ называется соответствие $P\{\xi = \xi_i\} = p_i$, $i = 1, 2, ...$ значениям ξ_i случайной величины ξ вероятностей p_i, с которыми эти значения принимаются.

Ряд распределения можно представлять в виде ***таблицы*:**

ξ	ξ_1	ξ_2	…	ξ_n	…
p	p_1	p_2	…	p_n	…

Или графически в виде ***многоугольника распределения* (*полигона распределения*)** – плоской ломаной линии с узлами (x_i, p_i), $i = 1,...,n$. Вероятности p_i должны удовлетворять условию нормировки $\sum_i p_i = 1$.

Функцией распределения вероятностей дискретной случайной величины ξ называют такую функцию:

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \sum_{\{k : x_k < x\}} p_k \ .$$

<u>Свойства функции распределения</u>

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$, т.е. $0 \le F(x) \le 1$;

2. $F(x)$ – кусочно-постоянная функция;

3. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$;

4. $F(x)$ – непрерывная слева функция, т.е. $\lim\limits_{x \to x_k - 0} F(x) = F(x_k)$; Это означает, что при подходе слева к точкам разрыва функция сохраняет свое значение.

5. В точках $x = x_k$ функция $F(x)$ терпит разрывы первого рода, неустранимые и делает скачки, при этом величины скачков равны $p_k = P(X = x_k)$, т.е. равны вероятности принять значение x_k. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

6. Вероятность попадания значений случайной величины в промежуток $[a,b)$:

$$P\{a \le X < b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

Примеры решения задач по теме 8

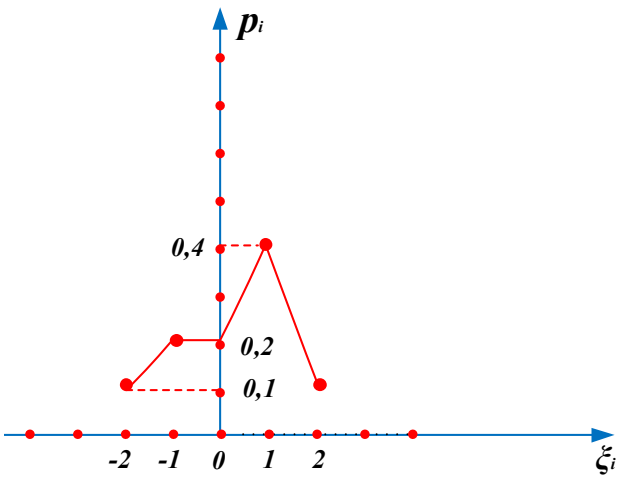
Пример 8.1: Дискретная случайная величина ξ, задана рядом распределения. Проверить условие нормировки, построить полигон распределения, построить функцию распределения и изобразить ее графически.

ξ_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

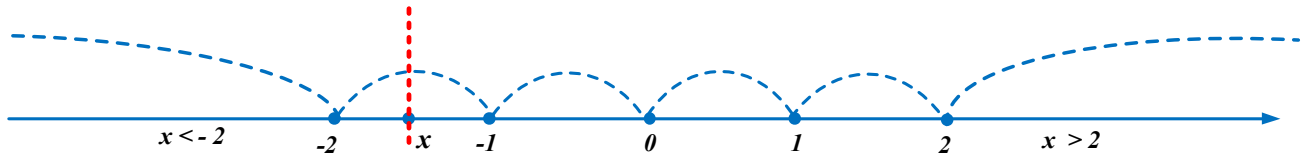
Решение:

1. Проверим условие нормировки: $\sum_{k=1}^{5} p_k = 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.4 + 0.1 = 1$

2. Построим полигон. Полигон распределения вероятностей, это ломанная, с узлами в точках $(\boldsymbol{\xi_i}, \boldsymbol{p_i})$, $i = \overline{1,5}$.



3. Построим функцию распределения $F_{\xi}(x) = P(\boldsymbol{\xi} < x)$. Случайная величина имеет пять значений, которые делят всю числовую ось на шесть интервалов: $(-\infty; -2]; (-2; -1]; (-1; 0]; (0; 1]; (1; 2]; (2; +\infty)$.



а) Если $x \le -2$, то событие $\boldsymbol{\xi < x}$ невозможно, т.к. левее таких наперед заданных $\boldsymbol{x}$ нет значений случайной величины. Следовательно значение функции распределения $F_{\xi}(x) = 0$.

б) Если $-2 < x \le -1$, то событие $\boldsymbol{\xi < x}$ **(** $\boldsymbol{\xi}$ находится слева от $\boldsymbol{x}$ **)** возможно, только если $\boldsymbol{\xi} = -2$. Вероятность такого события $P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = -2) =$ 0.1, поэтому для таких $\boldsymbol{x}$: $F_{\xi}(x) = 0.1$;

в) Если $-1 < x \le 0$, то событие $\boldsymbol{\xi < x}$ наступит, если только $\boldsymbol{\xi} = -2$, или $\boldsymbol{\xi} = -1$, поэтому в данном случае вероятность $P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = -1) + P(\boldsymbol{\xi} = 0) = 0.3$.

г) При $0 < x \le 1$ неравенство $\boldsymbol{\xi < x}$ выполняется если $\boldsymbol{\xi} = -2$, или $\boldsymbol{\xi} = -1$, или $\boldsymbol{\xi} = 0$, поэтому в этом случае вероятность $P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = -2) + P(\boldsymbol{\xi} = -1) + P(\boldsymbol{\xi} = 0) = 0.5$; и $F_{\xi}(x) = 0.5$;

д) При $1 < x \le 2$ событие $\boldsymbol{\xi < x}$ возможно если $\boldsymbol{\xi} = -2$, или $\boldsymbol{\xi} = -1$, или $\boldsymbol{\xi} = 0$, или $\boldsymbol{\xi} = 1$, поэтому в таком случае вероятность:

$$P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = -2) + P(\boldsymbol{\xi} = -1) + P(\boldsymbol{\xi} = 0) + P(\boldsymbol{\xi} = 1) = 0.9.$$

И значение функции распределения $F_{\xi}(x) = 0.9$;

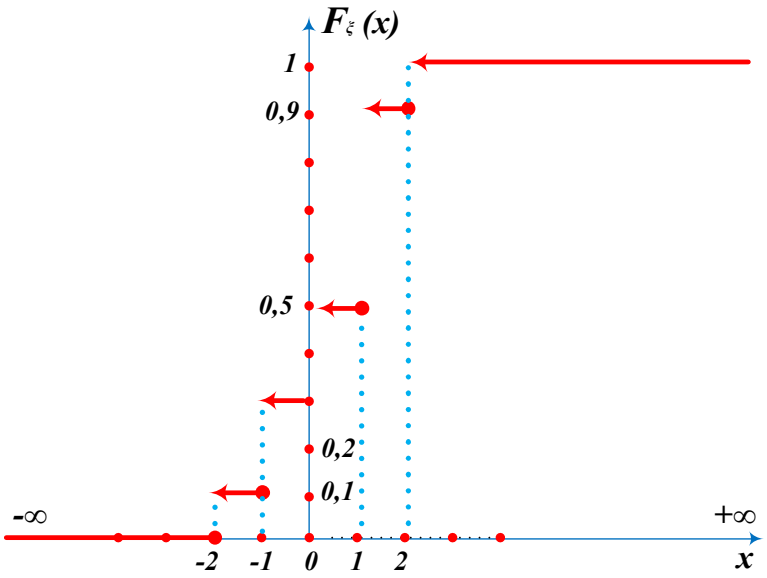
е) И наконец, в случае $x > 2$; неравенство $\boldsymbol{\xi < x}$ выполняется для всех значений случайной величины $\boldsymbol{\xi}$, поэтому $P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = -2) + P(\boldsymbol{\xi} = -1) + P(\boldsymbol{\xi} = 0) + P(\boldsymbol{\xi} = 1) + P(\boldsymbol{\xi} = 2) =$ $= 1$;

т.е. $F_{\xi}(x) = 0.9 + 0.1 = 1$;

Таким образом мы получили следующую функцию:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ 0.1; & -2 < x \le -1 \\ 0.3; & -1 < x \le 0 \\ 0.5; & 0 < x \le 1 \\ 0.9; & 1 < x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

4. Графическое изображение функции распределения:



Из полученного графика видно, что функция распределения ***дискретной случайной величины*** есть разрывная ступенчатая функция, скачки, которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и величины скачков равна вероятностям принять эти значения.

Из графика видно, что функция является непрерывной только слева, т.к. например:

$$\lim_{x\to -1-0} F(x) = F(-1) = 0.1 \neq \lim_{x\to -1+0} F(x) = 0.3$$

Аналогично в окрестности других значений случайной величины $\boldsymbol{\xi}$.

Пример 8.2. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вытащили один шар. Построить ряд распределения случайной величины ξ – число вынутых белых шаров.

Решение:

Урна: $\underbrace{\langle 5 \text{ белых шаров} \mid 25 \text{ черных шаров} \rangle}_{\text{Всего: } \mathbf{30} \text{ шаров}}$

Опыт: Достали 1 шар.

Очевидно, что мы можем достать или только белый шар, или только черный шар.

Обозначим события: $A=\{$ достали белый шар $\}$; $B=\{$ достали черный шар $\}$.

Заданная случайная величина ξ – число вынутых белых шаров.

После наступления события B, случайная величина примет значение $\xi_1=0$, а при наступлении события A значение $\xi_2=1$.

Найдем соответствующие вероятности значений ξ_i, $i=1,2$:

$$P(B)=P(\xi_1=0)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6},\ P(A)=P(\xi_2=1)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Вероятности значений нашли, используя классическое определение вероятностей.

Можем записать закон распределения случайной величины в виде ряда распределения:

ξ_i	$\xi_1=0$	$\xi_2=1$
p_i	$5/6$	$1/6$

Подобный закон распределения называется ***<u>законом распределения Бернулли</u>***, когда случайная величина ξ принимает два значения: $0-$неудача, $1-$успех с соответствующими вероятностями q и p.

<u>Замечание:</u> Случайная величина, имеющая значения 0 и 1, часто называется ***индикаторной случайной величиной***.

<u>Пример 8.3.</u> Построить ряд распределения случайной величины ξ, если $\xi-$число появлений «герба» при ***n***-бросаниях монеты.

<u>Решение:</u>

Заданная случайная величина ξ может принимать значения: 0,1,2,…,***n.***

Вероятность появления герба в каждом отдельном испытании $p=1/2$, а решки $q=1/2$. Случайная величина задана так, что можно сказать, что нас интересует появление герба в каждом отдельном испытании, и для нас это «успех».

Мы можем описать опыт в задаче таким образом, что: проводится серия из ***n***- независимых испытаний, в каждом из которых с постоянной вероятностью $p=1/2$ наступает событие $A=\{$ выпал герб $\}$, или с вероятностью $q=1-p=1/2$, наступает событие $\overline{A}=\{$ выпала решка $\}$.

Очевидно, это формулировка схемы Бернулли, которая обсуждалась в первой части «Случайные события». То есть наша случайная величина принимает значения 0,1,2,…,***n***, с соответствующими вероятностями, определяемыми формулой Бернулли:

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0,n}$$

У нас:

$$P_n(0) = P\left(\xi = 0\right) = \mathrm{C}_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n = \frac{1}{2^n};$$

$$P_n(1) = P\left(\xi = 1\right) = \mathrm{C}_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1} = n \cdot \frac{1}{2^n};$$

$$P_n(2) = P\left(\xi = 2\right) = \mathrm{C}_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} = \frac{n \cdot \left(n-1\right)}{2!} \cdot \frac{1}{2^n};$$

$$P_n(3) = P\left(\xi = 3\right) = \mathrm{C}_n^3 \cdot p^3 \cdot q^{n-3} = \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \left(n-2\right)}{3!} \cdot \frac{1}{2^n};$$

…….

$$P_n(m) = P\left(\xi = m\right) = \mathrm{C}_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n \cdot \left(n-1\right) \cdot \ldots . \cdot \left(n-m+1\right)}{m!} \frac{1}{2^n};$$

…….

$$P_n(n-1) = P\left(\xi = n-1\right) = \mathrm{C}_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q = n \cdot \frac{1}{2^n};$$

$$P_n(n) = P\left(\xi = n\right) = \mathrm{C}_n^n \cdot p^n \cdot q^0 = \frac{1}{2^n}.$$

Запишем ξ в виде ряда распределения:

ξ_i	0	1	2	3	……	***m***	……	***n-1***	***n***
p_i	$\frac{1}{2^n}$	$C_n^1 \cdot \frac{1}{2^n}$	$C_n^2 \cdot \frac{1}{2^n}$	$C_n^3 \cdot \frac{1}{2^n}$	……	$C_n^m \cdot \frac{1}{2^n}$	……	$\mathrm{C}_n^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}$

Проверим условие нормировки: $\sum_i p_i = 1$. У нас:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Условие нормировки выполняется. Данная случайная величина имеет ***<u>биномиальный закон распределения</u>***.

Пример 8.4. Из партии в 10 изделий, среди которых имеется 2 бракованных, выбираются наудачу три изделия для проверки качества. Построить ряд и функцию распределения случайной величины ξ – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти моду этой случайной величины.

Решение. Так как бракованных деталей в партии только две, то среди трех отобранных должна быть, как минимум, одна стандартная деталь. Следовательно, случайная величина ξ может принимать три значения: $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 2,\ \xi_3 = 3$. Найдем соответствующие вероятности значений ξ.

Общее число способов выбрать три детали из 10 имеющихся деталей: $n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$.

Найдем число исходов, благоприятствующих каждому значению случайной величины: $m_1 = C_8^1 \cdot C_2^2 = 8$, $m_2 = C_8^2 \cdot C_2^1 = 56$, $m_3 = C_8^3 = 56$. Тогда $p_1 = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$, $p_2 = p_3 = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$. Поэтому ряд распределения имеет вид:

ξ_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

Мода распределения $Mo\xi = 2$ – это наиболее вероятное значение случайной величины ξ.

Функция распределения $F_\xi(x)$ имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{15}, & 1 < x \le 2, \\ \frac{8}{15}, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Пример 8.5. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент не отвечает на вопрос. Построить ряд распределения случайной величины ξ – число дополнительных вопросов, заданных студенту. Найти моду этого распределения.

Решение: ***Опыт:*** Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы.

Обозначим события:

$G_1 = \{$ студент ответил на заданный вопрос $\}; G_2 = \{$ студент не ответил на вопрос $\}$.

Из условия известно, что $P(G_1) = 0,9$ и $P(G_2) = 1 - P(G_1) = 0,1$.

Введенная случайная величина ξ – число дополнительных вопросов, заданных студенту. Очевидно, что следующий дополнительный вопрос появляется лишь тогда, когда был ответ на предыдущий дополнительный вопрос. Разберемся какие значения может принимать ξ?

Отрицательных значений ξ принять не может по определению.

Значение $\xi = 0$ тоже не может появиться, так как по смыслу задачи понятно, что хотя бы один вопрос должен быть задан.

Итак, первое значение $\xi = 1$. *Ответим на вопрос:* какое событие должно будет наступить, чтобы случайная величина приняла данное значение, иначе говоря, что является прообразом данного значения $\xi^{-1} = (1) = ?$ Не сложно догадаться, что это событие:

$A_1 = \{$ студент сразу не ответил на первый же дополнительный вопрос $\}$.

Вероятность этого события $P(A_1) = P(G_2) = 0,1$

Если $\xi = 2$, то очевидно, что прообразом этого значения является событие:

$A_2 = \{$ студент ответил на 1-ый доп., а на 2-ой дополнительный вопрос не ответил $\}$.

Вероятность данного события: $P(A_2) = P(G_1 \cdot G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2) = 0,9 \cdot 0,1$. Для нахождения вероятности мы использовали теорему умножения независимых событий.

При $\xi = 3$, прообразом является событие:

$A_3 = \{$ студент ответил на первых два дополнительных вопроса, а на 3-ий дополнительный вопрос не ответил $\}$;

Вероятность данного события: $P(A_3) = P(G_1 \cdot G_1 \cdot G_2) = P(G_1) \cdot P(G_1) \cdot P(G_2) = 0,9^2 \cdot 0,1$. Для нахождения этой вероятности также использовали теорему умножения для трех независимых событий.

……...……и т.д.

Если $\xi = n$, то прообразом этого значения является событие:

$A_n = \{$ студент ответил на $(n-1)$ – дополнительный вопрос, а на n – ый доп. вопрос не ответил $\}$

Вероятность которого равна:

$$P(A_n) = P\left(\underbrace{G_1 \cdot G_1 \cdot \ldots\ldots \cdot G_1}_{n-1} \cdot G_2 \right) = \underbrace{P(G_1) \cdot P(G_1) \cdot \ldots\ldots \cdot P(G_1)}_{n-1} \cdot P(G_2) = 0,9^{n-1} \cdot 0,1$$

Можем записать ряд распределения случайной величины ξ:

ξ_i	1	2	3	4	…….	n	…….
p_i	0,1	$0,1 \cdot 0,9$	$0,1 \cdot 0,9^2$	$0,1 \cdot 0,9^3$	…….	$0,1 \cdot 0,9^{n-1}$	…….

Проверим условие нормировки: $\sum_i p_i = 1$.

У нас:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 0,1 + 0,1 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9^3 + \ldots + 0,1 \cdot 0,9^{n-1} + \ldots =$$

Найдем сумму этого ряда.

Присмотревшись внимательно, узнаем ряд геометрической прогрессии, который сходится в случае $|q| < 1$, где q – знаменатель прогрессии.

У нас $q = 0,9 < 1,$ т.е. ряд сходится и сумма такого ряда находится по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – это первый член ряда.

Подставляя получаем: $S = \frac{0,1}{1-0,9} = 1$. То есть условие нормировки выполняется. Следовательно закон распределения случайной величины ξ – число дополнительных вопросов, заданных студенту составлен верно.

Такой закон распределения носит название ***геометрического закона распределения,*** сдвинутого на единицу.

В задании необходимо найти ***моду*** для данной случайной величины.

Модой дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение. У нас это значение $\xi_1 = 1$, которое случайная величина принимает с вероятностью $p_1 = 0,1$.

Пример 8.6. В первой урне содержится 6 белых и 4 черных шара, а во второй 3 белых и 7 черных шаров. Из первой урны берут наудачу 2 шара и перекладывают во вторую урну, а затем из второй урны берут наудачу один шар и перекладывают в 1-ую урну. ***Составить*** законы распределения числа белых шаров в первой и в торой урне. ***Построить*** функцию распределения.

Решение:

<u>1 этап</u>

Из условия задачи известно:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{1}\text{ урна содержит:}\\ \underbrace{\text{6 белых} \quad + \quad \text{4 черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна содержит:}\\ \underbrace{\text{3 белых} \quad + \quad \text{7 черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

Проводится испытание:

<u>Опыт 1:</u>

$$[\textbf{1}\text{ урна }] \rightarrow \quad \text{перекладываем 2 шара} \quad \rightarrow [\textbf{2}\text{ урна}]$$

1. Введем события: $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$:

$\mathrm{A}_1 = \{\text{переложили два белых шара}\}$;

$\mathrm{A}_2 = \{\text{переложили два черных шара}\}$;

$\mathrm{A}_3 = \{\text{переложили один белый и один черный шар}\}$;

Оценим вероятности указанных событий. Можем найти их, используя теорему сложения для зависимых событий или классическое определение вероятностей. Найдем вероятность $P(\mathrm{A}_1)$.

<u>1 способ:</u> Используем только классическое определение вероятностей. Согласно классическому способу нахождения вероятностей, вероятность события равна отношению:

$$P(A) = \frac{M}{N},$$

где

$M -$ число элементарных исходов опыта, благоприятствующих наступлению А,

$N -$ общее число элементарных исходов в данном испытании.

Всего шаров в урне 10. ***<u>Опыт:</u>*** берем из них 2 белых шара. Сколько всего способов взять 2 шара любого цвета: C_{10}^2, т.е. $\boldsymbol{N = \mathrm{C}_{10}^2}$**.** Каким числом способов можно взять 2 белых шара: $\boldsymbol{M = \mathrm{C}_6^2}$**,** тогда

$$P(\mathrm{A}_1) = \frac{M}{N} = \frac{\mathrm{C}_{\mathbf{6}}^{\mathbf{2}}}{\mathrm{C}_{\mathbf{10}}^{\mathbf{2}}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3};$$

2 способ: Используем теорему умножения для зависимых событий. Нам нужно взять и первый белый шар $(\mathrm{Б}_{\mathbf{1}})$**,** и второй белый шар $(\mathrm{Б}_{\mathbf{2}})$, т.е. должно наступить событие: $\mathrm{Б}_{\mathbf{1}} \cdot \mathrm{Б}_{\mathbf{2}}$**.** Вероятность события $\boldsymbol{P}(\mathrm{Б}_{\mathbf{1}} \cdot \mathrm{Б}_{\mathbf{2}}) = \boldsymbol{P}(\mathrm{Б}_{\mathbf{1}}) \cdot \boldsymbol{P}(\mathrm{Б}_{\mathbf{2}}|\mathrm{Б}_{\mathbf{1}})$, т.к. события $\mathrm{Б}_{\mathbf{1}}$ и $\mathrm{Б}_{\mathbf{2}}$ зависимы. Найдем вероятность

взять первый шар белый $\boldsymbol{P}(\text{Б}_\mathbf{1})$: т.к. всего шаров 10, а белых из них 6, то вероятность взять первый белый шар $\frac{6}{10}$ (использовали классическое определение вероятностей). Тогда вероятность взять второй белый шар, при условии, что первый белый уже забрали: $\frac{5}{9}$, потому что после «взятия» первого шара, всего осталось 9 шаров, из них белых 5, т.е. окончательно:

$$P(\text{А}_1) = P(\text{Б}_1 \cdot \text{Б}_2) = P(\text{Б}_1) \cdot P(\text{Б}_2|\text{Б}_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

2. Используя, 2 способ, оценим вероятность $P(A_2)$:

$$P(A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{4}{30}$$

3. И, наконец, найдем вероятность $P(A_3)$.

Событие $\text{А}_3 = \{\text{переложили один белый и один черный шар}\}$ может случиться так: первый достали белый $\{\text{Б}_1\}$, а второй черный $\{\text{Ч}_2\}$ ***<u>или</u>*** первый взяли черный шар $\{\text{Ч}_1\}$, а второй белый $\{\text{Б}_2\}$, т.е. событие $\text{А}_3 = \{\text{Б}_1 \cdot \text{Ч}_2 + \text{Ч}_1 \cdot \text{Б}_2\}$. Таким образом А_3 – является суммой двух попарно несовместных событий $\text{Б}_1 \cdot \text{Ч}_2$ и $\text{Ч}_1 \cdot \text{Б}_2$.

Поэтому при нахождении вероятности используем теорему сложения (для двух несовместных событий):

$$P(\text{А} + \text{В}) = P(\text{А}) + P(B)$$

$$P(\text{А}_3) = \underbrace{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}}_{\text{и 1 шар белый, и 2 шар черный}} \ (\text{или}) + \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}_{\text{и 1 шар черный, и 2 шар белый}} = \frac{48}{90} = \frac{16}{30}$$

4. В первой урне стало после перекладывания ***<u>на первом этапе</u>***:

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна было:}\\ \text{6 белых} + \text{4 черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right] \begin{matrix}\rightarrow\\ \text{перекладываем 2 шара}\\ \rightarrow\end{matrix} \begin{cases} \text{2 белых шара} & \rightarrow \left\{\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ \text{4 белых} + \text{4 черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right]\right. \\ \text{2 черных шара} & \rightarrow \left\{\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ \text{6 белых} + \text{2 черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right]\right. \\ \text{1 белый и 1 черный} & \rightarrow \left\{\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ \text{5 белых} + \text{3 черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right]\right. \end{cases}$$

То есть при наступлении $\text{А}_1 = \{\text{переложили два белых шара}\}$:

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна было:}\\ \text{6 белых} + \text{4 черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right] \rightarrow \ \rightarrow \left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ \text{4 белых} + \text{4 черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right]$$

при наступлении $A_2 = \{$переложили два черных шара$\}$:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{1}\text{ урна:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad\rightarrow\left[\begin{array}{c}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 2\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

при наступлении $A_3 = \{$переложили один белый и один черный шар$\}$:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{1}\text{ урна:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad\rightarrow\left[\begin{array}{c}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 3\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

5. Во ***<u>второй урне</u>*** стало после добавления из первой ***<u>на первом этапе:</u>***

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\begin{array}{c}\rightarrow\\ \text{добавляем 2 шара}\\ \rightarrow\end{array}\begin{cases}\text{2 белых шара} & \rightarrow & \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\right.\\ \text{2 черных шара} & \rightarrow & \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\right.\\ \text{1 белый и 1 черный} & \rightarrow & \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\right.\end{cases}$$

То есть при наступлении $A_1 = \{$переложили два белых шара$\}$:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad\rightarrow\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

при наступлении $A_2 = \{$переложили два черных шара$\}$:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad\rightarrow\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

при наступлении $A_3 = \{$переложили один белый и один черный шар$\}$:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad\rightarrow\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

2 этап

1. Известно, что на втором этапе из 2 урны берут наудачу один шар и перекладывают в 1 урну, т.е.

Опыт 2:

$$[\mathbf{2}\text{ урна }]\rightarrow \quad \text{перекладываем 1 шар} \quad \rightarrow [\mathbf{1}\text{ урна}]$$

Введем события:

$$\mathrm{B}_1 = \{\text{достали белый шар из 2 урны }\};$$
$$\mathrm{B}_2 = \{\text{достали черный шар из 2 урны }\}.$$

Тогда в 1 урне стало после перекладывания из 2 урны ***на втором этапе***:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна было:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\leftarrow \quad \mathrm{B}_1 = \{\text{добавили белый шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_1\cdot \mathrm{B}_1\} \quad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна было:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\leftarrow \quad \mathrm{B}_2 = \{\text{добавили черный шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_1\cdot \mathrm{B}_2\} \quad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 5\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

или:

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна было:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 2\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\leftarrow \quad \mathrm{B}_1 = \{\text{добавили белый шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_2\cdot \mathrm{B}_1\} \quad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{7\text{ белых}\quad+\quad 2\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

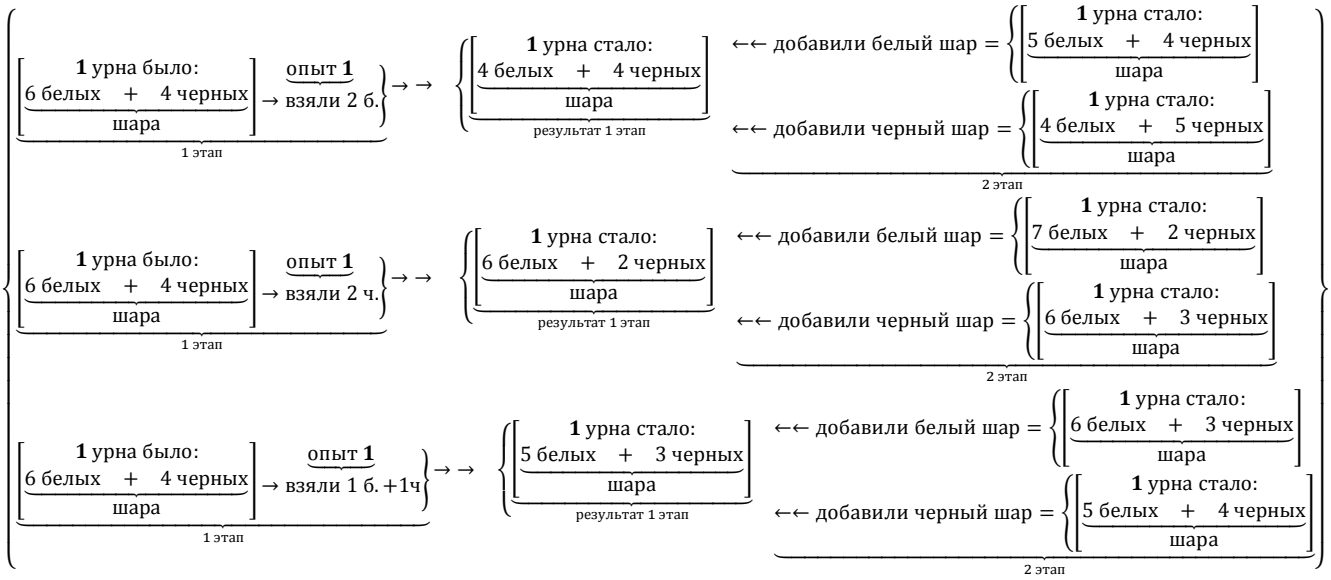
$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна было:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 2\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\leftarrow \quad \mathrm{B}_2 = \{\text{добавили черный шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_2\cdot \mathrm{B}_2\} \quad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 3\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

или

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна было:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 3\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\leftarrow \quad \mathrm{B}_1 = \{\text{добавили белый шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_3\cdot \mathrm{B}_1\} \quad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{6\text{ белых}\quad+\quad 3\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна было:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 3\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\leftarrow \quad \mathrm{B}_2 = \{\text{добавили черный шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_3\cdot \mathrm{B}_2\} \quad = \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

В целом оба этапа для первой урны можно представить в виде схемы:



Сразу же можем записать возможные значения случайной величины ξ – количество белых шаров в первой урне после всех перекладываний: 4,5,6,7.

2. Для 2 урны ситуация после перекладывания ***<u>на втором этапе</u>*** выглядит так:

Или

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было после 1 этапа:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad \mathrm{B}_1=\{\text{достали белый шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_1\cdot\mathrm{B}_1\}\quad=\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было после 1 этапа:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad \mathrm{B}_2=\{\text{дос тали черный шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_1\cdot\mathrm{B}_2\}\quad=\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 6\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

$$P(\mathrm{B}_1|A_1)=\frac{5}{12}$$

$$P(\mathrm{B}_2|A_1)=\frac{7}{12}$$

или

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было после 1 этапа:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad \mathrm{B}_1=\{\text{достали белый шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_2\cdot\mathrm{B}_1\}\quad=\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{2\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было после 1 этапа:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]\rightarrow\quad \mathrm{B}_2=\{\text{достали черный шар}\}\rightarrow\{\mathrm{A}_2\cdot\mathrm{B}_2\}\quad=\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}\right]$$

$$P(\mathrm{B}_1|A_2) = \frac{3}{12}$$

$$P(\mathrm{B}_2|A_2) = \frac{9}{12}$$

или

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было после 1 этапа:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right] \rightarrow \quad \mathrm{B}_1 = \{\text{достали белый шар}\} \rightarrow \{\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{B}_1\} \quad = \left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было после 1 этапа:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right] \rightarrow \quad \mathrm{B}_2 = \{\text{достали черный шар}\} \rightarrow \{\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{B}_2\} \quad = \left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]$$

$$P(\mathrm{B}_1|A_3) = \frac{4}{12}$$

$$P(\mathrm{B}_2|A_3) = \frac{8}{12}$$

В целом оба этапа для второй урны можно представить в виде схемы:

$$\left\{\begin{array}{l}
\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right] \leftarrow \underbrace{\text{опыт }\textbf{1}}\text{ добавили 2 б.}\end{array}\right\} \rightarrow\rightarrow \left\{\underbrace{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]}_{\text{результат 1 этап}}\right.}_{\text{1 этап}} \quad \underbrace{\begin{array}{l}\rightarrow\rightarrow \text{взяли белый шар} = \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]\right.\\ \rightarrow\rightarrow \text{взяли черный шар} = \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{5\text{ белых}\quad+\quad 6\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]\right.\end{array}}_{\text{2 этап}}\\
\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right] \leftarrow \underbrace{\text{опыт }\textbf{1}}\text{ добавили 2 ч.}\end{array}\right\} \rightarrow\rightarrow \left\{\underbrace{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]}_{\text{результат 1 этап}}\right.}_{\text{1 этап}} \quad \underbrace{\begin{array}{l}\rightarrow\rightarrow \text{взяли белый шар} = \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{2\text{ белых}\quad+\quad 9\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]\right.\\ \rightarrow\rightarrow \text{взяли черный шар} = \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]\right.\end{array}}_{\text{2 этап}}\\
\underbrace{\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна было:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right] \leftarrow \underbrace{\text{опыт }\textbf{1}}\text{ добавили 1 б. +1ч}\end{array}\right\} \rightarrow\rightarrow \left\{\underbrace{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]}_{\text{результат 1 этап}}\right.}_{\text{1 этап}} \quad \underbrace{\begin{array}{l}\rightarrow\rightarrow \text{взяли белый шар} = \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{3\text{ белых}\quad+\quad 8\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]\right.\\ \rightarrow\rightarrow \text{взяли черный шар} = \left\{\left[\begin{array}{c}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ \underbrace{4\text{ белых}\quad+\quad 7\text{ черных}}\\ \text{шара}\end{array}\right]\right.\end{array}}_{\text{2 этап}}
\end{array}\right.$$

Запишем возможные значения случайной величины η – количество белых шаров в первой урне после проведения всех перекладываний: 2,3,4,5.

3 этап

1.1. Возможные значения случайной величины ξ – количество белых шаров в первой урне: 4,5,6,7.

Найдем соответствующие им вероятности.

1) Для того, чтобы случайная величина приняла значение 4 необходимо:

a) на первом этапе нужно взять из первой урны 2 белых шара, т.е. должно наступить событие:

$$\mathrm{A}_1 = \{\text{переложили два белых шара из 1 урны}\};$$

b) на втором этапе из второй урны нужно переложить в первую (добавить) 1 черный шар, т.е. должно наступить событие B_2.

c) только в случае наступления и A_1, и B_2, а это событие $\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{B}_2$, случайная величина $\xi = \{\text{количество белых шаров в 1 урне}\}$ примет значение 4.

Соответствующая вероятность значения случайной величины $\xi = 4$:

$$P(\xi = 4) = P(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{B}_2) = P(\mathrm{A}_1) \cdot P(\mathrm{B}_2|\mathrm{A}_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{70}{360};$$

использовали теорему умножения для зависимых событий: $P(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$.

2) Найдем соответствующие вероятности остальных значений случайной величины ξ:

$$P(\xi = 5) = P(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{B}_2) = P(\mathrm{A}_1) \cdot P(\mathrm{B}_1|\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_3) \cdot P(\mathrm{B}_2|\mathrm{A}_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{16}{30} \cdot \frac{8}{12} = \frac{178}{360}$$

Использовали теоремы сложения и умножения. Согласно теореме сложения для двух несовместных событий: $P(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(B)$ и теореме умножения для двух зависимых событий: $P(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(B\backslash A)$.

У нас: $\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{B}_1$ и $\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{B}_2 -$ несовместные события; A_1 и B_1, а также A_3 и $\mathrm{B}_2 -$ зависимые события.

Аналогично рассуждая, находим остальные вероятности.

$$P(\xi = 6) = P(\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{B}_1) == P(\mathrm{A}_2) \cdot P(\mathrm{B}_2|\mathrm{A}_2) + P(\mathrm{A}_3) \cdot P(\mathrm{B}_1|\mathrm{A}_3) == \frac{4}{30} \cdot \frac{9}{12} + \frac{16}{30} \cdot \frac{4}{12} = \frac{100}{360}$$

$$P(\xi = 7) = P(\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{B}_1) = P(\mathrm{A}_2) \cdot P(\mathrm{B}_1|\mathrm{A}_2) = \frac{4}{30} \cdot \frac{3}{12} = \frac{12}{360}$$

3) Проверим условие нормировки:

$$\sum p_i = \frac{70}{360} + \frac{178}{360} + \frac{100}{360} + \frac{12}{360} = 1 - \text{выполняется.}$$

2.1. Возможные значения случайной величины η – количество белых шаров во второй урне: 2,3,4,5.

Найдем соответствующие им вероятности.

1) Для того, чтобы случайная величина η приняла значение 2 необходимо наступление события $\{A_2 \cdot B_1\}$, т.е. вероятность значения случайной величины $\eta = 2$:

$$P(\eta = 2) = P(A_2 \cdot B_1) = P(A_2) \cdot P(B_1|A_2) = \frac{4}{30} \cdot \frac{3}{12} = \frac{12}{360}$$

2) Найдем вероятности остальных значений случайной величины η:

$$P(\eta = 3) = P(A_2 \cdot B_2 + A_3 \cdot B_1) = P(A_2) \cdot P(B_2|A_2) + P(A_3) \cdot P(B_1|A_3) = \frac{4}{30} \cdot \frac{9}{12} + \frac{16}{30} \cdot \frac{4}{12} = \frac{100}{360}$$

$$P(\eta = 4) = P(A_1 \cdot B_1 + A_3 \cdot B_2) == P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) + P(A_3) \cdot P(B_2|A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{16}{30} \cdot \frac{8}{12} = \frac{178}{360}$$

$$P(\eta = 5) = P(A_1 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

3) Проверим условие нормировки:

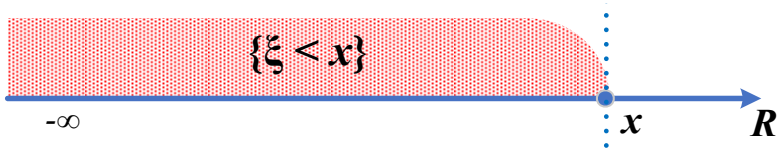
$$\sum p_i = \frac{12}{360} + \frac{100}{360} + \frac{178}{360} + \frac{70}{360} = 1$$

4 этап

На последнем этапе, построим функцию распределения случайной величины ξ. Для удобства вначале запишем ряд распределения ξ:

ξ_i	*4*	*5*	*6*	*7*
p_i	$\frac{70}{360}$	$\frac{178}{360}$	$\frac{100}{360}$	$\frac{12}{360}$

Согласно определению функции распределения: $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. т.е. это вероятность попасть случайной величине ξ строго левее какого то наперед заданного x, т.е. в интервал $(-\infty, x)$. Графически это выглядит так:



Наша заданная случайная величина имеет четыре значения, которые делят всю числовую ось на пять интервалов: $(-\infty; 4]; (4; 5]; (5; 6]; (6; 7]; (7; +\infty)$.

а) Если $x \leq 4$, то событие $\boldsymbol{\xi} < x$ невозможно, т.к. левее x нет ни одного значения случайной величины $\boldsymbol{\xi}$ и, значит, при таком x функция $F_{\xi}(x) = 0$.

б) Если $4 < x \leq 5$, То событие $\boldsymbol{\xi} < x$ возможно, если $\boldsymbol{\xi} = 4$; а вероятность такого события $P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = 4) = \frac{70}{360}$. Поэтому для таких значений $\boldsymbol{x}$: $F_{\xi}(x) = \frac{70}{360}$.

в) Если $5 < x \leq 6$, то неравенство $\boldsymbol{\xi} < x$ выполняется, в случае если: или $\boldsymbol{\xi} = 4$, или $\boldsymbol{\xi} = 5$, поэтому в данном случае $F_{\xi}(x) = P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = 4) + P(\boldsymbol{\xi} = 5) = \frac{70}{360} + \frac{178}{360} = \frac{248}{360}$;

При нахождении данной вероятности, использовали теорему о сумме двух несовместных событий, в силу того что события $\{\boldsymbol{\xi} = 4\}$ и $\{\boldsymbol{\xi} = 5\}$ несовместны (случайная величина не может одновременно принять и то, и другое значение).

г) Если $6 < x \leq 7$, в этом случае событие $\boldsymbol{\xi} < x$ является возможным, только если: $\boldsymbol{\xi} = 4$, или $\boldsymbol{\xi} = 5$, или $\boldsymbol{\xi} = 6$, поэтому значение функции распределения $F_{\xi}(x)$:

$F_{\xi}(x) = P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = 4) + P(\boldsymbol{\xi} = 5) + P(\boldsymbol{\xi} = 6) = \frac{70}{360} + \frac{178}{360} + \frac{100}{360} = \frac{348}{360}$.

д) Если $x > 7$, то очевидно, что событие $\boldsymbol{\xi} < x$ является ***достоверным***, т.е. наступает с вероятностью 1. При таком x все значения случайной величины $\boldsymbol{\xi}$ находятся в интервале $(-\infty, x)$. т.е. слева от x. Формально можем записать так:

$F_{\xi}(x) = P(\boldsymbol{\xi} < x) = P(\boldsymbol{\xi} = 4) + P(\boldsymbol{\xi} = 5) + P(\boldsymbol{\xi} = 6) + P(\boldsymbol{\xi} = 7) = \frac{70}{360} + \frac{178}{360} + \frac{100}{360} + \frac{12}{360} = \frac{360}{360} =$
$= 1$.

Таким образом мы получили следующую функцию распределения:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 \\ \frac{70}{360}; & 4 < x \leq 5 \\ \frac{248}{360}; & 5 < x \leq 6 \\ \frac{348}{360}; & 6 < x \leq 7 \\ 1; & x > 7 \end{cases}$$

Функцию распределения для случайной величины $\eta -$ можно получить, используя аналогичные рассуждения. Записать ее самостоятельно.

Пример 8.7. Производится три независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое целое число от 0 до 9. Построить ряд распределения суммы полученных чисел.

Решение:

1. Из условия нам известно, что в каждом из трех независимых опытов может быть получено с равной вероятностью любое целое число от 0 до 9. Введем три случайные величины: ξ_1, ξ_2, ξ_3. Множество возможных значений каждой из которых $\overline{0,9}$.

Запишем общий для всех ряд распределения:

ξ_1, ξ_2, ξ_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

2. Нам нужен ряд распределения суммы $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Вопрос: А какие будут суммы?

Ответ: Суммы могут быть от 0 до 27.

Например: $0+0+0=0$, $1+1+2=4$, $0+2+2=4$, $0+1+3=4$, $9+9+9=27$, и т.д.

Из примеров видно, что если суммы 0 и 27 можно получить только одним способом, то сумму 4 уже несколькими способами. И самый главный вопрос в этой задаче, каким числом способов можно получить каждую из сумм?

Известная задача о вероятности получить счастливый билет, рассматриваемая в 1 главе «Случайные события» помогает в ответе на этот вопрос. Она решается несколькими способами. Рассмотрим один из них.

3. Рассмотрим многочлен:

$$A_1(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$

Будем рассматривать коэффициенты при различных степенях x как число однозначных чисел, дающих в сумме $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Введем многочлен $A_2(x) = A_1(x) \cdot A_1(x)$.

В результате умножения многочлена $A_1(x)$ самого на себя получим, многочлен со старшей степенью 18. Коэффициенты при степенях x которого будут указывать каким числом способов можно получить из любых двух чисел от 0 до 9 сумму, соответствующую степени x.

$$A_2(x) = x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 9x^8 + 10x^9 + 9x^{10} + 8x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 5x^{14} + 4x^{15} + 3x^{16} + \\ + 2x^{17} + x^{18}$$

То есть из $2x^1$ имеем такую информацию: сумму 1, можем получить двумя способами. Очевидно это так: $0+1$ и $1+0$.

Из слагаемого $4x^3$ заключаем, что сумму 3, можем получить 4 способами. Действительно: $0+3,\ 3+0, 1+2,\ 2+1$.

И, наконец, введем многочлен $A_3(x) = A_1(x) \cdot A_1(x) \cdot A_1(x)$, который в развернутом виде имеет вид:

$$A_3(x) = x^0 + 3x^1 + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + 45x^8 + 55x^9 + 63x^{10} + 69x^{11} + 73x^{12} + 75x^{13} + \\ + 75x^{14} + 73x^{15} + 69x^{16} + 63x^{17} + 55x^{18} + 45x^{19} + 36x^{20} + 28x^{21} + 21x^{22} + 15x^{23} + 10x^{24} + 6x^{25} + 3x^{26} + x^{27}$$

Итак, мы имеем информацию каким числом способов мы можем получить суммы от 0 до 27 из трех чисел, значения которых могут быть от 0 до 9.

4. Запишем ряд распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. Для этого найдём вероятности ее значений.

Используем ***<u>классическое определение вероятностей</u>***. Найдем вначале общее число исходов. Рассуждаем так: в результате однократного проведения трех опытов мы всякий раз будем иметь тройку чисел. На каждой из позиций может быть число от 0 до 9. Т.е. 10 вариантов чисел. Используя комбинаторное правило умножения, получаем:

$$\underbrace{10}_{\text{вариантов}} \cdot \underbrace{10}_{\text{вариантов}} \cdot \underbrace{10}_{\text{вариантов}} = 1000$$

То есть всего вариантов троек чисел 1000 и это общее число исходов. Из них исходы, благоприятствующие различным суммам находятся из многочлена $A_3(x)$. Рассматривая отношение благоприятствующих исходов к общему числу исходов, находим вероятности соответствующих сумм значений случайной величины.

η_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p_i	$\frac{1}{1000}$	$\frac{3}{1000}$	$\frac{6}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{15}{1000}$	$\frac{21}{1000}$	$\frac{28}{1000}$	$\frac{36}{1000}$	$\frac{45}{1000}$	$\frac{55}{1000}$	$\frac{63}{1000}$	$\frac{69}{1000}$	$\frac{73}{1000}$	$\frac{75}{1000}$
η_i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
p_i	$\frac{75}{1000}$	$\frac{73}{1000}$	$\frac{69}{1000}$	$\frac{63}{1000}$	$\frac{55}{1000}$	$\frac{45}{1000}$	$\frac{36}{1000}$	$\frac{28}{1000}$	$\frac{21}{1000}$	$\frac{15}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{6}{1000}$	$\frac{3}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

Пример 8.8. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков баскетболиста, начинающего игру, если вероятность попадания для первого баскетболиста равна 0,4, а для второго – 0,6.

Решение:

Опыт: баскетболисты кидают мяч в кольцо по очереди, пока один не попадет.

Обозначим случайные величины ξ_1 – число бросков первого баскетболиста, а ξ_2 – число бросков второго баскетболиста.

Введем события:

$A_i = \{$ первый баскетболист попал при ***i -*** броске $\}$

$B_i = \{$ второй баскетболист попал при ***i -*** броске $\}$

Какие значения может принимать случайная величина ξ_1 в проводимом опыте?

1. $\xi_1 = 1$, в случае если наступит $A_1 = \{$ первый баскетболист попал при ***1 -*** броске $\}$ или если наступит событие $\overline{A_1} \cdot B_1$, т.е. первый не попал при первом броске, а второй попал при 1 броске. Вероятность этого события:

$$P\left(A_1 + \overline{A_1} \cdot B_1\right) = P\left(\xi = 1\right) = 0,4 + 0,6^2 = 0,76 .$$

2. $\xi_1 = 2$, в случае если наступит $\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot B_2$, т.е. первый баскетболист попал при ***2 -*** броске ***и*** второй не попал при первом броске, ***или*** первый не попал оба раза, а второй попал при втором броске. Вероятность этого события:

$$P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot B_2\right) = P\left(\xi = 2\right) = 0,4^2 \cdot 0,6 + 0,6^2 \cdot 0,6 = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,76 .$$

3. $\xi_1 = 3$, в случае если наступит $\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot B_3$, Вероятность этого события:

$$P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot B_3\right) = P\left(\xi = 3\right) = 0,4^3 \cdot 0,6^2 + 0,6^4 \cdot 0,4^2 = 0,4^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,76.$$

4. При $\xi_1 = 4$ наступает событие $\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{B_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{B_3} \cdot \overline{A_4} \cdot B_4$, вероятность которого:

$$P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{B_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{B_3} \cdot \overline{A_4} \cdot B_4\right) = P\left(\xi = 4\right) = 0,4^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,76$$

5. Продолжая подобные рассуждения, можем записать, что:

$$P\left(\xi = m\right) = 0,4^{m-1} \cdot 0,6^{m-1} \cdot 0,76$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_i p_i = 0,76 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,76 + 0,4^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,76 + 0,4^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,76 + ... + 0,4^{m-1} \cdot 0,6^{m-1} \cdot 0,76 =$$

$$= 0,76\left(1 + \underbrace{0,4 \cdot 0,6 + 0,4^2 \cdot 0,6^2 + 0,4^3 \cdot 0,6^3 + ...}_{S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{1 - 0,4 \cdot 0,6} = \frac{0,24}{0,76}}\right) = 0,76 \cdot 1 + 0,76 \cdot \frac{0,24}{0,76} = 1$$

Видим, что условие выполняется. Теперь можем записать ряд распределения для случайной величины ξ_1 – число бросков первого баскетболиста до первого попадания:

ξ_{1i}	1	2	3	4	……	m	…..
p_i	$0,76$	$0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,76$	$0,4^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,76$	$0,4^3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,76$	……	$0,4^{m-1} \cdot 0,6^{m-1} \cdot 0,76$	…..

Пример 8.9. Монету бросают 5 раз. Построить ряд распределения отношения числа появлений «герба» к числу появлений «решки».

Решение: Опыт заключается в том, что подбрасывают 5 раз монету.

В результате опыта всякий раз выпадает цепочка длиной пять: *ГТРГГ, РРРГГ, РГРГР*,… и т.д.

Обозначим $\xi-$ количество гербов, появившихся в цепочке, а $\eta-$ количество решек, появившихся в цепочке. Очевидно, что $\eta = 5-\xi$, т.е. ξ и η зависимые случайные величины. Обе величины могут принимать значения от 0 до 5.

Тогда значения отношения двух случайных величин, обозначим его ζ, будут такие:

$$\zeta = \frac{k}{5-k}, k = \overline{0,5}.$$

Теперь можем найти вероятности значений $\zeta-$отношения числа появлений «герба» к числу появлений «решки». Находим, используя схему Бернулли:

$$P\left\{\zeta = \frac{k}{5-k}\right\} = C_5^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{5-k}},\ k = \overline{0,5}.$$

Запишем ряд распределения случайной величины ζ:

ζ_i	0	1/4	2/3	3/2	4/1	∞
p_i	$C_5^0 \cdot \frac{1}{2^0} \cdot \frac{1}{2^5}$	$C_5^1 \cdot \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2^4}$	$C_5^2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^{5-2}}$	$C_5^3 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^{5-3}}$	$C_5^4 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^{5-4}}$	$C_5^5 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^0}$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_i p_i = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{5-k}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{5!}{k!(5-k)!} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{5-k}} = \{$$ используем Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ $\}$, у нас $\sum_{k=0}^{5} C_5^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{5-k}} = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \cdot \frac{1}{2^{5-k}} \cdot \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5 = 1$.

То есть условие нормировки выполняется.

Задачи по теме 8

8.1. В корзине 5 яблок и 20 груш. Опыт: берется один фрукт. Записать закон распределения случайной величины X – число вынутых из корзины груш.

8.2. Подбрасывается однократно кубик. Найти закон распределения случайной величины X – выпавшее число очков.

8.3. Покупатель посещает магазины для приобретения нужного товара. Вероятность того, что товар имеется в определенном магазине, составляет 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа магазинов, которые посетит покупатель из четырех возможных. Построить полигон распределения.

8.4. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

ξ	-1	0	1	3	4
p	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

а) построить многоугольник распределения; **б)** построить график функции распределения; **в)** найти вероятность того, что ξ примет значение, не превосходящее единицы по абсолютной величине.

8.5. Два стрелка делают по одному выстрелу каждый по своей мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна p_1, для второго – p_2. Случайные величины ξ_1, ξ_2 – число попаданий первого и второго стрелка соответственно. Построить ряд распределения разности $\xi_1 - \xi_2$.

8.6. Из двух орудий поочерёдно ведётся стрельба по мишени до первого попадания. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,3, для второго – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Построить ряды распределения дискретных случайных величин ξ и η – числа снарядов, выпущенных первым и вторым орудием соответственно.

8.7. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить ряд и многоугольник распределения числа светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки. Найти моду этого распределения.

8.8. Проверить условие нормировки для вероятностей $P\{\xi = k\}$, если случайная величина ξ имеет распределение Пуассона.

8.9. В системе, состоящей из шести равнонадежных занумерованных (1,2,3,4,5,6) приборов, отказал один какой-то прибор. Для его обнаружения и устранения неисправности приборы проверяются один за другим в порядке их нумерации. Построить закон распределения случайной величины X – номер отказавшего прибора.

8.10. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам М и Т, равны соответственно 0.7 и 0.9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

8.11. В связке из трех ключей только один подходит к двери. Ключи перебираются до тех пор, пока не отыщут подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины X – число опробованных ключей. Построить функцию распределения для данной дискретной случайной величины. Изобразить ее графически.

8.12. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0.515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Построить полигон распределения, построить функцию распределения и изобразить ее графически.

8.13. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0.4. Составить закон распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более 3; записать функцию распределения данной случайной величины; б) число вызовов неограниченно.

8.14. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу четырех приборов. Записать функцию распределения данной случайной величины.

8.15. Монета подброшена 3 раза. Найти распределение вероятностей для числа появлений герба.

8.16. Три стрелка с вероятностями попадания в цель при отдельном выстреле 0.7;0.8;0.9 соответственно делают по одному выстрелу. Найти распределение вероятностей для общего числа попаданий.

8.17. Вероятность того, что лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0.1. Покупатель купил 5 билетов. Найти распределение вероятностей для числа выигрышей у владельца этих 5 билетов.

8.18. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0.7 при одном выстреле. Он стреляет до первого попадания, но делает не более трех выстрелов. Найти распределение вероятностей для числа выстрелов. Построить полигон распределения, построить функцию распределения и изобразить ее графически.

8.19. Два станка выпускают деталь с вероятностями брака 0.01 и 0.05 соответственно. В выборке одна деталь выпущена первым станком и две – вторым станком. Найти закон распределения для числа бракованных деталей в выборке.

8.20. Прибор комплектуется из двух деталей, вероятность брака для первой – 0.1; для второй – 0.05. Выбрано 4 прибора. Прибор считается бракованным, если в нем есть хотя бы одна бракованная деталь. Построить закон распределения для числа бракованных приборов среди выбранных четырех.

8.21. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение определенного времени равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X-числа комбайнов, работающих безотказно. Записать функцию распределения и построить ее график.

8.22. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя.

8.23. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3 спортсменов. Составить закон распределения случайной величины X – числа мастеров спорта из отобранных спортсменов.

8.24. Стрелок производит выстрелы по цели до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X – число выстрелов, сделанных стрелком. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,7

8.25. Фирма выпустила 500 изделий. Вероятность того, что на гарантийных ремонт вернется определенное изделие, равна 0,001. Найти закон распределения случайной величины X – число изделий, которые принесли на гарантийный ремонт в определенный день.

8.26. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1000 знаков, равна 0.05. Найти закон распределения случайной величины X – число ошибок, которое было допущено при наборе, если ошибок не более 3.

Тема 9. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятностей непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина – это случайная величина, множество значений которой бесконечное несчетное множество, заполняющее непрерывно некоторый интервал числовой оси. ***Другими словами***, это случайная величина, множество возможных значений которой имеет мощность континуума.

Понятие непрерывной случайной величины часто возникает на практике при измерениях.

Например:

ξ_1 – время, которое проработает купленный холодильник;

ξ_2 – рост или вес случайно выбранного человека;

ξ_3 – скорость молекулы газа в произвольный момент времени.

Для описания непрерывных случайных величин используют следующие способы:

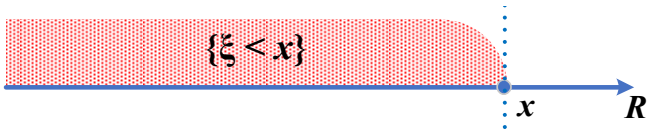
1. Функция распределения.
2. Функция плотности распределения вероятностей.

Функция распределения

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция вида: $F_\xi(x) = P(\xi < x)$

Функцию $F_\xi(x)$ называют также ***интегральной функцией*** распределения.

Как указывалось ранее, геометрически равенство $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ можно истолковать так: функция $F_\xi(x)$ есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, которое на числовой оси лежит левее точки x, т.е. случайная точка ξ попадет в заштрихованный на рисунке ниже красным интервал $(-\infty, x)$.



Определение 1: Случайную величину ξ называют ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме быть может отдельных точек.

Свойства функции распределения непрерывных случайных величин

1. $F_\xi(x)$ – неубывающая непрерывная функция;
2. $0 \le F_\xi(x) \le 1$;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$;
4. $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

Можно встретить и такое эквивалентное первому определение непрерывной случайной величины.

Определение 2: Случайная величина ξ называется ***непрерывно распределенной***, если ее функция распределения допускает представление в виде: $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt$.

Подынтегральная функция $p_\xi(t)$ называется ***плотностью распределения вероятности*** случайной величины ξ.

Рассмотрим подробнее эту функцию.

Плотность распределения

Удобным способом задания непрерывной случайной величины (помимо функции распределения) является ***плотность распределения вероятностей***.

Пусть ξ непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ называется функция:

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = F'_\xi(x)$$

Функцию $p_\xi(x)$ – также называют ***дифференциальной функцией*** распределения.

Выясним вероятностный смысл плотности. По определению производной можем расписать:

$$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x \le \xi \le x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Отношение $\frac{P\left(x \le \xi \le x+\Delta x\right)}{\Delta x}$ можно трактовать как количество вероятности, приходящееся на единицу длины промежутка Δx, или среднюю плотность распределения вероятности.

А в пределе при $\Delta x \to 0$, как плотность распределения вероятности.

Используя известную теорему математического анализа, можем из $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(x \le \xi \le x+\Delta x\right)}{\Delta x} = p_{\xi}(x),$ записать:

$$\frac{P\left(x \le \xi \le x+\Delta x\right)}{\Delta x} = p_{\xi}(x) + \beta(x),$$ где $\beta(x)$ – бесконечно малая функция.

Откуда

$P\left(x \le \xi \le x+\Delta x\right) \approx \; p(x)\cdot\Delta x,$ где $p(x)\cdot\Delta x -$ называется «***элементом вероятности***», эта величина приближенно выражает вероятность попадания случайной величины ξ в элементарный отрезок Δx, примыкающий к точке x.

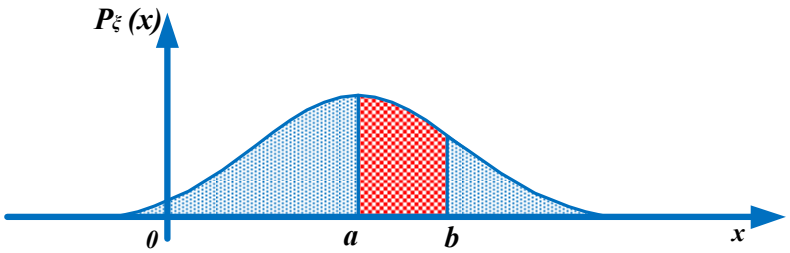
Замечание: Если представить, что вероятность – это какая-то «масса», а значения случайной величины «размазаны» по вещественной прямой, то график плотности показывает нам толщину получившегося «бутерброда».

Свойства функции плотности распределения вероятностей

1. $p_{\xi}(x) \ge 0 -$ функция неотрицательна, т.е. график функции лежит выше оси Ox.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)\,dx = 1$, т.е. функция плотности нормирована.

3. $P\left(a \le \xi < b\right) = \int\limits_{a}^{b} p_{\xi}(t)\,dt -$ вероятность попадания случайной величины ξ в любой промежуток с концами a и b равна той части площади под графиком плотности вероятностей, которая приходится на данный промежуток.



Примеры решения задач по теме 9

Пример 9.1. Найти функцию распределения случайной величины ξ, если её плотность вероятности $p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \lambda>0, x\ge 0\\ 0 \qquad\quad , x<0\end{cases}$. Построить графики функции распределения и плотности вероятностей.

Решение: Случайная величина, имеющая плотность вида:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \lambda>0, x\ge 0\\ 0 \qquad\quad , x<0\end{cases}.$$

называется ***экспоненциально распределенной*** случайной величиной.

Найдем ее функцию распределения, используя определение: $F(x)=P(\xi<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du$.

1. Пусть $x<0$, тогда $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du=\int\limits_{-\infty}^{x}\{\ p_\xi(u)=0\ \}du=0-$ так как берется интеграл от функции, тождественно равной нулю.

2. Пусть $x\ge 0$, тогда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du=\int\limits_{-\infty}^{0} p_\xi(u)du+\int\limits_{0}^{x} p_\xi(u)du=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,du+\int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda u}\,du=$$

$$=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda u}\,d\left(-\lambda u\right)=-e^{-\lambda u}\Big|_0^x=-e^{-\lambda x}+1=1-e^{-\lambda x}$$

3. Мы получили выражение для функции распределения экспоненциально распределённой случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

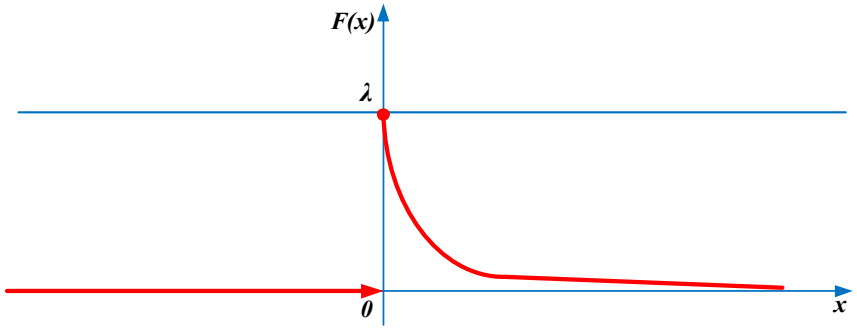
4. Для функции распределения любой случайной величины должно выполняться: $0\le F(x)\le 1$. Для полученной нами функции это справедливо: при $x<0,\ F(x)=0$ и при $x\ge 0,\ \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\lambda e^{-\lambda x}\right)=1$.

5. Построим графики обеих функций. Вначале для функции плотности:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \lambda>0\end{cases}$$

Слева от нуля функция тождественно равна нулю. В нуле при $x=0,\ p_{\xi}(x)=\lambda$. Справа от нуля при $x\to+\infty\ \lim\limits_{x\to+\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda x}=0$, т.е. $p_{\xi}(x)=0-$ правосторонняя горизонтальная асимптота для данной функции. Так как $\lim\limits_{x\to0+}p_{\xi}(x)=p_{\xi}(0)=\lambda\neq\lim\limits_{x\to0-}p_{\xi}(x)=0$, то функция непрерывна справа от нуля, и в точке $x=0$ терпит разрыв 1 рода неустранимый, с величиной скачка равной: $\lim\limits_{x\to0+}p_{\xi}(x)-\lim\limits_{x\to0-}p_{\xi}(x)=\lambda$.

По знаку первой производной $p_{\xi}^{'}(x)=-\lambda^2e^{-\lambda x}<0$ для $\forall x$, заключаем, что функция монотонно убывает на интервале $[0,+\infty)$. Вторая производная $p_{\xi}^{''}(x)=\lambda^3e^{-\lambda x}>0$ для $\forall x$, т.е. функция вогнута на интервале $[0,+\infty)$. По имеющимся данным можем построить эскиз графика плотности вероятности случайной величины ξ:

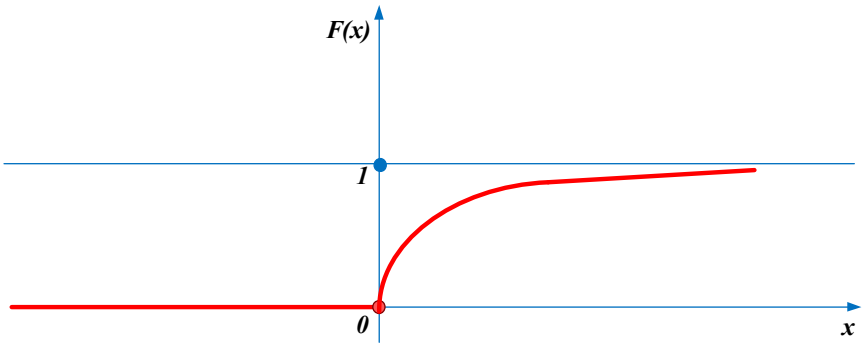


6. Построим график функции распределения, предварительно исследовав ее. Некоторую нужную информацию мы получили ранее, а именно: $x<0,\ F(x)=0$ и при $x\geq0,\ \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\lambda e^{-\lambda x}\right)=1$. Т.е. $F(x)=1-$ горизонтальная асимптота для исследуемой функции. Рассмотрим поведение функции в окрестности нуля: $\lim\limits_{x\to0-}\left(1-\lambda e^{-\lambda x}\right)=\lim\limits_{x\to0+}\left(1-\lambda e^{-\lambda x}\right)=F(0)=1$, выполняется условие непрерывности для нашей функции в точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to0-}F(x)=\lim\limits_{x\to0+}F(x)=F(0)=1$.

Первая производная $F^{'}(x)=\left(1-\lambda e^{-\lambda x}\right)^{'}=\lambda^2e^{-\lambda x}>0,\forall x$, т.е. функция монотонно возрастающая.

Замечание: Функций распределения любой случайной величины должна быть неубывающей.

Вторая производная $F^{''}(x)=\left(\lambda^2e^{-\lambda x}\right)^{'}=-\lambda^3e^{-\lambda x}<0,\forall x$, т.е. функция является выпуклой на интервале $[0,+\infty)$. Все готово для построения эскиза графика функции распределения экспоненциально распределенной случайной величины:



Пример 9.2. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: **а)** плотность вероятности случайной величины ξ; **б)** вероятность попадания значения случайной величины в интервал $(1;2,5)$.

Решение:

1. Найдем плотность вероятностей случайной величины ξ по определению, продифференцировав ее функцию распределения:

$$p_\xi(x)=F'_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<2,\ x>3\\ 2(x-2), & 2\le x\le 3\end{cases}.$$

2. Найдем вероятность попадания значения случайной величины в интервал $(1;2,5)$. Данную вероятность мы можем найти, используя функцию плотности. Предварительно обращая внимание, что интегрировать нужно в пределах от 2 до 2,5, так как при $x<2$ значение плотности $p_\xi(x)=0$ и если этого не учесть, то можно после интегрирования «прихватить лишнюю» вероятность. Итак:

$$P(2\le\xi<2,5)=\int_2^{2,5}p_\xi(x)\,dx=\int_2^{2,5}2(x-2)\,dx=2\int_2^{2,5}(x-2)\,dx=2\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_2^{2,5}=0,25$$

Также искомую вероятность мы можем оценить, используя функцию распределения случайной величины: $F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

По свойству функции распределения: $P\left(2 \le \xi < 2,5\right) = F(2,5) - F(2) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 - 0 = 0,25$

Замечание: Для непрерывных случайных величин выполняется:

$$P\left(x_1 \le \xi < x_2\right) = P\left(x_1 < \xi \le x_2\right) = P\left(x_1 \le \xi \le x_2\right) = P\left(x_1 < \xi < x_2\right)$$

Пример 9.3. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид $F\left(x\right) = A + B \cdot arctgx, \;\; -\infty < x < \infty$, (распределение Коши).

Найти: **а)** постоянные A и B; **б)** плотность вероятности случайной величины ξ; **в)** построить график плотности вероятности.

Решение:

1. Найдем вначале плотность вероятности случайной величины ξ, для чего продифференцируем функцию распределения $F\left(x\right) = A + B \cdot arctgx, \;\; -\infty < x < \infty$.

$$p_\xi(x) = F'(x) = \left(A + B \cdot arctgx\right)'_x = \frac{B}{1+x^2}$$

В полученном выражении присутствует один неизвестный коэффициент B. Одним из вариантов найти неизвестные коэффициенты, является вариант использования условия нормировки. И в нашем случае, и в общем виде оно выглядит так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$$

То есть непрерывно просуммировав все «элементы вероятности» $p_\xi(x)\,dx$ на интервале $\left(-\infty, \infty\right)$ мы должны получить единицу. Итак, подставляя полученную плотность, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{1+x^2}\,dx = 1$$

Это несобственный интеграл 1 рода, который легко находится:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{1+x^2}\,dx = B \cdot \lim_{s\to+\infty} \int\limits_{-s}^{s} \frac{1}{1+x^2}\,dx = B \cdot \lim_{s\to+\infty} arctg\, x\Big|_{-s}^{s} = B \cdot \left(\lim_{s\to+\infty}\left[arctg\, s - arctg\,(-s)\right]\right) =$$

$$= B \cdot \left(\lim_{s\to+\infty}\left[arctg\, s + arctg\, s\right]\right) = 2B \cdot \left(\lim_{s\to+\infty} arctg\, s\right) = 2B \cdot \frac{\pi}{2} = B \cdot \pi = 1$$

Откуда получаем коэффициент $B=\frac{1}{\pi}$.

Теперь мы можем записать выражение для ***<u>функции плотности</u>*** случайной величины ξ:

$$p_{\xi}(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ -\infty<x<\infty$$

2. Для того, чтобы записать точное выражение для функции распределения случайной величины ξ, нам необходимо найти коэффициент A и подставить его в

$$F\left(x\right)=A+B\cdot arctgx=A+\frac{1}{\pi}\cdot arctgx\,.$$

Найдем данный коэффициент, используя свойство функции распределения: $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,

Для нашей функции:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(A+\frac{1}{\pi}\cdot arctgx\right)=A+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=A+\frac{1}{2}=1\text{, откуда }A=\frac{1}{2}.$$

Мы могли использовать и другое свойство функции распределения: $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, результат был бы аналогичным:

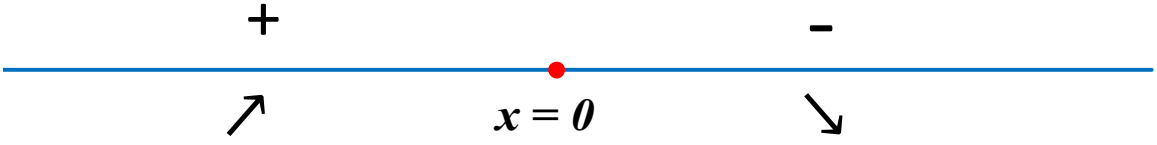
$$\lim_{x\to-\infty}\left(A+\frac{1}{\pi}\cdot arctgx\right)=A-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=A-\frac{1}{2}=0\text{, откуда }A=\frac{1}{2}.$$

Окончательно ***<u>функция распределения</u>*** случайной величины ξ имеет вид:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot arctgx,\quad -\infty<x<\infty$$

3. Построим график плотности вероятности случайной величины ξ. Для чего исследуем данную функцию. При $x=0$, соответствующее значение функции $p_{\xi}(0)=\frac{1}{\pi}$. Очевидно, что данная функция $p_{\xi}(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ -\infty<x<\infty$ четная. Следовательно ее график будет симметричен относительно оси $Op(x)$. Производная функции: $p'(x)=-\frac{1}{\pi}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

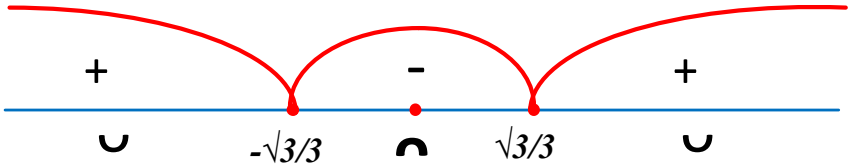
Критическая точка 1 рода, в которой производная обращается в ноль: $x=0$.



То есть на интервале $(-\infty,0]$ – функция возрастает, а на $(0,\infty)$ – убывает. При $x=0$ – функция достигает своего максимума.

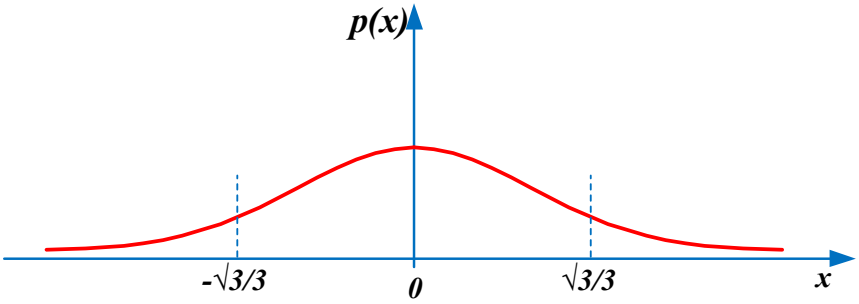
Поищем асимптоты. Уравнение асимптоты может быть записано в общем виде так: $p(x)=kx+b$, где k – угловой коэффициент находится так: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{p(x)}{x}$, а константа b: $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(p(x)-kx\right)$. У нас: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\pi x\left(1+x^2\right)}=0$ – и наклонных асимптот нет. Но $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(p(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}p(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}=0$, поэтому $p(x)=0$ – горизонтальная асимптота для функции плотности.

Не сложно найти вторую производную: $p''(x)=\left(-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)'=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{(3x^2-1)}{\left(1+x^2\right)^3}$, откуда получаем значение критических точек 2 рода, где вторая производная обращается в ноль: $3x^2-1=0$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Из схемы видно, что на интервалах $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ и $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ – функция вогнута, а на интервале $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ – выпукла.

Можем построить эскиз графика функции плотности:



Пример 9.4. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

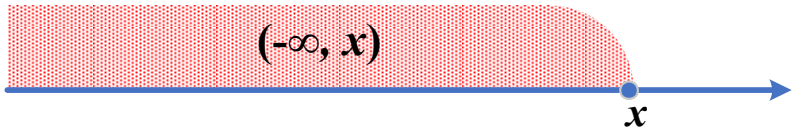
$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения и построить ее график; **б)** найти моду и медиану распределения.

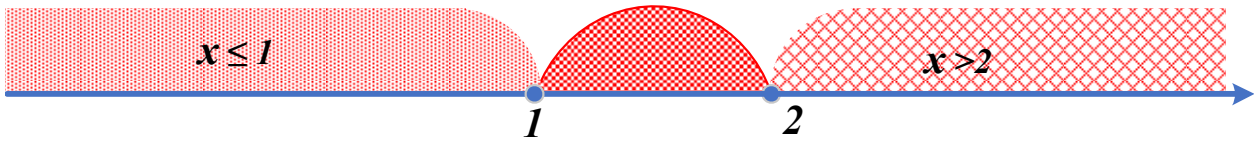
Решение:

1. По определению $F(x)=P(\xi<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_{\xi}(u)du$.

Замечание: Ранее указывалось, что $P(\xi<x)$, является вероятностью попадания случайной величины ξ слева от какого-то наперед заданного «барьерного» значения x, т.е. в выделенный красным интервал $(-\infty,x)$:

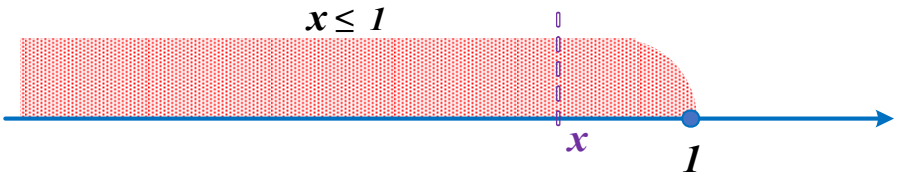


В нашем примере значения функции плотности на трех разных интервалах действительной прямой разные:



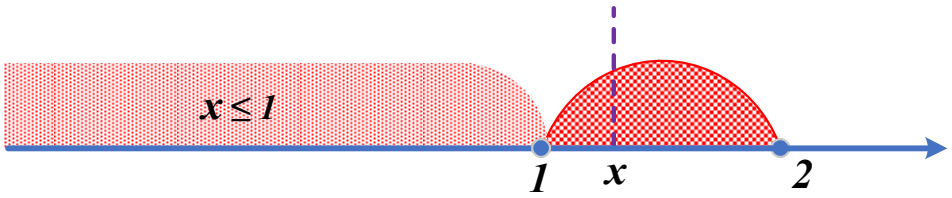
Логично, что наш «барьерный» x будет как-то связан с выделенными интервалами. Будем поочередно «запускать» его в каждый из интервалов.

Пусть $x\le 1$, т.е. «барьер» x, относительно которого мы оцениваем вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(-\infty,x)$, может находится в любом месте на интервале $(-\infty,1]$:



Очевидно, что интеграл до любого такого $x \le 1$, будет всегда равен нулю $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{x} \{\ p_\xi(u) = 0\ \}\,du = 0$ – так как при таких значениях x функция плотности тождественно равна 0, т.е. оказаться слева от таких «иксов» случайная величина никак не может.

Как только мы сдвигаем свой барьер вправо за значение $x = 1$ и попадаем в интервал $1 < x \le 2$:

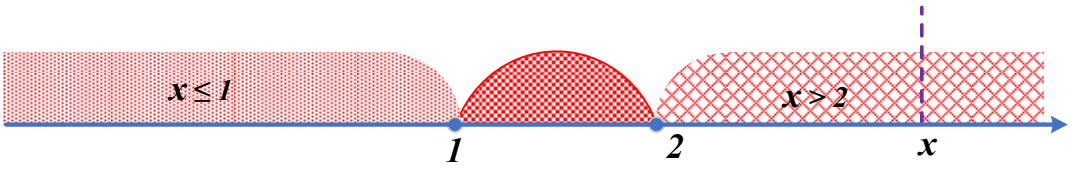


Наш интеграл и соответственно функция распределения на этом участке приобретает вид:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} p_\xi(u)\,du + \int\limits_{1}^{x} p_\xi(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,du + \int\limits_{1}^{x}\left(u - \frac{1}{2}\right)du = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2}\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

Выбирая произвольные значения x на интервале $(1,2]$, мы будем получать соответствующую вероятность оказаться левее любого зафиксированного нами x. Например: при $x = 3/2$, вероятность того, что случайная величина ξ окажется слева от такого x равна: $F(x) = P(\xi < x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Продвинем дальше вправо свой «барьер», пусть $x > 2$,



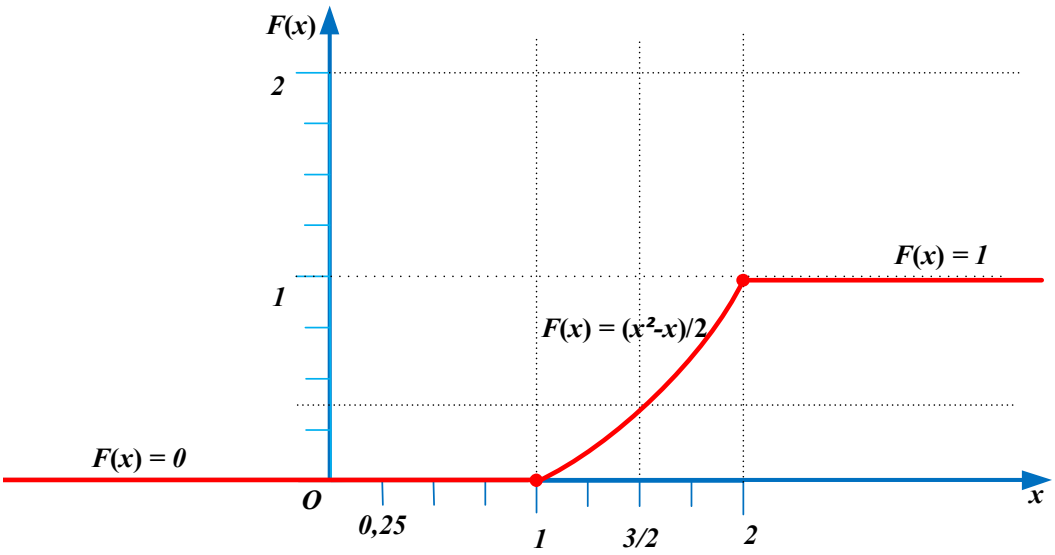
Тогда вероятность того, что случайная величина ξ, попадет в интервал $(-\infty, x)$, т.е. слева от любого «барьерного» x из промежутка $(2, +\infty)$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} p_\xi(u)\,du + \int\limits_{1}^{2} p_\xi(u)\,du + \int\limits_{2}^{x} p_\xi(u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,du + \int\limits_{1}^{2}\left(u - \frac{1}{2}\right)du + \int\limits_{2}^{x}\{p_\xi(u) = 0\} =$$

$$= \int\limits_{1}^{2}\left(u - \frac{1}{2}\right)du = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Таким образом можем записать окончательный вид функции распределения исследуемой случайной величины и построить ее график:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$



2. Найдем моду и медиану распределения.

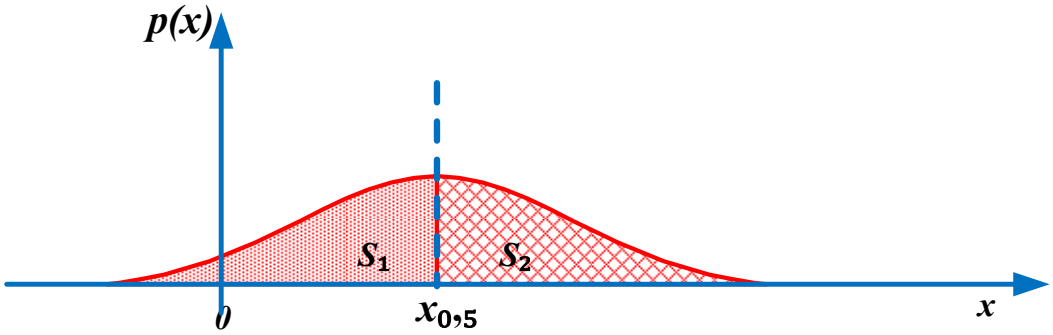
Мода непрерывной случайной величины, это абсцисса точки максимума функции плотности:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1, x>2\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$$

Можно сразу заметить, что график функции плотности, на интервале $1<x\le 2$, где она отличается от нуля, представляет собой возрастающую прямую. Поэтому очевидно, что максимума функция достигнет на конце интервала $1<x\le 2$ при $x=2$, т.е. ***<u>мода случайной величины</u>*** ξ: $Mo(\xi)=2$.

Найдем медиану. В лекционном курсе квантиль порядка p определяется так: $F_\xi(x_p)=P(\xi<x_p)=p$. Медиана случайной величины, это квантиль порядка $p=1/2$, т.е. число определяемое: $P(\xi<x_{0,5})=1/2$. Обозначив $x_{0,5}=Me\xi$, можем записать:

$P(\xi < M e\xi) = P(\xi > M e\xi) = 1/2$. Геометрически медиана, это такое значение $x_{0,5}$, проведя через которое прямую, параллельную оси $Op(x)$ мы разделим площадь под кривой плотности на 2 равные части. Например, это может выглядеть так:



Вероятность оказаться случайной величине слева или справа от медианы $x_{0,5}$, абсолютно одинаковая равная $1/2$. Площади S_1 и S_2 равны.

Очевидно, что медиана может находиться только на интервале $1 < x \le 2$. Поэтому подставив значение $x_{0,5}$ в выражение $F_\xi(x) = \frac{x^2 - x}{2}$ получаем: $F_\xi(x_p) = \frac{x_p{}^2 - x_p}{2} = \frac{1}{2}$, решив несложное квадратное уравнение $x_p{}^2 - x_p - 1 = 0$, получаем $x_{p(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, поскольку $x_p = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, а мы знаем, что наше значение медианы лежит в интервале $1 < x_p \le 2$, то выбираем ***значение моды случайной величины*** ξ: $x_p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = M e\xi$.

Пример 9.5. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$p_\xi(x) = Ax^2 e^{-\lambda x},\ \lambda > 0,\ x \ge 0.$$

Найти: **а)** коэффициент A; **б)** определить вероятность того, что ξ попадёт в интервал $(0, 1/\lambda)$; **в)** медиану распределения случайной величины ξ.

Решение:

1. Найдем коэффициент A используя условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$. Так как для нашей случайной величины плотность определена при $x \ge 0$, то условие нормировки в нашем случае:

$\int_0^\infty p_\xi(x)\,dx = 1$. Найдем данный несобственный интеграл, используя метод интегрирования по частям, учитывая сразу, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\lambda x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = 0$ и аналогично $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$:

$$\int_0^\infty Ax^2 e^{-\lambda x}\,dx = A\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx, \\ dv = e^{-\lambda x}dx, v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = A\left\{-\frac{x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx\right\} =$$

$$= A\left\{\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx\right\} = \begin{bmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = e^{-\lambda x}dx, v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{bmatrix} = A\left\{-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx\right\} = A\left\{-\frac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty\right\} = \frac{2A}{\lambda^3} = 1$$

Откуда коэффициент $A = \frac{\lambda^3}{2}$. То есть наша плотность вероятности выглядит так:

$$p_\xi(x) = \frac{\lambda^3}{2}x^2 e^{-\lambda x},\ \lambda > 0,\ x \ge 0$$

Плотность случайной величины**,** имеющей ***гамма распределение*** имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\ \lambda > 0,\ x \ge 0 \\ 0, \qquad x \le 0 \end{cases}$$

Сравнив с полученной плотностью, понимаем, что у нас $\alpha = 3$, и т.к. $\Gamma(3) = 2$ (по свойству гамма функции:

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(2+1) = 2\Gamma(2)$, $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1\cdot 0! = 1$.) заключаем, что наша случайная величина, имеет ***гамма распределение***. Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма распределения.

2. Найдем $P\left\{\xi \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)\right\}$. Для чего нужно найти следующий интеграл от функции плотности:

$$\int_0^{1/\lambda} \frac{\lambda^3}{2}x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{1/\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^3}{2}\left(\frac{2}{\lambda^3} - \frac{5}{\lambda^3 e}\right) = 1 - \frac{5}{2e}.$$

3. Найдем медиану распределения. В предыдущем примере подробно обсуждалось, что медиана это такое значение $x_{0,5}$, что вероятность $\{\xi < x_{0,5}\}$ равна 0,5, то есть слева от медианы случайная величина окажется с вероятностью 0,5 (равно как и справа!). Поэтому для нахождения медианы, необходимо найти решение уравнения $(*)$, где $x_{0,5}$ – неизвестное значение:

$$\int_0^{x_{0,5}} \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{x_{0,5}} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

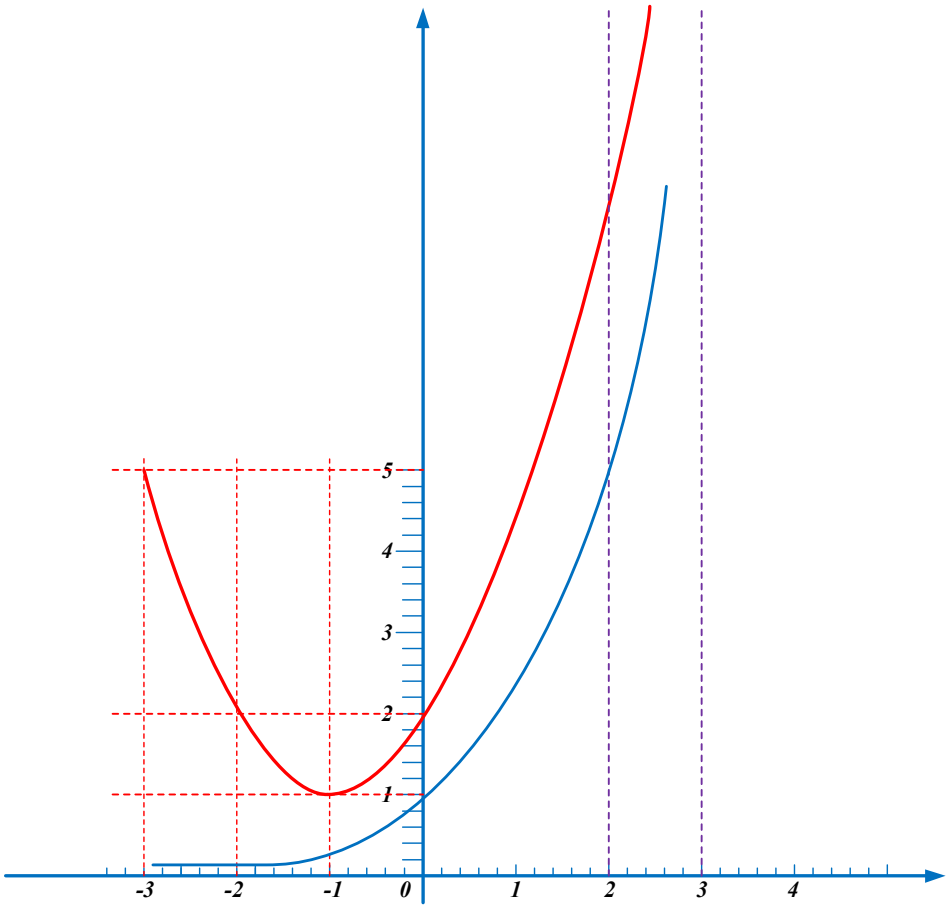
Откуда:

$$\frac{\lambda^3}{2}\left(-\frac{1}{\lambda}\left(x_{0,5}\right)^2 - \frac{2}{\lambda^2} x_{0,5} - \frac{2}{\lambda^3}\right) e^{-\lambda \cdot x_{0,5}} + 1 = 0,5$$

Или окончательно:

$$\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(x_{0,5}\right)^2 + \lambda x_{0,5} + 1\right) e^{-\lambda \cdot x_{0,5}} = 0,5\,.$$

Если обозначить $\lambda x_{0,5} = t$, и привести к общему знаменателю, наше уравнение примет вид: $\left(t^2 + 2t + 2\right)e^{-t} = 1$ или $\left(t^2 + 2t + 2\right) = e^t$. Получили трансцендентное уравнение и нам необходимо найти такое значение t, при котором значения обеих функций будет равно. Решить уравнение возможно различными способами. Можно использовать например ***MATHLAB***, ***MATHCAD*** и т.д.. Мы не будем подробно останавливаться на решении, которое нужно попробовать найти самим. Приведем лишь ответ. Графическое изображение обеих функций дает нам основание предположить, что решение лежит в интервале $(2,3)$.



С использованием ***MATHLAB*** получено такое решение: $t \approx 2{,}67406$. То есть $\lambda x_{0,5} \approx 2{,}67406$, откуда $x_{0,5} \approx \dfrac{2{,}67406}{\lambda}$.

Пример 9.6. Абсолютно непрерывная случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le A \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x} - 1, A < x \le B \\ 1, x > B \end{cases}$$

Найти: **а)** значения постоянных A и B; **б)** плотность распределения $p_\xi(x)$; **в)** $P\{\xi \in (3,5)\}$.

Решение:

1. Для того чтобы найти значения постоянных A и B достаточно обратить внимание на то, что наша случайная величина является ***абсолютно непрерывной***, а следовательно ее функция распределения является всюду непрерывной функцией, т.е. она непрерывна в ***каждой точке*** своей области определения.

Для непрерывности произвольной функции в точке x_0 должно выполняться равенство:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = F(x_0).$$

Из условия нам известно, что значение функции $F_\xi(x)$ в точке A равно нулю: $F_\xi(A) = 0$ и предел функции слева от A также равен нулю $\lim\limits_{x \to A-0} F(x) = 0$. Легко найти предел справа от A:

$$\lim_{x \to A+0} F_\xi(x) = \lim_{x \to A+0} \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{A} - 1.$$

Тогда в силу непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$ в точке $x_0 = A$ можем записать:

$$\lim_{x \to A+0} \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{A} - 1 = 0.$$

Откуда $A = 4$.

Аналогично рассуждая, можем найти значение постоянной B: $F_\xi(B) = 1$, $\lim\limits_{x \to B+0} F_\xi(x) = 1$, тогда предел слева $\lim\limits_{x \to B-0} F_\xi(x) = \lim\limits_{x \to B-0} \dfrac{1}{2}\sqrt{x} - 1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{B} - 1 = 1$, откуда $B = 16$. И, наконец, можем записать выражение для функции распределения случайной величины ξ:

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le 4\\ \frac{1}{2}\sqrt{x}-1; & 4<x\le 16\\ 1; & x>16\end{cases}$$

2. Найдем плотность распределения случайной величины $p_\xi(x)$, продифференцировав функцию распределения:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{x}}, & 4<x\le 16\\ 0, & x\le 4, x>16\end{cases}$$

3. И, наконец, оценим вероятность попадания случайной величины ξ в открытый интервал:

$$P\{\xi\in(2,8)\}=\int_2^4 p_\xi(x)dx+\int_4^8 p_\xi(x)dx=\int_2^4 0\,dx+\int_4^8\frac{1}{4\sqrt{x}}dx=\frac{1}{4}\int_4^8\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{x}\Big|_4^8=\sqrt{2}-1.$$

Пример 9.7. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<-\pi\\ a(\cos x+c), -\pi\le x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$$

Найти: **а)** значения постоянных a и c; **б)** плотность распределения $p_\xi(x)$; в) $P\left\{\xi\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}$ и $P\left\{\xi=\frac{\pi}{2008}\right\}$.

Решение:

1. Найдем вначале плотность вероятности случайной величины ξ, для чего продифференцируем функцию распределения $F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<-\pi\\ a(\cos x+c), -\pi\le x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$.

Элементарное дифференцирование приводит к результату:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, x<-\pi, x>0\\ -a\sin x, -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

В полученном выражении присутствует один неизвестный коэффициент a. Для его определения используем условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx=1$.

Для нашей случайной величины оно выглядит так:

$$\int_{-\pi}^{0} p_{\xi}(x)\,dx = 1$$

Тогда $\int_{-\pi}^{0} -a\sin x\,dx = -a\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx = -a\cdot(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} = a\left[\cos 0 - \cos\pi\right] = 2a = 1,\ \ a = 1/2$.

2. Для того, чтобы найти неизвестный коэффициент c в выражении функции распределения, используем непрерывность функции распределения $F_{\xi}(x)$. в каждой точке интервала $[-\pi,0]$.

Произвольная функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0 если выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = \lim_{x\to x_0+0} F(x) = F(x_0) \qquad (*)$$

Функция распределения $F_{\xi}(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, которая принадлежит интервалу $[-\pi,0]$, поэтому можем записать:

$$\lim_{x\to 0-} F_{\xi}(x) = \lim_{x\to 0+} F_{\xi}(x) = F_{\xi}(0).$$

Найдем значения односторонних пределов и значение функции в точке $x_0 = 0$:

предел слева: $\lim_{x\to 0-} F_{\xi}(x) = \lim_{x\to 0-}\{a(\cos x + c)\} = a(1+c),$

предел справа: $\lim_{x\to 0+} F_{\xi}(x) = 1,$

значение функции в точке: $x_0 = 0\ \ F_{\xi}(0) = \{a(\cos 0 + c)\} = a(1+c)$.

Подставив найденные значения в равенство $(*)$, получаем $a(1+c) = 1$. Ранее было определено, что $a = 1/2$, поэтому окончательно можем записать $1 + c = 2,\ c = 1$.

Замечание: Для нахождения коэффициента c мы могли использовать и непрерывность функции в точке $x_0 = -\pi$.

В этом случае предел слева: $\lim_{x\to -\pi-0} F_{\xi}(x) = 0,$ предел справа: $\lim_{x\to -\pi+0} F_{\xi}(x) = \lim_{x\to -\pi+0} a(\cos x + c) = a(-1+c)$, а значение функции в точке $x_0 = -\pi$: $F_{\xi}(-\pi) = \{a(\cos(-\pi) + c)\} = a(-1+c)$. Откуда $a(-1+c) = 0$ и $c = 1$. Получили аналогичный результат.

Таким образом можем переписать функцию распределения и плотность распределения вероятности с учетом найденных значений неизвестных коэффициентов:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x<-\pi\\ \frac{1}{2}(\cos x+1), -\pi\le x\le 0\\ 1, x>0\end{cases};$$

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x<-\pi,\ x>0\\ (-1/2)\cdot\sin x, -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

3. И в заключении найдем указанные вероятности $P\left\{\xi\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}$ и $P\left\{\xi=\frac{\pi}{2008}\right\}$.

Из лекционного курса известно, что для любой непрерывной случайной величины вероятность принять одно отдельно взятое значение равно нулю, поэтому можем сразу записать: $P\left\{\xi=\frac{\pi}{2008}\right\}=0$. Мы можем оценить только попадание случайной величины в заданный интервал.

Замечание 1. Для математиков будет понятно такое объяснение факту, что вероятность отдельно взятого значение равна нулю. Из курса функционального анализа известно, что мера Лебега одноточечного множества равна нулю.

Замечание 2. Для физиков понятнее так: известно, что геометрическая точка не имеет размера, а состоящий из точек интервал имеет отличную от нуля длину.

Несмотря на то, что отдельно взятое значение имеет вероятность ноль, оно не является невозможным значением.

Таким образом запоминаем, что только интервалы значений имеют ненулевую вероятность.

Вероятность $P\left\{\xi\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}$ можем найти, используя и функцию распределения вероятности, и плотность распределения вероятности случайной величины ξ.

Так как $P\{a\le\xi\le b\}=F(b)-F(a)$, то

$$P\left\{\xi\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1\right\}=\frac{1}{4}.$$

Или с использованием функции плотности можем получить аналогичный результат:

$$P\left\{\xi\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}=\int_{-\pi/3}^{0}(-1/2)\cdot\sin x\,dx+\int_{0}^{\pi/2}0\,dx=\frac{1}{2}\cos x\Big|_{-\pi/3}^{0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 9.8. Проекция ξ радиус-вектора случайной точки окружности радиуса r на диаметр имеет следующую функцию распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -r\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r}, & -r<x<r\\ 1, & x\ge r\end{cases}\text{ (закон арксинуса).}$$

Найти: **а)** плотность вероятности случайной величины ξ; **б)** вероятность того, что ξ окажется в интервале $\left(-\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$; **в)** квантиль $x_{0,75}$.

Решение:

1. Функция распределения заданной случайной величины ξ является непрерывной функцией в каждой точке области определения, это очевидно во всех точках, кроме $x_1=-r$ и $x_2=r$. Проверим непрерывность в указанных точках. По определению непрерывности функции в точке должно выполняться: $\lim\limits_{x\to -r-0}F_\xi(x)=\lim\limits_{x\to -r+0}F_\xi(x)=F_\xi(-r)$ и $\lim\limits_{x\to r-0}F_\xi(x)=\lim\limits_{x\to r+0}F_\xi(x)=F_\xi(r)$

Проверяя получаем для $x_1=-r$:

$$\lim_{x\to -r-0}F_\xi(x)=0,\ \lim_{x\to -r+0}F_\xi(x)=\lim_{x\to -r+0}\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r}=0,\ F_\xi(-r)=0$$

и для $x_2=r$:

$$\lim_{x\to r-0}F_\xi(x)=\lim_{x\to r-0}\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r}=1,\ \lim_{x\to r+0}F_\xi(x)=1,\ \ F_\xi(r)=1$$

Откуда заключаем, что действительно наша функция является непрерывной на $(-\infty,\infty)$. И для нее существует плотность распределения вероятностей, которую находим по определению: $p_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}$.

Для нашей случайной величины:

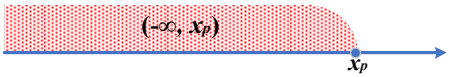
$$p_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=\begin{cases}0, & x\le -r,\ x\ge r\\ \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}, & -r<x<r\end{cases}.$$

2. Оценим вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $\left(-\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$. В предыдущих примерах не раз указывалось, что это можно сделать двумя способами, используя функцию распределения или функцию плотности. Реализуем оба способа.

$$P\left\{\xi\in\left(-\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\right\}=F_\xi\left(\frac{r}{2}\right)-F_\xi\left(-\frac{r}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\{$$ в силу нечетности арксинуса $$\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

$$P\left\{\xi\in\left(-\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\right\}=\int\limits_{-r/2}^{r/2}p_\xi(x)\,dx=\int\limits_{-r/2}^{r/2}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r}\Big|_{-r/2}^{r/2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}.$$

3. И, наконец, найдем квантиль распределения $x_{0,75}$. ***По определению:*** квантиль порядка p это корень x_p уравнения: $F_\xi\left(x_p\right)=p$. Так как $F_\xi\left(x_p\right)=P\left(\xi<x_p\right)=p$, то можно сказать, что квантиль - это такое неизвестное значение x_p, для которого справедливо, что случайная величина окажется слева от него с вероятностью p.



Самые известные квантили*:** $x_{0,25};x_{0,5};x_{0,75}$, Квантиль $x_{0,5}$ имеет отдельное название ***медиана и широко используется в прикладной статистике.

***Замечание*:** Следует запомнить, что каждый квантиль делит распределение любой случайной величины на 2 части, вероятность попасть слева от заданного квантиля, указывается в нижнем индексе.

Например, вероятность попасть случайной величине слева от своего квантиля $x_{0,25}$ равна 0,25; слева от $x_{0,75}$ соответственно 0,75. Медиана же, или квантиль $x_{0,5}$, делит любое распределение пополам и вероятности оказаться случайной величине слева или справа от медианы $x_{0,5}$ одинаковы $P\left(\xi<x_p\right)=P\left(\xi>x_p\right)$ и равны $0,5$.

Решим поставленную перед нами задачу и найдем $x_{0,75}$. Для этого нам необходимо найти решение уравнения: $F_\xi\left(x_{0,75}\right)=0,75$.

Подставляя $x_{0,75}$ в выражение нашей функции распределения:

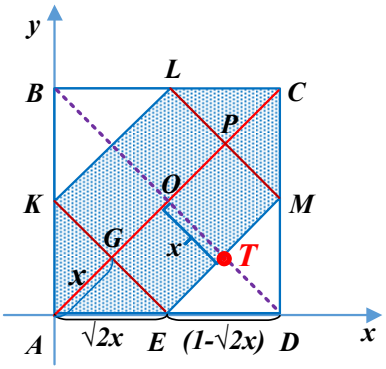
$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -r\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{r}, & -r<x<r\\ 1, & x\ge r\end{cases}$$

Получаем: $F_\xi\left(x_{0,75}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_{0,75}}{r}=0,75$, откуда $\arcsin\frac{x_{0,75}}{r}=\frac{\pi}{4}$, $\frac{x_{0,75}}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, и $x_{0,75}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Пример 9.9. В единичный квадрат наугад бросается точка. Пусть случайная величина ξ – расстояние от точки до фиксированной диагонали квадрата. Записать для данной случайной величины функцию распределения и функцию плотности.

Решение:

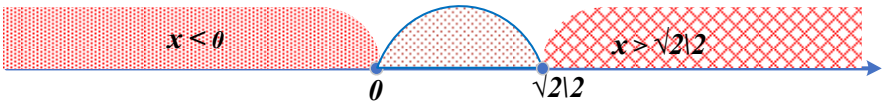
1. Рассмотрим графическое изображение:



Предположим что мы бросаем точку ***T***.

2. Найдем функцию распределения случайной величины ξ – расстояние от точки ***T*** до фиксированной диагонали квадрата. По определению $F_\xi(x) = P(\xi<x)$. Предположим, что мы зафиксировали диагональ AC. Брошенная наугад точка может попасть равновероятно в треугольник ABC выше диагонали и ACD ниже ее. При этом возможные значения случайной величины ξ – расстояние от точки до фиксированной диагонали квадрата, лежат в интервале $\left[0,\sqrt{2}/2\right]$: $\xi = 0$ если точка упала на саму диагональ, $\xi = \sqrt{2}/2$, если точка попала прямо в точку D или B. { Из прямоугольного треугольника AOD: т.к. $AD = AB = 1$, то $BD = \sqrt{2}$, а $OD = OB = \sqrt{2}/2$ }.

То есть для построения функции распределения нам необходимо рассмотреть три интервала: $(-\infty,0);\left[0,\sqrt{2}/2\right];\left(\sqrt{2}/2,\infty\right)$.



Очевидно, что при $x \in (-\infty,0)$, значение функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi<x) = 0$, а при $x \in \left(\sqrt{2}/2,\infty\right)$ $F_\xi(x) = P(\xi<x) = 1$.

Найдем выражение для $F_\xi(x)$ в интервале $\left[0,\sqrt{2}/2\right]$.

При $x \in \left[0, \sqrt{2}/2\right]$ вероятность того, что ξ будет меньше такого x равна вероятности попадания точки в область $AKLCME$. Используя геометрическое определение вероятности можем записать:

$$P(\xi < x) = \frac{mes(AKLCME)}{mes(ABCD)}, \text{ где } mes() - \text{в данном случае означает площадь.}$$

Из условия $mes(ABCD) = S_{ABCD} = 1$.

Найдем $mes(AKLCME) = S_{AKLCME} = 2S_{ACME}$.

Площадь $S_{ACME} = S_{ACD} - S_{EMD}$. $S_{ACD} = \frac{1}{2}$.

Найдем S_{EMD}. Из треугольника ACD: $AG = GE = x$, тогда гипотенуза $AE = \sqrt{2}x$, а $ED = 1 - \sqrt{2}x$.

И площадь прямоугольного треугольника EMD равна: $S_{EMD} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}x\right)^2$.

Можем записать $S_{ACME} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}x\right)^2 = \frac{1 - \left(1 - \sqrt{2}x\right)^2}{2}$.

И наконец: $S_{AKLCME} = 2S_{ACME} = 2 \cdot \frac{1 - \left(1 - \sqrt{2}x\right)^2}{2} = 1 - \left(1 - \sqrt{2}x\right)^2$.

Тогда искомая вероятность:

$$P(\xi < x) = \frac{mes(AKLCME)}{mes(ABCD)} = \frac{1 - \left(1 - \sqrt{2}x\right)^2}{1} = 1 - \left(1 - \sqrt{2}x\right)^2 = 2\sqrt{2}x - 2x^2$$

Таким образом мы нашли вероятность события, что $\{\xi < x\}$ при $x \in \left[0, \sqrt{2}/2\right]$, которая равна вероятности попадания в заштрихованную голубым область $AKLCME$.

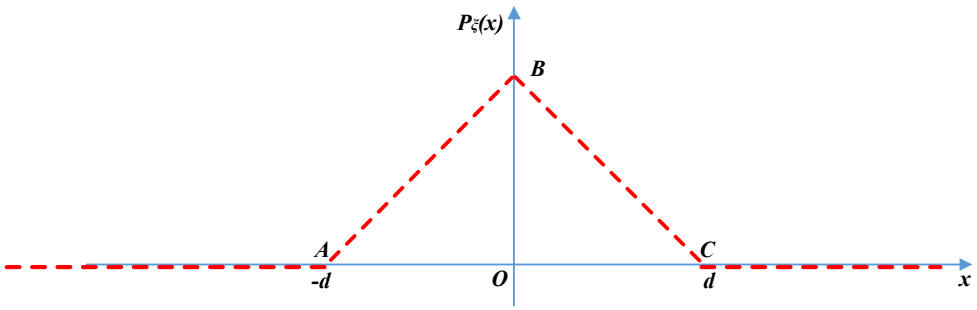
Можем записать выражение для функции распределения случайной величины ξ:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 2x\left(\sqrt{2} - x\right), 0 \le x \le \sqrt{2}/2 \\ 1, x > \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

3. Найти выражение для плотности можно простым дифференцированием функции распределения:

$$p_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<0,\ x>\sqrt{2}/2 \\ 2\left(\sqrt{2}-2x\right), & 0\le x\le \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Пример 9.10. Случайная величина ξ распределена по закону Симпсона (закон равнобедренного треугольника) на участке $(-d,d)$.



Записать для данной случайной величины функцию плотности.

Решение:

1. Любая функция может быть плотностью распределения вероятностей, если для нее выполняется 2 основных свойства: $p_\xi(x)\ge 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx=1$. Выполнение первого свойства очевидно для нашей функции, которая является знакоположительной в интервале $(-d,d)$. Второе свойство для нашей функции записывается так: $\int_{-d}^{d} p_\xi(x)\,dx=1$. Из математического анализа известен геометрический смысл этого интеграла, который заключается в том, что площадь под функцией $p_\xi(x)$ на интервале $(-d,d)$ должна быть равна 1. Иначе говоря, площадь нашего треугольника ABC, изображенного на рисунке должна быть равна 1. Площадь треугольника равна $S_{ABC}=\frac{|BO|\cdot|AC|}{2}=\frac{|BO|\cdot 2d}{2}=d\cdot|BO|=1$, откуда $|BO|=\frac{1}{d}$. То есть только при таких координатах точки $B\left(0,1/d\right)$ изображенная функция может быть плотностью.

2. Теперь, зная координаты точек A,B,C мы легко можем записать уравнение плотности, используя уравнение прямой например в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$ где a и b величины отрезков, отсекаемые от координатных осей прямой.

Для прямой AB на интервале $(-d,0)$: $\frac{x}{-d}+\frac{p_\xi(x)}{1/d}=1$, откуда $p_\xi(x)=\frac{1}{d}\left(1+\frac{x}{d}\right)$.

Для прямой BC на интервале $(0,d)$: $\frac{x}{d}+\frac{p_\xi(x)}{1/d}=1$, откуда $p_\xi(x)=\frac{1}{d}\left(1-\frac{x}{d}\right)$.

Объединяя оба уравнения в одно, используя функцию модуль: $y=\begin{cases} x,\ x\ge 0 \\ -x,\ x<0 \end{cases}$, можем записать для функции $p_\xi(x)=\frac{1}{d}\left(1-\frac{|x|}{d}\right)$.

И окончательно все выражение функции плотности вероятности случайной величины ξ распределенной по закону Симпсона:

$$p_\xi(x)=\begin{cases} \frac{1}{d}\left(1-\frac{|x|}{d}\right),\ x\in(-d,d) \\ 0,\qquad x\in(-d,d) \end{cases}$$

Пример 9.11. Показать, что функция вида $p_\xi(x)=\begin{cases} bx^S\exp\{-\alpha^2x^2\},\ x>0 \\ 0,\ x<0 \end{cases}$, где $b>0,\ \alpha>0$ – некоторые постоянные и $s-$ натуральное число $\{s\in N\}$, обладает свойствами плотности вероятности.

Решение:

1. Для того чтобы показать, что какая-либо функция является плотностью распределения вероятности какой-либо случайной величины, необходимо проверить для данной функции выполнение двух основных свойств плотности распределения вероятности:

$$p_\xi(x)\ge 0 \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx=1.$$

2. Проверим первое свойство плотности: $p_\xi(x)\ge 0$. Выполнение этого свойства очевидно для исследуемой функции: $p_\xi(x)=\begin{cases} bx^S\exp\{-\alpha^2x^2\},\ x>0 \\ 0,\ x<0 \end{cases}$, т.к. при $x>0$: $b>0$ и функция $\exp\{-\alpha^2x^2\}>0$. А при $x<0$, $p_\xi(x)=0$.

3. Проверим условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx=1$. Так как наша функция определена при $x>0$, то у нас данное условие будет таким: $\int_{0}^{\infty} p_\xi(x)\,dx=1$. Подставляя получаем: $\int_{0}^{\infty} bx^S\exp\{-\alpha^2x^2\}\,dx=1$

$$b\int_0^\infty x^S \exp\{-\alpha^2 x^2\}\,dx = \begin{bmatrix} \alpha^2 x^2 = t \\ x = \sqrt{t}/\alpha \\ dx = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{bmatrix} = b\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{t}}{\alpha}\right)^S \exp\{-t\}\frac{1}{\alpha}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{b}{2\alpha^{S+1}}\int_0^\infty t^{\frac{S-1}{2}} \exp\{-t\}\,dt = 1$$

Из курса математического анализа известна функция Эйлера, это функция вида: $\int_0^\infty t^{S-1}\exp\{-t\}\,dt = \Gamma(s)$. У нас в интеграле получилась степень $t^{\frac{S-1}{2}}$, но $\frac{S-1}{2} = \frac{S+1}{2} - 1$, поэтому можем переписать для него: $\int_0^\infty t^{\frac{S+1}{2}-1}\exp\{-t\}\,dt = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$.

Таким образом резюмируя, можем записать: $\frac{b}{2\alpha^{S+1}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 1$. Выполнение этого условия гарантирует, что для нашей функции выполнится условие нормировки.

4. В полученном выражении в зависимости от значения $S \in N$, а именно: четное оно или нечетное будем иметь разные соотношения между параметрами.

a) Пусть $S_1 = 2n$, где $n \in N$. Тогда $\frac{b}{2\alpha^{2n+1}}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{b}{2\alpha^{2n+1}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1$

Используем частное свойство гамма-функции: $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$. Подставляя получаем: $\frac{b}{2\alpha^{2n+1}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{2\alpha^{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} = 1$. Откуда:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2\alpha^{2n+1}\cdot 4^n n!}{(2n)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{2n+1}\alpha^{2n+1} n!}{(2n)!}\cdot$$

b) Пусть $S_2 = 2n+1$, где $n \in N$. Тогда $\frac{b}{2\alpha^{2n+2}}\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right) = \frac{b}{2\alpha^{2n+2}}\Gamma(n+1) = 1$.

Так как $\Gamma(n+1) = n!$, то $\frac{b}{2\alpha^{2n+1}}n! = 1$, откуда $b_2 = \frac{2\alpha^{2n+2}}{n!}$.

Заключение: При найденных значениях $b_i,\ i = \overline{1,2}$ функция вида $p_\xi(x) = \begin{cases} bx^S \exp\{-\alpha^2 x^2\}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$, где $b > 0, \alpha > 0$ – некоторые постоянные и S – натуральное число $\{S \in N\}$, обладает свойствами плотности вероятности.

Задачи по теме 9

9.1. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<3\\ C(x-3)^2, 3\le x\le 5\\ 1, x>5\end{cases}$$

Найти: **а)** коэффициент C; **б)** плотность распределения $p_\xi(x)$ и построить графики функций $p_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; **в)** $P\{\xi\in[3,4)\}$.

9.2. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x,\ 0<x\le\pi,\\ 0,\qquad x\le 0,\ x>\pi.\end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения ξ; **б)** определить вероятность попадания значения ξ в интервал $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

9.3. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятности:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \sin x,\ 0<x\le C\\ 0,\ x>C\end{cases}$$

Найти: **а)** константу C; **б)** функцию распределения $F_\xi(x)$; **с)** вероятность попадания значения ξ в интервал $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

9.4. Какие функции являются функциями распределения: **а)** $F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{x}{1+x}, x>0\end{cases}$;

б) $F_\xi(x)=\frac{\pi}{2}+arctgx$; **в)** $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x-x^2, 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$.

9.5. Случайная величина имеет равномерное распределение с плотностью:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(a,b) \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \end{cases}$$

<u>Найти</u> функцию распределения случайной величины ξ.

9.6. При каких значениях параметров k и b функция

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, x\le -1 \\ kx+b, -1<x\le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$$

может быть функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины ξ. ***<u>Найти</u>*** $P\{\xi\in(-2.3;1.5)\}$?

9.7. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, x\ge 1 \\ 0, x<1 \end{cases}$$

<u>Найти:</u> **а)** функцию распределения вероятностей $F_{\xi}(x)$; **б)** проверить условие нормировки; **в)** $P\{\xi\in(1;3)\}$

9.8. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt{4-x^2}}, |x|<2 \\ 0, |x|>2 \end{cases}$$

<u>Найти:</u> **а)** значение параметра C; **б)** функцию распределения вероятностей $F_{\xi}(x)$; **в)** проверить условие нормировки; в) $P\{\xi\in(1;5)\}$

9.9. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, x<-1 \\ a+b\arcsin x, -1\le x<1 \\ 1, x\ge 1 \end{cases}$$

Найти: **а)** коэффициенты a, b; **б)** функцию плотности распределения случайной величины ξ и построить ее график.

9.10. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a \cdot \dfrac{\ln x}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: **а)** значение параметра a и построить график плотности; **б)** функцию распределения вероятностей $F_{\xi}(x)$; **в)** $P\{\xi \in [1,2]\}$.

9.11. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная случайная величина ξ, имеющая равномерное распределение на отрезке $[19,20]$. ***Найти*** вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 часов 22 минут до 19 часов 46 минут.

9.12. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью:

$$p_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,2 \cdot e^{-0.2t}, & t \ge 0 \end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения вероятностей $F_T(t)$, построить ее график; **б)** проверить условие нормировки; **в)** вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

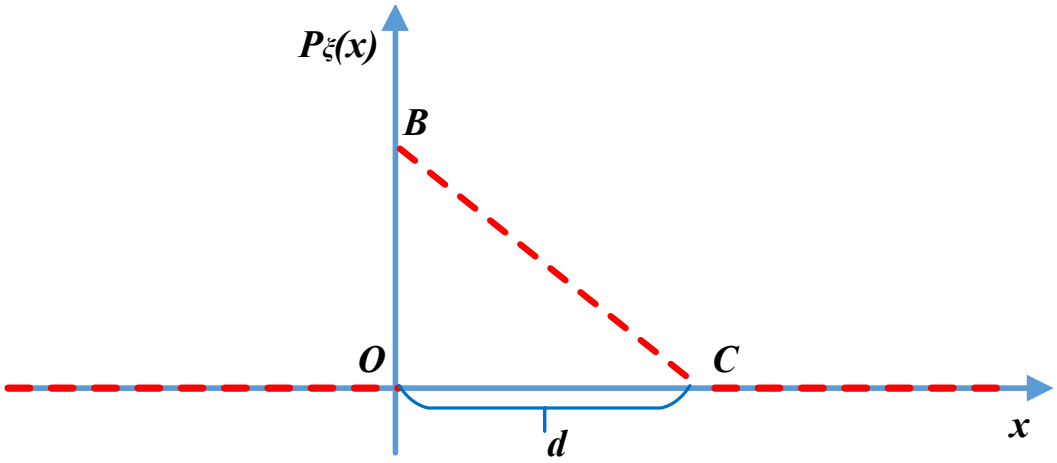
9.13. Нормально распределенная случайная величина ξ задана своей плотностью:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Найти интервал, в который с вероятностью 0, 9545 попадет случайная величина ξ в результате испытаний.

9.14. Случайная величина ξ распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале $(0,d)$.

Найти: **а)** функцию распределения $F_\xi(x)$; **б)** функцию плотности $p_\xi(x)$; **в)** вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $\left(\frac{d}{4},\frac{d}{2}\right)$.



9.15. При каком значении неизвестной константы C указанные функции могут быть плотностью распределения вероятности случайных величин: **а)** $p_\xi(x)=\frac{C}{1+(x-a)^2}, a\in R$;

б) $p_\xi(x)=\frac{C}{e^x+e^{-x}}$.

9.16. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью $p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Найти такое значение A, что $P\{\xi>A\}=\frac{\pi}{4}$.

9.17. Случайная величина ξ подчинена закону Лапласа: $p_\xi(x)=Ce^{-\lambda|x|}, \lambda>0$. ***Найти:*** **а)** коэффициент C; **б)** функцию распределения $F_\xi(x)$; **в)** построить графики плотности и функции распределения.

9.18. Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le A\\ \frac{1}{2}\sqrt{x}-1, A<x\le B\\ 1, x>B\end{cases}$$

Найти: **а)** значения постоянных A и B ; **б)** плотность распределения $p_\xi(x)$ и построить ее график; **в)** $P\{\xi \in (3,5)\}$.

9.19. Определить значение параметров функций, для которых эти функции являются плотностями распределений: **а)** $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin [e,d] \\ c, x \in [e,d] \end{cases}$; **б)** $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, ax^2 + bx < 0 \\ ax^2 + bx, ax^2 + bx \geq 0 \end{cases}$.

9.20. В круглое озеро радиуса 1 км падает камень. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ – удаление точки падения от берега.

9.21. В прямоугольный пруд $c \times d$ падает камень. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ – удаление точки падения от берега.

9.22. Точка, брошена наудачу внутрь круга радиуса *R*. Вероятность попадания в любую область, расположенную внутри круга пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения случайной величины ξ – расстояния от точки до центра круга.

9.23. Два человека ***B*** и ***C*** условились встретиться в определённом месте между двумя и тремя часами дня. Найти плотность распределения времени ожидания, пришедшего первым.

9.24. Окружность с точкой A катится по плоскости. Найти функцию распределения расстояния точки A до плоскости сегодня в полночь.

9.25. На отрезок $(0,1)$ случайно падают 2 точки. Найти плотность распределения расстояния между ними.

Тема 10. Математическое ожидание, медиана, мода, квантили, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, моменты случайных величин

Любой закон распределения случайной величины полностью ее описывает. Но часто на практике достаточно указать только некоторые числовые характеристики исследуемой случайной величины. Прежде всего указывают ***математическое ожидание***, ***медиану*** и ***моду*** являющиеся характеристиками положения случайной величины, затем уточняют характеристики рассеяния: ***дисперсию*** и ***среднее квадратическое отклонение***.

Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие им вероятности.

Для случайной величины, *имеющей конечное число значений* математическое ожидание равно:

$$M\xi = \xi_1 \cdot p_1 + \xi_2 \cdot p_2 + ... + \xi_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot p_i$$

Если же число *возможных значений случайной величины бесконечно*, то математическое ожидание определяется формулой:

$$M\xi = \xi_1 \cdot p_1 + \xi_2 \cdot p_2 + ... + \xi_n \cdot p_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot p_i$$

Замечание 1: В этом случае математическое ожидание случайной величины существует, только если полученный ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины ξ, заданной плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$ равно:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)\, dx$$

Замечание 2: В данном случае математическое ожидание случайной величины существует, если полученный интеграл сходится абсолютно, т.е. выполняется условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p_\xi(x)\, dx < +\infty .$$

Для единообразной формы записи математического ожидания как дискретной, так и непрерывной случайной величины используют ***интеграл Стилтьеса***:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x)$$

Основные свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$MC = C$$

2. Постоянный множитель можно выносит за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M\xi$$

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин (зависимых или независимых) равно сумме (разности) математических ожиданий:

$$M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$$

4. Математическое ожидание произведения двух ***независимых*** случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$$

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю, т.е.:

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M(M\xi) = M\xi - M\xi = 0$$

Мода

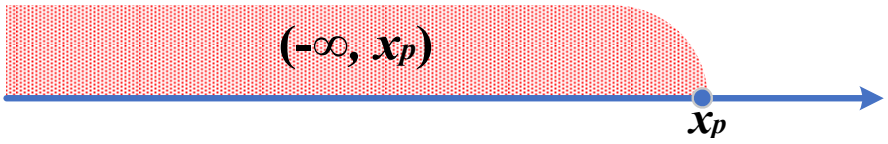
Модой распределения дискретной случайной величины ξ называется ее наиболее вероятное значение.

Модой непрерывной случайной величины ξ называется абсцисса точки максимума функции распределения плотности вероятностей.

Квантиль порядка p***. Медиана***

Квантиль порядка p случайной величины ξ это корень x_p уравнения: $F_{\xi}(x_p) = p$.

Так как $F_\xi(x_p) = P(\xi < x_p) = p$, то можно сказать, что квантиль – это такое неизвестное значение x_p, для которого справедливо, что случайная величина окажется слева от него с вероятностью p



Самые известные квантили: $x_{0,25}; x_{0,5}; x_{0,75}$.

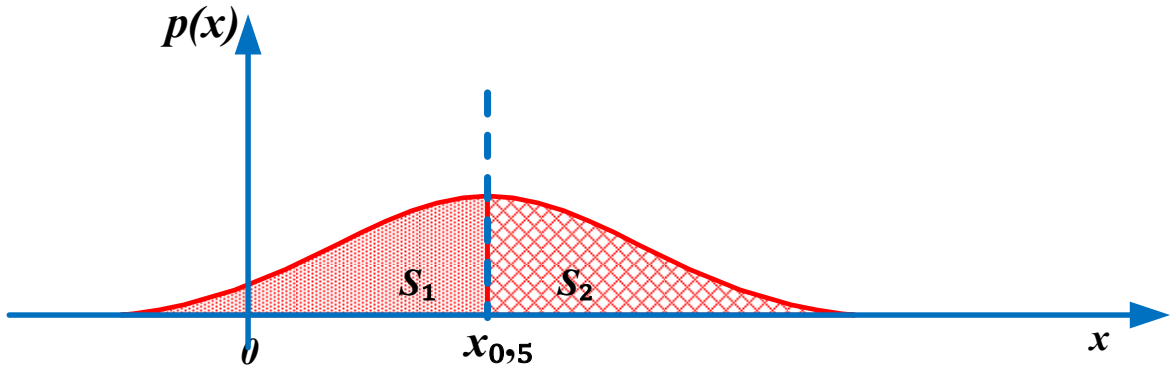
Каждый квантиль делит распределение любой случайной величины на 2 части, вероятность попасть слева от заданного квантиля, указывается в нижнем индексе.

Например, вероятность попасть случайной величине слева от своего квантиля $x_{0,25}$ равна 0,25; слева от $x_{0,75}$ соответственно 0,75.

Медиана

Квантиль $x_{0,5}$ имеет отдельное название ***медиана*** и широко используется в прикладной статистике.

Медиана случайной величины, это число определяемое из уравнения: $P(\xi < x_{0,5}) = 0,5$. Медиана или квантиль $x_{0,5}$, делит любое распределение пополам и вероятности оказаться случайной величине слева или справа от медианы $x_{0,5}$ одинаковы $P(\xi < x_p) = P(\xi > x_p)$ и равны между собой. Геометрически медиана, это такое значение $x_{0,5}$, проведя через которое прямую, параллельную оси $Op(x)$ мы разделим площадь под кривой плотности на 2 равные части. Например, это может выглядеть так:



Вероятность оказаться случайной величине слева или справа от медианы $x_{0,5}$, абсолютно одинаковая равная $1/2$. Площади S_1 и S_2 равны $0,5$.

Дисперсия

Для того чтобы иметь представление о поведении случайной величины, недостаточно знать только ее математическое ожидание или любую другую меру центральной тенденции.

Пример 1: Рассмотрим две случайные величины ξ и η, заданные рядами распределения вида:

ξ_i	49	50	51
p_i	0,1	0,8	0,1

η_i	0	100
p_i	0,5	0,5

Найдем математическое ожидание обеих случайных величин:

$$M\xi = 49 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,8 + 51 \cdot 0,1 = 50, \quad M\eta = 0 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 50.$$

Как видно, математические ожидания обеих величин равны, но если для случайной величины ξ математическое ожидание $M\xi$ хорошо описывает ее поведение, являясь наиболее вероятным возможным значением (причем остальные значения ненамного отличаются от 50), то значения η существенно отстоят от $M\eta$.

Поэтому, наряду с математическим ожиданием желательно знать, насколько значения случайной величины отклоняются от него. Для характеристики этого показателя служит дисперсия.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от ее математического ожидания:

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2$$

Для дискретной случайной величины дисперсия определяется формулой:

$$D\xi = \sum_i \left(\xi_i - M\xi\right)^2 \cdot p_i$$

Для абсолютно непрерывной:

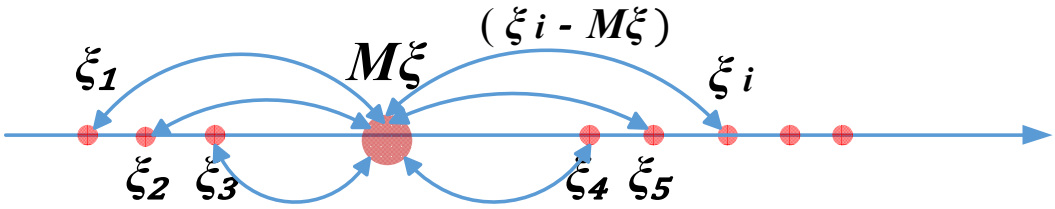
$$D\xi = \xi \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \cdot p_\xi(x)\,dx$$

Замечание 3: В обоих случаях должно выполняться требование абсолютной сходимости соответствующих ряда и интеграла.

Используя интеграл Стилтьеса, можем записать формулу дисперсии для дискретной и абсолютно непрерывной случайных величин в едином виде:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\, dF_\xi(x)$$

Замечание 4. *М*атематическое ожидание является «центром тяжести» распределения, относительно которого значения случайной величины располагаются слева и справа.



Поэтому отклонения значений случайной величины ξ от $M\xi$: $(\xi_i - M\xi)$ имеют разные знаки: плюс или минус в зависимости от положения значения случайной величины. И если найти математическое ожидание отклонения всех значений от «центра», то оно будет равно нулю и не даст нам нужной информации о среднем отклонении. Поэтому в определении дисперсии оценивается не само отклонение от среднего $(\xi - M\xi)$, а квадрат $(\xi - M\xi)^2$, отклонения, чтобы отклонения разных знаков не компенсировали друг друга.

Конечно можно было бы в качестве «меры разброса» выбрать например, математическое ожидание модуля отклонения случайной величины от математического ожидания, т.е. $M|\xi - M\xi|$.

Или, например, математическое ожидание четвертой степени отклонения $M(\xi - M\xi)^4$. Выбор именно квадрата отклонения обусловлен тем, что функция модуль не является достаточно гладкой (она не везде дифференцируема), а функция полином четвертой степени (шестой, восьмой и пр.), более сложная, чем квадратичная функция, которая является самой простой из гладких.

Вычислим дисперсии случайных величин ξ и η, рассмотренных в начале.

$$D\xi = \left(49^2 \cdot 0,1 + 50^2 \cdot 0,8 + 51^2 \cdot 0,1\right) - 50^2 = 2500,2 - 2500 = 0,2$$
$$D\eta = \left(0^2 \cdot 0,5 + 100^2 \cdot 0,5\right) - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$$

Получилось, что дисперсия случайной величины η в 12500 раз больше дисперсии ξ.

Если бы мы не знали законов распределения этих величин, то по известным значениям дисперсии могли бы утверждать, что ξ мало отклоняется от своего математического ожидания, в то время как для η это отклонение весьма существенно.

Основные свойства дисперсии

1. Дисперсия произвольной постоянной величины C равна нулю:

$$DC = 0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D\left(C \cdot \xi\right) = C^2 \cdot D\left(\xi\right)$$

3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D\left(\xi \pm \eta\right) = D\left(\xi\right) + D\left(\eta\right);$$

4. Дисперсия суммы постоянной величины C и случайной величины ξ равна дисперсии случайной величины:

$$D\left(\xi + C\right) = D\left(\xi\right)$$

5. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат математического ожидания:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi\ .$$

Среднее квадратическое отклонение

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от математического ожидания и имеет размерность квадрата случайной величины, для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением, которая имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

Среднее квадратическое отклонение случайных величин, рассмотренных в ***примере 1*** ранее, соответственно равны:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0,2} \approx 0,447 \ ; \ \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{2500} = 50$$

Моменты случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями следующих более общих понятий – моментов случайных величин.

Начальным моментом порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание k – степени этой величины. Обозначается через α_k. Т.е. по определению:

$$\alpha_k = M\left(\xi^k\right)$$

Для дискретных случайных величин начальный момент выражается суммой: $\alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i$

А для непрерывных случайных величин – интегралом: $\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx$

В частности, начальный момент 1-го порядка есть математическое ожидание: $\alpha_1 = M\xi$

Центральным моментом k -го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание $k-$ой степени центрированной случайной величины $(\xi - M\xi)$, т.е. $M\left(\xi - M\xi\right)^k$, обозначается через μ_k. Таким образом, по определению:

$$\mu_k = M\left(\xi - M\xi\right)^k .$$

В частности $\mu_2 = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = D\xi$, т.е. центральный момент второго порядка есть дисперсия.

Из определения видно, что:

$\mu_1 = M\left(\xi - M\xi\right) = M\xi - M\left(M\xi\right) = M\xi - M\xi = 0$ для любой случайной величины.

Для дискретных случайных величин центральный момент выражается суммой:

$$\mu_k = \sum_i \left(x_i - M\xi\right)^k \cdot p_i$$

А для непрерывных случайных величин - интегралом:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M\xi\right)^k \cdot p_{\xi}\left(x\right) dx$$

Любой из центральных моментов может быть выражен через начальные. Так, например,

$$\mu_2 = D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$$

Примеры решения задач по теме 10

Пример 10.1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины ξ:

ξ_i	*4*	*6*	ξ_3
p_i	*0,5*	*0,3*	p_3

Известно, что математическое ожидание $M\xi = 8$. ***Найти*** ξ_3 *и* p_3.

Решение:

1. По определению математического ожидания для дискретной случайной величины:

$$M\xi = \sum_k \xi_k \cdot p_k$$

У нас $k = 3$. Поэтому $M\xi = \sum_{k=1}^{3} \xi_k \cdot p_k$. Подставляя известные значения, получаем:

$M\xi = \sum_{k=1}^{3} \xi_k \cdot p_k = 4 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,3 + \xi_3 \cdot p_3 = 8$, откуда $\xi_3 \cdot p_3 = 4,2$. Можем найти p_3 из условия нормировки: $\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$, т.е. $p_3 = 1 - \left(p_1 + p_2\right) = 1 - 0,8 = 0,2$.

2. И наконец можем найти ξ_3 из $\xi_3 \cdot p_3 = 4,2 \quad \Rightarrow \xi_3 = 21$.

Пример 10.2. Найти математическое ожидание случайной величины θ, если $\theta = 2\xi + 3\eta$ и $M\xi = 5$, а $M\eta = 3$.

Решение: По свойству математического ожидания для *любых* случайных величин:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta \text{ и } M(C \cdot \xi) = C \cdot M\xi.$$

Тогда используя эти свойства, можем записать:

$$M\theta = M(2\xi + 3\eta) = M(2\xi) + M(3\eta) = 2M\xi + 3M\eta$$

И подставляя известные значения $M\xi = 5$ и $M\eta = 3$, окончательно получаем:

$$M\theta = 2M\xi + 3M\eta = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19.$$

Пример 10.3. Даны независимые случайные величины ξ и η, для которых известно, что $D\xi = 5$ и $D\eta = 6$. ***Найти*** дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\theta = 3\xi + 2\eta$.

Решение:

1. Используем два известных свойства дисперсии: 1) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, если ξ и η являются независимыми случайными величинами; 2) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$.

2. У нас дана случайная величина $\theta = 3\xi + 2\eta$, для нее $D\theta = D(3\xi + 2\eta) = \{$ в силу независимости ξ и η $\} = D(3\xi) + D(2\eta) = 9D\xi + 4D\eta = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69$.

3. Имея значение дисперсии, легко можем найти среднее квадратическое: $\sigma_\theta = \sqrt{D\theta} = \sqrt{69}$

Пример 10.4. Брошены ***n*** игральных кубиков. ***Найти*** дисперсию суммы числа очков, которые появятся на всех выпавших очках.

Решение:

1. *Опыт:* одновременно бросается ***n*** игральных кубиков, на каждом из которых выпадает случайное число очков от 1 до 6. Введем обозначения:

ξ_1 – число очков, выпавших на первом кубике;

ξ_2 – число очков, выпавших на втором кубике;

……

ξ_n – число очков, выпавших на ***n-ом*** кубике.

2. Введем случайную величину $\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Дисперсию этой случайной величины нам и нужно найти в задаче.

По свойству дисперсии: $D\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$, если ξ_k – независимые случайные величины.

3. Найдем дисперсии $D\xi_k = M\left(\xi_k - M\xi_k\right)^2 = M\xi_k^2 - M^2\xi_k,\ k = \overline{1,n}$. Для этого нужно найти математическое ожидание $M\xi_k$. Очевидно, что все случайные величины ξ_k имеют одинаковое распределение, запишем его например для ξ_1:

ξ_{1i}	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Отсюда $M\xi_1 = \frac{1}{6}\left(1+2+3+4+5+6\right) = M\xi_2 = ... = M\xi_n = \frac{21}{6}$.

Теперь нужно найти $M\xi_k^2$. Запишем ряд распределения случайной величины ξ_1^2:

ξ_{1i}^2	1	4	9	16	25	36
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

По известному распределению случайной величины ξ_1^2, можем легко найти ее математическое ожидание:

$$M\xi_1^2 = \frac{1}{6}\left(1+4+9+16+25+36\right) = M\xi_2^2 = ... = M\xi_n^2 = \frac{91}{6}$$

Все готово для получения дисперсии случайной величины ξ_1:

$$D\xi_1 = M\xi_1^2 - M^2\xi_1 = D\xi_2 = ... = D\xi_n = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12}.$$

4. Тогда дисперсия случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$:

$$D\eta = D\left(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n\right) = D\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \underbrace{\frac{35}{12} + \frac{35}{12} + ... + \frac{35}{12}}_{n} = \frac{35n}{12}.$$

Пример 10.5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

Решение:

1. Для случайной величины ξ, распределённой по закону Пуассона (коротко это можно записать $\xi \sim P(\lambda)$) ряд распределения такой:

ξ_i	0	1	2	…..	***m***	….
p_i	$\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$	$\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…..	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	

Множество возможных значений случайной величины $\xi \sim P(\lambda)$ бесконечно и счетно.

2. По определению математического ожидания:

$$M\xi = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \cdot p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (*)$$

Преобразуем вид общего члена полученного ряда $(*)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1} e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Из курса математического анализа известно, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$, поэтому можем окончательно записать для искомого математического ожидания:

$$M\xi = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda .$$

3. Найдем дисперсию случайной величины $\xi \sim P(\lambda)$. По определению:

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = M\xi^2 - M^2\xi .$$

Значение $M^2\xi = M\xi \cdot M\xi = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$. Осталось найти $M\xi^2$?

Используя определение второго начального момента, можем записать для нашей случайной величины:

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m^2 \cdot p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} ;$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m \cdot m}{1} \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{1} \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{1} \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} (m-1+1) \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \lambda^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-2} e^{-\lambda}}{(m-2)!} + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1} e^{-\lambda}}{(m-1)!} = \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Используем опять разложение экспоненты в ряд: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ и окончательно получаем:

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda ;$$

Нам осталось найти дисперсию:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Заключение: Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение Пуассона равны между собой и равны значению λ, которое обычно называют ***параметром распределения***.

Пример 10.6. Найти математическое ожидание и дисперсию числа наступлений события A в серии из n независимых опытов, если вероятность наступления события A в одном опыте равна p.

Решение: 1 способ. Из условия задачи известно, что проводится n независимых испытаний, в каждом из которых с одинаковой вероятностью p наступает или не наступает с вероятностью

$q = 1 - p$ событие A. Ранее в главе «Случайные события» подробно обсуждалась эта ***схема Бернулли***.

Случайная величина которая естественно возникает относительно данной схемы, это ξ – число наступлений события A в n независимых опытах. Такая случайная величина имеет ***биномиальное распределение***. Запишем ее ряд распределения:

ξ_i	0	1	2	……	n
p_i	$C_n^0 p^0 \cdot q^{n-0}$	$C_n^1 p^1 \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 \cdot q^{n-2}$		$C_n^n p^n \cdot q^{n-n}$

То есть $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m},\ m = \overline{0,n}$.

1. Найдем математическое ожидание ξ. По определению: $M\xi = \sum_{m=0}^{n} \xi_m \cdot p_m$. Подставляя значения случайной величины и соответствующие им вероятности получим:

$$M\xi = \sum_{m=0}^{n} \xi_m \cdot p_m = \sum_{m=0}^{n} m \cdot C_n^m p^m \cdot q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} = \{ \text{ при } m = 0 \text{ слагаемое равно нулю } \} = \sum_{m=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(m-1)!((n-1)-(m-1))!} p^{m-1} \cdot p \cdot q^{n-m} = n \cdot p \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} \cdot q^{(n-1-(m-1))} = \{ \text{ положим } k = m-1 \text{ и перепишем сумму } \} = n \cdot p \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^k \cdot q^{(n-1-k)} = \{ \text{ из школьной математики известно, что } \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cdot b^k = (a+b)^n, \text{поэтому можем переписать нашу сумму } \} = n \cdot p(q+p)^{n-1} = \{ \text{ поскольку } q + p = 1 \} = n \cdot p.$$

2. Найдем дисперсию случайной величины ξ. Используем рабочую формулу для ее нахождения: $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi$. В данной формуле нам неизвестен только второй начальный момент $M\xi^2$, т.к. $M^2\xi = M\xi \cdot M\xi = n^2 \cdot p^2$.

По определению:

$$M\xi^2 = \sum_{m=0}^{n} \xi_m^2 \cdot p_m = \sum_{m=0}^{n} m^2 \cdot C_n^m p^m \cdot q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{m \cdot n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} = \{ \text{ при } m = 0 \text{ слагаемое равно нулю, поэтому можем сдвинуть индекс суммирования } \} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} m \cdot \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \sum_{m=1}^{n} \underbrace{(m-1+1)}_{(**)} \cdot \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} = \{$$ разобьем на две суммы относительно $(**)\} = \sum_{m=1}^{n} (m-1) \cdot \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} + \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} = \{$ в первой сумме опять слагаемое при $m=1$ равно нулю, поэтому сдвигаем индекс суммирования $\} =$

$$= \sum_{m=2}^{n} \frac{n!}{(m-2)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} + np \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!((n-1)-(m-1))!} p^{m-1} \cdot q^{(n-1)-(m-1)} = \{$$ второе слагаемое при оценке математического ожидания мы уже нашли, используя бином Ньютона, поэтому $\} =$

$$= \sum_{m=2}^{n} \frac{n!}{(m-2)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} + np \underbrace{\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} \cdot q^{(n-1)-(m-1)}}_{(q+p)^{n-1}=1} = n \cdot (n-1) \sum_{m=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} + np =$$

$$= n \cdot (n-1) p^2 \sum_{m=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(m-2)!((n-2)-(m-2))!} p^{m-2} \cdot q^{(n-2)-(m-2)} + np = n \cdot (n-1) p^2 \underbrace{\sum_{m=2}^{n} C_{n-2}^{m-2} p^{m-2} \cdot q^{(n-2)-(m-2)}}_{(q+p)^{n-2}=1} +$$

$$+np = n \cdot (n-1) p^2 + np = n^2 p^2 - np^2 + np = M\xi^2$$

Можем найти значение дисперсии биномиальной случайной величины:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq .$$

2 способ.

Получим решение, используя аппарат производящих функций, которые очень подробно будут рассмотрены далее в теме «Характеристические и производящие функции».

Производящая функция – это функция вида:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 \cdot z^0 + p_1 \cdot z^1 + p_2 \cdot z^2 + p_3 \cdot z^4 + ..., \text{где } 0 < z \le 1 - \text{произвольный параметр.}$$

Значения степеней z: $0,1,2,...$ являются значениями дискретной случайной величины ξ, а коэффициенты данного степенного ряда p_i являются соответствующими им вероятностями.

Продифференцируем по z данную производящую функцию:

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\cdot z^k=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p_k\cdot z^{k-1}$$

Подставив $z=1,$ получим $\varphi'(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p_k=M\xi$ – математическое ожидание.

Получим производящую функцию для нужного нам биномиального распределения. Подставив вместо p_k вероятности значений случайной величины $P\{\xi=k\}=C_n^k p^k\cdot q^{n-k},\ k=\overline{0,n}$.

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\cdot z^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot(pz)^k\cdot q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot q^{n-k}\cdot(pz)^k=\{$$ используем бином Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\cdot b^k=(a+b)^n\ \}=(q+pz)^n.$$

Замечание: На самом деле для всех известных распределений производящие функции получены и всякий раз находить их нет необходимости. Если это специально не оговорено в задаче.

Продифференцируем по z нашу найденную производящую функцию:

$$\varphi'(z)=\left((q+pz)^n\right)'=n\cdot(q+pz)^{n-1}\cdot p$$

и при $z=1,$ получаем $\varphi'(1)==n\cdot\underbrace{(q+p)^{n-1}}_{1}\cdot p=n\cdot p=M\xi$.

Найдем дисперсию $D\xi$, которая равна:

$$D\xi=\varphi''(1)+\varphi'(1)-\left(\varphi'(1)\right)^2=M\xi^2-M^2\xi$$

Найдем вторую производную для $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\cdot z^k$:

$$\varphi''(z)=\left(n\cdot p\cdot(q+pz)^{n-1}\right)'=n\cdot(n-1)\cdot p^2\cdot(q+pz)^{n-2}$$

При $z=1,$ получаем: $\varphi''(1)=n\cdot(n-1)\cdot p^2$. Тогда окончательно дисперсия:

$$D\xi=\varphi''(1)+\varphi'(1)-\left(\varphi'(1)\right)^2=n\cdot(n-1)\cdot p^2+n\cdot p-n^2\cdot p^2=n^2\cdot p^2-n\cdot p^2+n\cdot p-n^2\cdot p^2$$
$$=n\cdot p-n\cdot p^2=n\cdot p\cdot(1-p)=n\cdot p\cdot q$$

Заключение: Результаты, полученные первым и вторым способами решения одинаковы. Но второй способ получения числовых характеристик с помощью производящей функции оказался гораздо быстрее.

Пример 10.7. Стрелок стреляет в цель до тех пор, пока не поразит её. Вероятность попадания при одном выстреле равна p. Результаты выстрелов независимы. ***Найти***: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа выстрелов.

Решение:

1. Введем событие $A = \{$ стрелок попал $\}; \overline{A} = \{$ стрелок не попал $\}$. По условию задачи:

$P(A) = p,\ P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Обозначим $\xi -$ число выстрелов до первого попадания.

Данная случайная величина не может иметь нулевого значения $\xi \neq 0$, так как хотя бы один выстрел стрелок сделать обязан, чтобы попасть или промахнуться.

Если $\xi = 1$, то это означает, что стрелок сразу попал при первом же выстреле и вероятность этого равна $P(A) = p$.

Если $\xi = 2$, то это означает, что первый раз стрелок не попал, а второй попал и вероятность этого события равна:

$$P(\overline{A} \cdot A) = P(\overline{A}) \cdot P(A) = q \cdot p$$

При $\xi = 3 \Rightarrow \{$ первые 2 раза не попал, а на третий попал $\}$:

$$P(\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) = q^2 \cdot p.$$

Рассуждая аналогично, можем получить все вероятности. Сделаем это и оформим их в ряд распределения:

ξ_i	*1*	*2*	*3*	…….	*k*	…….
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	…….	$q^{k-1} \cdot p$	…….

2. Найдем математическое ожидание $M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot p_i$. Для чего построим степенной ряд:

$$M\xi = 1 \cdot p + 2 \cdot q \cdot p + 3 \cdot q^2 \cdot p + ... + k \cdot q^{k-1} \cdot p + ... = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k \cdot q^{k-1}}_{\left(q^k\right)'} =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' = \{ \text{ т.к. сумма производных равна производной суммы } \} = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$. Это ряд геометрической прогрессии. Из курса математического анализа известно, что данный ряд сходится если $|q| < 1$ и его сумма равна: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – это первый член ряда. У нас $b_1 = q < 1$, поэтому $S = \frac{q}{1-q}$.

Подставим найденную сумму в выражение для $M\xi$:

$$M\xi = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \cdot \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \cdot \left(\frac{q' \cdot (1-q) - q \cdot (1-q)'}{(1-q)^2} \right) = p \cdot \left(\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} \right) = \frac{p}{(1-q)^2}$$

Так как $1 - q = p$, то окончательно $M\xi = \frac{1}{p}$.

3. Найдем дисперсию случайной величины $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi$.

Рассмотрим 2 варианта ее получения.

1 вариант

Ряд распределения случайной величины ξ^2 :

ξ_i^2	*1*	*4*	*9*	……	k^2	……
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	……	$q^{k-1} \cdot p$	……

По определению второй начальный момент $M\xi^2$ равен:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 p_i = 1 \cdot p + 4 \cdot q \cdot p + 9 \cdot q^2 \cdot p + ... + k^2 \cdot q^{k-1} \cdot p + ...,$$

Или $M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P\left(\xi = k^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} \cdot p = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1}$.

Найдем сумму полученного степенного ряда $p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1}$.

Проинтегрировав его почленно по q получим:

$$p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{q^k}{k} = p\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \{ \text{ вынесем } q \text{ за знак суммы } \} = p \cdot q\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \left\{ - \text{сумма ряда } \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \right.$$

была ранее найдена в $M\xi : S = \left.\frac{1}{(1-q)^2}\right\} = p \cdot q\frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{q}{(1-q)^2}$.

Для того чтобы записать сумму ряда $p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}$, нам нужно продифференцировать полученную «промежуточную» сумму $p \cdot \frac{q}{(1-q)^2}$ по q обратно.

$$p \cdot \left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' = p \cdot \left(\frac{q' \cdot (1-q)^2 - q \cdot \left((1-q)^2\right)'}{(1-q)^4}\right) = p \cdot \left(\frac{(1-q)^2 + 2q \cdot (1-q)}{(1-q)^4}\right) = p \cdot \left(\frac{1-q^2}{(1-q)^4}\right) = p \cdot \left(\frac{1+q}{(1-q)^3}\right)$$

;

Итак, окончательно сумма ряда $p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}$ равна $S = p \cdot \frac{1+q}{(1-q)^3}$, т.е. второй начальный момент:

$$M\xi^2 = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p\frac{1+q}{(1-q)^3} = p\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Подставляя $M\xi^2$ в выражение дисперсии, получаем: $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

2 вариант решения.

Найдем дисперсию случайной величины: $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi$.

Ряд распределения случайной величины ξ^2:

ξ_i^2	*1*	*4*	*9*	…….	k^2	…….
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	…….	$q^{k-1} \cdot p$	…….

По определению второй начальный момент $M\xi^2$ равен:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 p_i = 1\cdot p + 4\cdot q\cdot p + 9\cdot q^2\cdot p + ... + k^2\cdot q^{k-1}\cdot p + ...,$$

Или $M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\left(\xi = k^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}\cdot p = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}$.

Найдем сумму полученного степенного ряда.

$$M\xi^2 = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1+1)q^{k-1} = \underbrace{p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot q^{k-1}}_{1} + \underbrace{p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}}_{2}$$

а) Сумма ***<u>ряда 2</u>*** была оценена ранее при нахождении $M\xi$: $p\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{k\cdot q^{k-1}}_{\left(q^k\right)'} = \frac{1}{p}$.

б) Найдем сумму ***<u>ряда 1</u>*:**

$$p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot q^{k-1}\cdot\frac{q}{q} = p\cdot q\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot q^{k-2} = \left\{\ \text{т.к. } k\cdot(k-1)\cdot q^{k-2} = \frac{d^2\left(q^k\right)}{dq^2} = \left(q^k\right)''\ \right\} =$$

$$= p\cdot q\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)'' = p\cdot q\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'' = p\cdot q\left(\frac{q}{1-q}\right)'' = p\cdot q\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' = p\cdot q\left(\frac{2}{(1-q)^3}\right) = \frac{2p\cdot q}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

в) Тогда $M\xi^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2}$, и дисперсия случайной величины ξ – число выстрелов до первого попадания:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \frac{2q+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q-(1-p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

<u>Замечание:</u> Рассмотренная случайная величина, имеющая закон распределения: $P\left(\xi = k\right)) = q^{k-1}\cdot p,\ \ k = 1,2,3,.....$ и числовые характеристики: $M\xi = \frac{1}{p}, D\xi = \frac{q}{p^2},\ \ \sigma_\xi = \frac{\sqrt{q}}{p}$, называется случайной величиной, имеющей ***геометрическое распределение***.

<u>Пример 10.8.</u> Доказать что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ положительны, независимы и одинаково распределены, то

$$M\left\{\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+.....+\xi_n}\right\} = \frac{1}{n}$$

Решение:

1. Введем случайные величины:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+.....+\xi_n},\ \eta_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+.....+\xi_n},\ldots\ldots,\ \eta_n = \frac{\xi_n}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+.....+\xi_n}.$$

Поскольку ξ_i одинаково распределенные случайные величины, то и $\eta_i, i=\overline{1,n}$ также одинаково распределены.

Поэтому для математических ожиданий $M\eta_i$, $i=\overline{1,n}$, справедливо, что: $M\eta_1 = M\eta_2 = ... = M\eta_n$.

2. По свойству математического ожидания для любых случайных величин выполняется:

$$M\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} M\eta_i$$

Найдем $M\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\} = M\left\{\frac{\xi_1}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i} + \frac{\xi_2}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i} + ... + \frac{\xi_n}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}\right\} = M\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}\right\} = M\{1\} = 1 = \sum_{i=1}^{n} M\eta_i$.

3. А для суммы математических ожиданий $\sum_{i=1}^{n} M\eta_i$ (так как $M\eta_1 = M\eta_2 = ... = M\eta_n$) можем записать $\sum_{i=1}^{n} M\eta_i = M\eta_1 + M\eta_1 + ... + M\eta_1 = n \cdot M\eta_1$.

4. То есть мы можем записать из $M\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} M\eta_i$ соотношение: $1 = n \cdot M\eta_1$, откуда

$$M\eta_1 = M\left\{\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+.....+\xi_n}\right\} = \frac{1}{n}.$$

Утверждение доказано.

Пример 10.9. Случайная величина имеет равномерное распределение:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения; **б)** математическое ожидание; **в)** дисперсию; **г)** четвертый начальный момент случайной величины.

Решение:

1) Найдем функцию распределения. По определению:

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\,dy$$

а) Пусть $x\le a$, тогда так как при $x\notin[a,b]$, $p_\xi(x)=0$, то $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dy=0$;

б) Пусть $a<x\le b$, тогда $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi(y)\,dy=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dy+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dy=\frac{y}{b-a}\Big|_a^x=\frac{x}{b-a}-\frac{a}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}$;

в) Пусть $x>b$, тогда так как при $x\notin[a,b]$, $p_\xi(x)=0$, то $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dy+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dy+\int\limits_{b}^{x}0\,dy=$

$$=\frac{y}{b-a}\Big|_a^b=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1;$$

Итак, функция распределения равномерно распределенной случайной величины имеет вид:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

2) Найдем математическое ожидание и дисперсию. По определению:

$$M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot p_\xi(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad D\xi=M\xi^2-M^2\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot p_\xi(x)\,dx-\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot p_\xi(x)\,dx\right)^2.$$

У нас:

$$M\xi=\int\limits_{a}^{b}x\cdot p_\xi(x)\,dx=\int\limits_{b}^{b}x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{b+a}{2};$$

$$D\xi=\int\limits_{a}^{b}x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3) Найдем $M\xi^4$ четвертый начальный момент случайной величины, который по определению равен: $M\xi^4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot p_\xi(x)\,dx$. А для нашей случайной величины:

$$M\xi^4 = \int\limits_a^b x^4 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^5}{5}\Bigg|_a^b = \frac{b^5-a^5}{5(b-a)}.$$

Пример 10.10. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения двух независимых случайных величин ξ и η, если ξ равномерно распределена в промежутке $[0,1]$, а η – в $[1,3]$.

***Решение*:**

1 способ

1. По свойству математического ожидания для независимых случайных величин выполняется:

$$M(\xi\cdot\eta) = M(\xi)\cdot M(\eta)$$

Для обеих равномерно распределённых случайных величин можем найти математическое ожидание по формуле: $MX = \frac{b+a}{2}$, если $X \sim [a,b]$. У нас $\xi \sim [0,1]$, поэтому $M\xi = \frac{1}{2}$, а $\eta \sim [1,3]$, поэтому $M\eta = \frac{4}{2} = 2$. Используя полученное можем найти $M(\xi\cdot\eta) = M(\xi)\cdot M(\eta) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

2. Найдем дисперсию $D(\xi\cdot\eta)$.

Для дисперсии произведения ***n*** независимых случайных величин справедливо:

$D\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(D_i + m_i^2\right) - \prod\limits_{i=1}^{n} m_i^2$, где $D_i -$ дисперсия $i-$ой случайной величины, $m_i -$ математическое ожидание или первый начальный момент $i-$ой случайной величины.

Замечание: Записанную формулу можно переписать используя, что $D_i = D(\xi_i) = M\xi_i^2 - M^2\xi_i$.

$$D\left(\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(D_i + m_i^2\right) - \prod_{i=1}^{n} m_i^2 = \prod_{i=1}^{n}\alpha_{2i} - \prod_{i=1}^{n} m_i^2,$$

где $\alpha_{2i} = D_i + m_i^2 = M\xi_i^2 - M^2\xi_i + m_i^2 = \{$ т.к. $m_i^2 = M^2\xi_i \} = M\xi_i^2 -$ это второй начальный момент ***i*-**ой случайной величины.

У нас даны две случайные величины, поэтому дисперсия их произведения равна:

$$D(\xi\cdot\eta) = \left[D(\xi) + (M\xi)^2\right]\cdot\left[D(\eta) + (M\eta)^2\right] - (M\xi)^2\cdot(M\eta)^2 \qquad (*)$$

или

$$D(\xi\cdot\eta)=\alpha_{2\xi}\cdot\alpha_{2\eta}-(M\xi)^2\cdot(M\eta)^2=M\xi^2\cdot M\eta^2-(M\xi)^2\cdot(M\eta)^2 \qquad (**)$$

Так как дисперсия равномерно распределённой случайной величины $X\sim[a,b]$, равна $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$ то для $\xi\sim[0,1]$, $D\xi=\frac{1}{12}$, а для $\eta\sim[1,3]$, $D\eta=\frac{1}{3}$. Подставив значения дисперсий и математических ожиданий $M\xi=1/2$, $M\eta=2$ в формулу $(*)$, получаем окончательно для искомой дисперсии:

$$D(\xi\cdot\eta)=\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right]\cdot\left[\frac{1}{3}+4\right]-\frac{1}{4}\cdot4=\frac{4}{12}\cdot\frac{13}{3}-1=\frac{13}{9}-\frac{9}{9}=\frac{4}{9}.$$

Если использовать формулу $(**)$ то предварительно необходимо найти вторые начальные моменты обеих случайных величин.

Для ξ:

$M(\xi^2)=\alpha_{2\xi}=\int\limits_0^1 x^2p_\xi(x)dx=\int\limits_0^1 x^2\frac{1}{1-0}dx=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$, где плотность $p_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\in[0,1]\\1,\ x\notin[0,1]\end{cases}$.

Для η:

$$M(\eta^2)=\alpha_{2\eta}=\int\limits_1^3 x^2p_\eta(x)dx=\int\limits_1^3 x^2\frac{1}{3-1}dx=\int\limits_1^3 x^2\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{13}{3},$$

где плотность $p_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\in[1,3]\\1/2,\ x\notin[1,3]\end{cases}$.

Тогда $D(\xi\cdot\eta)=\alpha_{2\xi}\cdot\alpha_{2\eta}-(M\xi)^2\cdot(M\eta)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot2^2=\frac{13}{9}-1=\frac{13-9}{9}=\frac{4}{9}$.

2 способ

Рассмотрим второй способ нахождения дисперсии произведения двух случайных величин $D(\xi\cdot\eta)$.

Обозначим $\zeta=\xi\cdot\eta$ – случайная величина, для которой справедливо:

$$D\zeta=D(\xi\cdot\eta)=M(\zeta^2)-M^2\zeta=M(\xi^2\cdot\eta^2)-M^2(\xi\cdot\eta)$$

Рассмотрим $M(\xi^2\cdot\eta^2)$, известно, что ξ и η независимые случайные величины, следовательно ξ^2 и η^2 являются также независимыми случайными величинами. Поэтому по свойству математического ожидания для независимых случайных величин:

$$M(\xi^2\cdot\eta^2)=M(\xi^2)\cdot M(\eta^2)$$

Ранее были найдены вторые начальные моменты обеих величин:

$$M\left(\xi^2\right)=\alpha_{2\xi}=\frac{1}{3},\ M\left(\eta^2\right)=\alpha_{2\eta}=\frac{13}{3},$$

Тогда $M\left(\xi^2\cdot\eta^2\right)=M\left(\xi^2\right)\cdot M\left(\eta^2\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{3}=\frac{13}{9}$.

Поскольку $M^2\left(\xi\cdot\eta\right)=M\left(\xi\cdot\eta\right)\cdot M\left(\xi\cdot\eta\right)=\left[M\left(\xi\right)\cdot M\left(\eta\right)\right]^2$, т.к. $M\left(\xi\cdot\eta\right)=M\left(\xi\right)\cdot M\left(\eta\right)-$ для независимых случайных величин.

У нас $M^2\left(\xi\cdot\eta\right)=\left[M\left(\xi\right)\cdot M\left(\eta\right)\right]^2=\left[\frac{1}{2}\cdot 2\right]^2=1$.

И окончательно для дисперсии независимых случайных величин можем записать:

$$D\zeta=D\left(\xi\cdot\eta\right)=M\left(\xi^2\cdot\eta^2\right)-M^2\left(\xi\cdot\eta\right)=\frac{13}{9}-1=\frac{4}{9}.$$

Получили аналогичный результат.

Пример 10.11. Случайная величина имеет распределение

$$p_\xi\left(x\right)=\begin{cases}x/2, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$$

Найти **а)** функцию распределения; **б)** математическое ожидание; **в)** центральный момент третьего порядка случайной величины.

Решение:

1. Запишем функцию распределения, которая определяется так: $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi\left(y\right)dy$

Пусть $x\le 0$, тогда $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi\left(y\right)dy=\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dy=0$,

Пусть $0<x\le 2$, тогда $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dy+\int\limits_{0}^{x}\frac{y}{2}dy=\frac{x^2}{4}$,

Пусть $x>2$, тогда $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dy+\int\limits_{0}^{2}\frac{y}{2}dy+\int\limits_{2}^{x}0\,dy=\left.\frac{y^2}{4}\right|_0^2=1$.

2. Найдем математическое ожидание по формуле $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot p_\xi(x)\,dx$: $M\xi=\int\limits_{0}^{2}x\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3}$.

3. Найдем центральный момент третьего порядка случайной величины ξ. Который по определению равен $M\left(\xi - M\xi\right)^3$. Можем найти данный центральный момент двумя способами.

1 способ.

Так как $M\left(\xi - M\xi\right)^3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x - Mx\right)^3 \cdot p_\xi\left(x\right) dx$, то

$$M\left(\xi - M\xi\right)^3 = \int\limits_0^2 \left(x - \underbrace{\frac{4}{3}}_{M\xi} \right)^3 \cdot p_\xi(x)\, dx = \int\limits_0^2 \left(x - \underbrace{\frac{4}{3}}_{M\xi} \right)^3 \cdot \frac{x}{2} dx = \int\limits_0^2 \left(x^3 - 3x^2 \cdot \frac{4}{3} + 3x \cdot \frac{16}{9} - \frac{64}{27} \right) \cdot \frac{x}{2} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x^3 - 4x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{64}{27} \right) \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + \frac{16}{3}x^2 - \frac{64}{27}x \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{16}{9}x^3 - \frac{32}{27}x^2 \right) \Bigg|_0^2 = -\frac{8}{135}.$$

2 способ. Получим предварительно формулу для третьего центрального момента:

$M\left(\xi - M\xi\right)^3 = M\left(\xi^3 - 3\xi^2 M\xi + 3\xi \cdot M^2\xi - M^3\xi\right) = \Big\{ -$ будем использовать при раскрытии скобок три свойства математического ожидания: $M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} M\xi_i$, $M\left(C \cdot \xi\right) = C \cdot M\xi$ и $M\left(C\right) = C$, из последнего свойства следует, что $M\left(M^3\xi\right) = M^3\xi,\ M\left(M^2\xi\right) = M^2\xi,\ M\left(M\xi\right) = M\xi - \Big\} =$

$$= M\xi^3 - M\left(3\xi^2 \cdot M\xi\right) + M\left(3\xi \cdot M^2\xi\right) - M\left(M^3\xi\right) = = M\xi^3 - 3M\xi^2 \cdot M\xi + 3M\xi \cdot M^2\xi - M^3\xi.$$

Найдем начальные моменты, входящие в формулу $M\xi, M\xi^2, M\xi^3$:

$$M\xi^3 = \int\limits_0^2 x^3 \cdot p_\xi(x)\, dx = \int\limits_0^2 x^3 \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{5},\quad M\xi^2 = \int\limits_0^2 x^2 \cdot p_\xi(x)\, dx = \int\limits_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = 2,$$

$$M\xi = \int\limits_0^2 x \cdot p_\xi(x)\, dx = \int\limits_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Подставив найденные значения в выведенную формулу для, получаем:

$$M\left(\xi - M\xi\right)^3 = M\xi^3 - 3M\xi^2 \cdot M\xi + 3M\xi \cdot M^2\xi - M^3\xi = \frac{16}{5} - 3 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{9} - \frac{64}{27} = -\frac{8}{135}.$$

В обоих случаях результат получен одинаковый.

Пример 10.12. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ a + b\arcsin x, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Найти: **а)** коэффициенты a,b; **б)** математическое ожидание; **в)** дисперсию случайной величины.

***Решение*:**

1) Найдем коэффициенты a,b. Для чего используем выражение плотности распределения вероятностей $p_\xi(x)$ случайной величины ξ. Продифференцировав функцию распределения, получаем:

$$p_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=\begin{cases} 0, & x<-1,\ x\ge 1 \\ \dfrac{b}{\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x<1 \end{cases}$$

Условие нормировки в общем виде: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx=1$. Для нашей случайной величины:

$$\int\limits_{-1}^{1} p_\xi(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=1 \qquad (*)$$

Можем найти коэффициент b из $(*)$.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=b\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=b\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=b\pi=1,\ \text{откуда}\ b=1/\pi\,.$$

Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством непрерывности функции распределения в точке $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1+0}F_\xi(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}F_\xi(x)=F_\xi(1)$. Подставив выражение $F_\xi(x)$,найдем пределы:

$$\lim_{x\to 1+0}F_\xi(x)=1;\ \lim_{x\to 1-0}F_\xi(x)=\lim_{x\to 1-0}a+\frac{1}{\pi}\arcsin x=a+\frac{1}{2},\ F_\xi(1)=1\,.$$

Откуда $a+\dfrac{1}{2}=1,\ a=1/2$.

Запишем функцию распределения и плотность случайной величины ξ в уточненном виде:

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x<1; \\ 1, & x\ge 1 \end{cases} \qquad p_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<-1,\ x\ge 1 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x<1 \end{cases}$$

2) Найдем математическое ожидание случайной величины ξ. По определению:

$$M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot p_\xi(x)\,dx$$

У нас:

$$M\xi = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\left(x^2/2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\pi}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} = 0;$$

Это ожидаемый результат, т.к. подынтегральная функция нечетная и промежуток интегрирования симметричный.

3) Найдем дисперсию случайной величины ξ. По определению:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x)\,dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)\,dx\right)^2$$

Поскольку $M^2\xi = \left(\int\limits_{-1}^{1} x \cdot p_\xi(x)\,dx\right)^2 = 0$. Найдем второй начальный момент:

$$M\xi^2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Входящий в $M\xi^2$ интеграл $-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ нашли так:

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} x = \sin t \\ t = arc\sin x \\ dx = \cos t dt \end{array}\right\} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{2}$$

А второй интеграл так: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\arcsin\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

И окончательно математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны:

$$M\xi = 0,\ D\xi = 1/2.$$

Пример 10.13. Доказать, что начальные и центральные моменты случайной величины ξ связаны формулами:

1) $\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$,

2) $\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1$,

где $\mu_j - j$-ый центральный момент, $j = 3,4$; $m_i - i$-ый начальный момент, $i = 1,2,3,4$.

Решение: Воспользуемся определением центральных моментов и свойствами математического ожидания.

1) Для третьего центрального момента запишем:

$$\mu_3 = M\left(\xi - M\xi\right)^3 = M\left\{\xi^3 - 3\xi^2 M\xi + 3\xi M^2\xi - M^3\xi\right\} = M\xi^3 - 3M\xi^2 M\xi + 3M\xi M^2\xi - M^3\xi =$$

$$= m_3 - 3m_1m_2 + 2{m_1}^3.$$

2) Для четвертого центрального момента запишем:

$$\mu_4 = M\left(\xi - M\xi\right)^4 = M\left\{\xi^4 - 4\xi^3 M\xi + 6\xi^2 M^2\xi - 4\xi M^3\xi + M^4\xi\right\} =$$

$$= M\xi^4 - 4M\xi^3 M\xi + 6M\xi^2 M^2\xi - 4M\xi M^3\xi + M^4\xi = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 4m_1m_1^3 + m_1^4 =$$

$$= m_4 - 4m_1m_3 + 6{m_1}^2m_2 - 3m_1.$$

Пример 10.14. Плотность вероятностей случайной величины имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,\ x > 2 \\ \dfrac{3}{2}x^2, & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первых трёх порядков: $m_1, m_2, m_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

Решение:

Найдем начальные моменты по определению:

$$m_1 = M\xi = \int_0^1 x\cdot\left(\frac{3}{2}x^2\right)dx + \int_1^2 x\cdot\left(\frac{3}{2}(2-x)^2\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^3dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 + \frac{3}{2}\int_1^2 (4x - 4x^2 + x^3)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{4x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + 4 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1.$$

Для второго и третьего моментов соответственно запишем выражения:

$$m_2 = M\xi^2 = \int_0^1 x^2\cdot\left(\frac{3}{2}x^2\right)dx + \int_1^2 x^2\cdot\left(\frac{3}{2}(2-x)^2\right)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{3}{2}\int_1^2\left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{2}\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\bigg|_1^2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{2}\left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - \frac{4}{3} + 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10} + \frac{8}{10} = \frac{11}{10},$$

$$m_3 = M\xi^3 = \int_0^1 x^3\cdot\left(\frac{3}{2}x^2\right)dx + \int_1^2 x^3\cdot\left(\frac{3}{2}(2-x)^2\right)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^6}{6}\bigg|_0^1 + \frac{3}{2}\int_1^2\left(4x^3 - 4x^4 + x^5\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(x^4 - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(16 - 4\frac{32}{5} + \frac{64}{6} - 1 + \frac{4}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{4} + \frac{21}{20} = \frac{26}{10}.$$

Теперь найдем центральные моменты, используя начальные:

$$\mu_1 = M(\xi - M\xi) = m_1 - m_1 = 0,$$

$$\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi M\xi + M^2\xi\right) = M\xi^2 - 2M^2\xi + M^2\xi =$$
$$= M\xi^2 - M^2\xi = m_2 - m_1^2,$$

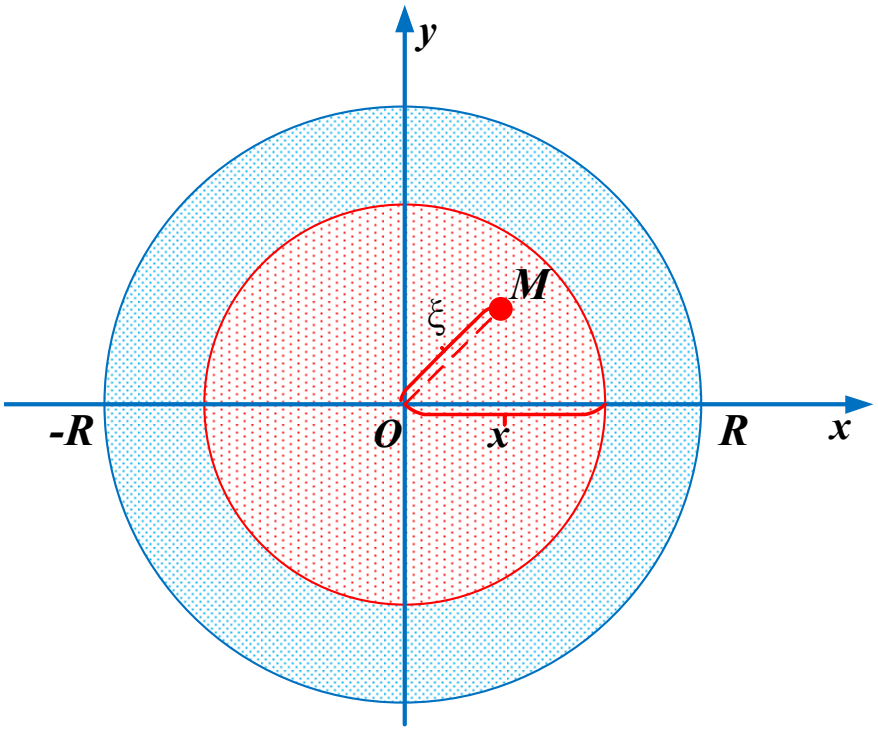
$$\mu_2 = \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10},$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \qquad \text{(см. } \textbf{\textit{пример 10.13}}\text{)},$$

$$\mu_3 = \frac{26}{20} - 3\cdot 1\cdot\frac{11}{10} + 2\cdot 1^3 = \frac{26 - 66 + 40}{20} = 0.$$

Пример 10.15. Точка M, брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. ***Найти*** математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки до центра круга.

Решение: Пусть случайная величина ξ – расстояние от точки M до центра круга.



1) Чтобы найти $M\xi$ и $D\xi$, нам необходимо знать закон распределения вероятностей случайной величины ξ. Найдём функцию распределения $F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}$.

Теоретически, значение x может быть таким: $x \le 0,\ 0 < x \le R,\ x > R.$

Найдём $P\{\xi < x\}$. Событие $\xi < x$ означает, что точка M попала в круг радиуса x. Используя геометрическое определение вероятности, можем найти эту вероятность.

$\mathrm{P}\{\xi < x\} = \dfrac{\pi x^2}{\pi R^2}$, где πx^2 – площадь круга радиуса x, т.е. $\mathrm{P}\{\xi < x\} = \dfrac{x^2}{R^2}$. Тогда выражение для функции распределения будет иметь вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0 < x \le R, \\ 1, & x > R. \end{cases} \qquad (*)$$

При $x>R$ $F_\xi(x) = 1$, так как при таком значении x расстояние от точки M до центра круга будет точно меньше x, т.е. событие $\xi < x$ будет достоверным.

2) Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины ξ: $p_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$

3) Мы найдем плотность во всех точках $0 < x < R$, кроме $x = R$. В данной точке функция распределения непрерывна, но не дифференцируема. В подобных случаях значение $p_\xi(R)$ несущественно. Таким образом, можем записать:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2}, & 0 < x < R, \\ 0, & x \le 0,\ x > R. \end{cases}$$

4) Покажем, что функция распределения в точке $x = R$ не дифференцируема. Для этого нужно найти односторонние производные в этой точке. Если они существуют и равны друг другу, то функция в этой точке дифференцируема.

Найдем односторонние производные, используя определение производной функции:

левосторонняя производная в точке $x = R$:

$$F'_-(R) = \lim_{x \to R-0} \frac{F(x) - F(R)}{x - R} = \lim_{x \to R-0} \frac{\dfrac{x^2}{R^2} - 1}{x - R} = \frac{1}{R^2} \lim_{x \to R-0} \frac{x^2 - R^2}{x - R} = \frac{1}{R^2} \lim_{x \to R-0} (x + R) = \frac{2R}{R^2} = \frac{2}{R};$$

правосторонняя производная в точке $x = R$:

$F'_+(R) = \lim\limits_{x \to R+0} \dfrac{F(x) - F(R)}{x - R} = \lim\limits_{x \to R-0} \dfrac{1-1}{x-R} = 0$ (Так как $F(x) = 1$, если $x > R$).

Очевидно, односторонние производные не равны друг другу, значит, в точке $x = R$ функция распределения не дифференцируема.

Проверим на непрерывность функцию распределения в точке $x = R$. По определению непрерывности в точке, если односторонние пределы в точке равны между собой и равны значению функции в этой точке, то функция непрерывна. Найдем левосторонний и правосторонний пределы:

$$\lim_{x \to R-0} F(x) = \lim_{x \to R-0} \frac{x^2}{R^2} = 1, \quad \lim_{x \to R+0} F(x) = 1, \text{ и } F(R) = 1 \text{ (см. *).}$$

Таким образом, функция распределения непрерывна в точке $x = R$, но не дифференцируема.

5) Найдём математическое ожидание и дисперсию:

$$M\xi = \int_0^R x \cdot \frac{2x}{R^2} dx = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} R,$$

$$M\xi^2 = \int_0^R x^2 \cdot \frac{2x}{R^2} dx = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^R = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} R^2,$$

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi = \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9} = \frac{R^2}{18}, \ \sigma_\xi = \frac{R\sqrt{2}}{6}.$$

Пример 10.16. Дана случайная величина ξ, распределенная по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$. При какой дисперсии вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $0 < a < \xi < b$ будет наибольшей.

Решение:

1) Сначала запишем плотность вероятностей случайной величины, имеющей нормальный закон распределения $N(a, \sigma^2)$: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a = M\xi$, $\sigma^2 = D\xi$.

Так как у нас $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, то её плотность будет иметь вид $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

2) Для непрерывной случайной величины вероятность попадания в интервал равна $\mathrm{P}\{a<\xi<b\}=\int_a^b p_\xi(x)\,dx$. Для нормальной случайной величины справедливо:

$$\mathrm{P}\{a<\xi<b\}=\Phi\left(\frac{b-M\xi}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-M\xi}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – табулированная функция Лапласа.

При $M\xi=0$ вероятность попадания в интервал будет равна:

$$\mathrm{P}\{a<\xi<b\}=\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{b/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\varphi(\sigma)$$

Мы обозначили вероятность $P(a<\xi<b)$ как функцию, зависящую от σ, т.к. при различных значениях σ вероятность попадания ξ в интервал (a,b) очевидно будет разная.

И теперь нужно найти такое значение σ, при котором вероятность $\mathrm{P}\{a<\xi<b\}=\varphi(\sigma)$ будет наибольшей. Т.е. необходимо решить задачу на нахождение экстремума функции одной переменной. Для этого сначала продифференцируем $\varphi(\sigma)$, затем приравняем $\varphi'(\sigma)$ к нулю.

Чтобы найти $\varphi'(\sigma)$ нужно продифференцировать интеграл с переменным верхним пределом.

$$\varphi'(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{b/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'_\sigma-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{a/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'_\sigma$$

Согласно свойству: $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x)$.

У нас переменный верхний предел – это функция, поэтому

$$\left(\int_0^{g(x)} f(t)\,dt\right)'_x=f(g(x))\cdot g'(x)$$

Рассмотрим $\left(\int_0^{b/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'_\sigma$. Дифференцируя по переменному верхнему пределу, получаем:

$$\left(\int_0^{b/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'_\sigma=e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(\frac{b}{\sigma}\right)'=-b\frac{e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2},$$

Аналогично:

$$\left(\int_0^{a/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)_\sigma' = e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(\frac{a}{\sigma}\right)_\sigma' = -\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

Таким образом

$$\varphi'(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{b}{\sigma^2}e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} + \frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^2}\left(-be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} + ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right)$$

Приравнивая к нулю, получаем:

$$\varphi'(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^2}\left(-be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} + ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right) = 0 \;\Rightarrow -be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} + ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} = 0$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^2} \neq 0$.

Прологарифмируем выражение $a\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} = b\cdot e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}} \;\Rightarrow\; \ln\left(b\cdot e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right) = \ln\left(a\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right)$

Используя свойства функции ln (.): $\ln(ab) = \ln a + \ln b,\ \ln e^x = x$, можем записать:

$$\ln\left(b\cdot e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right) = \ln b + \ln\left(e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right) = \ln b - \frac{b^2}{2\sigma^2}\cdot\ln(e) = \ln b - \frac{b^2}{2\sigma^2};$$

$$\ln\left(a\cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right) = \ln a + \ln\left(e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right) = \ln a - \frac{a^2}{2\sigma^2}\cdot\ln(e) = \ln a - \frac{a^2}{2\sigma^2};$$

Или $\ln b - \frac{b^2}{2\sigma^2} = \ln a - \frac{a^2}{2\sigma^2}$. Откуда $\ln b - \ln a = \frac{b^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2\sigma^2} = \frac{b^2-a^2}{2\sigma^2};\ \ln b - \ln a = \frac{b^2-a^2}{2\sigma^2};$

$2\sigma^2 = \frac{b^2-a^2}{\ln b - \ln a} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{b^2-a^2}{2(\ln b - \ln a)}$.

Таким образом, для точки экстремума получили выражение:

$$\sigma^2 = \frac{b^2-a^2}{2(\ln b - \ln a)}.$$

Это значение дисперсии, при котором $P(0 < a < \xi < b)$ имеет наибольшее значение.

Убедимся, что найденная точка (обозначим её $\bar{\sigma}$) – это точка максимума, для чего оценим значение $\varphi''(\sigma)$ в точке $\bar{\sigma}$. Если $\varphi''(\bar{\sigma})<0$, то $\bar{\sigma}$ – точка максимума (согласно достаточному условию существования экстремумов).

Найдем вторую производную:

$$\varphi''(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2b}{\sigma^3}e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}-\frac{b^3}{\sigma^5}e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}+\frac{a^3}{\sigma^5}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}-\frac{2a}{\sigma^3}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2b}{\sigma^3}e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right)-\frac{2a}{\sigma^3}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{\sigma^3}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}\left[\frac{b}{a}e^{-\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right)-\left(1-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

Оценим значение $\varphi''(\sigma)$ в точке $\bar{\sigma}$.

Сомножитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2a}{\bar{\sigma}^3}e^{-\frac{a^2}{2\bar{\sigma}^2}}>0$, так как $\bar{\sigma}>0$ по определению, $a>0$ из условия задачи, $e^{-\frac{a^2}{2\bar{\sigma}^2}}>0$ как знакоположительная функция.

Выражение в квадратных скобках $\left[\frac{b}{a}e^{-\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right)-\left(1-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right]$ принимает отрицательное значение после подстановки $\bar{\sigma}^2=\frac{b^2-a^2}{2(\ln b-\ln a)}$. Проверим это.

Подставляя

$$\bar{\sigma}^2=\frac{b^2-a^2}{2(\ln b-\ln a)}$$

в

$$\frac{b}{a}e^{-\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}},$$

получаем

$$\frac{b}{a}e^{-\frac{b^2-a^2}{2\bar{\sigma}^2}}=\frac{b}{a}\ e^{-\frac{b^2-a^2}{2\cdot\frac{b^2-a^2}{2(\ln b-\ln a)}}}=\frac{b}{a}\ e^{-\frac{b^2-a^2}{\frac{b^2-a^2}{(\ln b-\ln a)}}}=\frac{b}{a}e^{-(\ln b-\ln a)}=\frac{b}{a}e^{\ln a-\ln b}=\frac{b}{a}e^{\ln\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

Так как $\frac{b}{a}e^{-\frac{b^2-a^2}{2\bar{\sigma}^2}}=1$ и $b>a$, то

$$\frac{b}{a}e^{-\frac{b^2-a^2}{2\bar{\sigma}^2}}\left(1-\frac{b^2}{2\bar{\sigma}^2}\right)-\left(1-\frac{a^2}{2\bar{\sigma}^2}\right)=1-\frac{b^2}{2\bar{\sigma}^2}-1+\frac{a^2}{2\bar{\sigma}^2}=\frac{a^2-b^2}{-\left(a^2-b^2\right)}\cdot\left(\ln b-\ln a\right)<0.$$

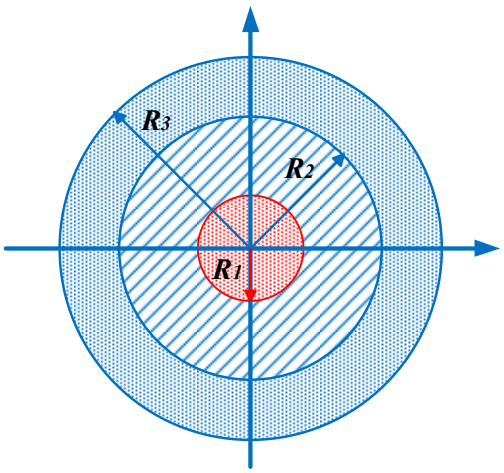
Таким образом, $\varphi''(\bar{\sigma})<0$ и при дисперсии $\sigma^2=\dfrac{b^2-a^2}{2(\ln b-\ln a)}$ вероятность попадания случайной величины ξ в интервал (a,b) будет наибольшей.

Пример 10.17. Мишень состоит из круга радиуса $1/\sqrt{3}$ и двух концентрических колец с радиусами внешних окружностей 1 и $\sqrt{3}$. Попадание в центральный круг приносит 4 очка, в среднее кольцо – 3 очка, в крайнее кольцо – 2 очка. Случайное расстояние r между центром мишени и следом попавшей в мишень пули имеет распределение с плотностью вероятности $p(r)=\dfrac{2}{\pi(1+r^2)}$, $r\geq 0$.

Найти математическое ожидание числа очков, выбитых при пяти выстрелах.

Решение:

Из условия задачи известно, что дана мишень вида: $R_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $R_2=1$, $R_3=\sqrt{3}$.



Рассмотрим три события:

$$A=\{\text{ попали в круг радиуса } R_1\ \};\ B=\{\text{ попали в среднее кольцо } R_2-R_1\ \};$$

$$C=\{\text{ попали в крайнее кольцо } R_3-R_2\ \}.$$

Пусть ξ – случайная величина, равная расстоянию от центра до точки попадания пули в мишень. Эта случайная величина имеет распределение Коши с плотностью:

$$p_\xi(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)},\ x\in(-\infty,\infty).$$

Обозначим $\eta -$ случайную величину, определяющую число очков, выбитых при 5-ти выстрелах. Тогда в задаче нужно найти $M\eta$.

1) Случайная величина ξ – может оказаться в следующих интервалах:

$$0 \le \xi \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \xi \le 1, \quad 1 < \xi \le \sqrt{3}, \; \xi > \sqrt{3}.$$

Попадание случайной величины в каждую из этих областей приносит определенное число очков:

при наступлении события A, случайная величина попадает в интервал $0 \le \xi \le 1/\sqrt{3}$ и приносит 4 очка, при наступлении события B в интервал $1/\sqrt{3} < \xi \le 1$ и игрок набирает 3 очка, при наступлении C в интервал $1 < \xi \le \sqrt{3}$ и соответственно 2 очка. В случае $\xi > \sqrt{3}$ пуля в мишень не попадает.

2) По условию задачи нам известна плотность распределения ξ, значит мы можем найти вероятность попадания этой случайной величины в любой из указанных интервалов:

$$\mathrm{P}\left\{0 \le \xi \le \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}} < \xi \le 1\right\} = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}\left\{1 < \xi \le \sqrt{3}\right\} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}\left\{\xi > \sqrt{3}\right\} = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}\,dx = \lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_{\sqrt{3}}^{A} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Последнюю вероятность $\mathrm{P}\left\{\xi > \sqrt{3}\right\}$ можно вычислить и так: $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, используя условие нормировки.

3) Чтобы найти математическое ожидание числа очков $M\eta$, выбитых при 5-ти выстрелах, введем дискретную случайную величину $\gamma_i -$ число очков при *i*-ом выстреле, $i = \overline{1,5}$. Запишем распределение случайной величины γ_i, $i = \overline{1,5}$ в виде следующего ряда:

γ_i	0	2	3	4
p_i	1/3	1/6	1/6	1/3

Найдем математическое ожидание γ_i: $M\gamma_i = 0\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$.

Тогда математическое ожидание $\eta=\sum_{i=1}^{5}\gamma_i$ равно:

$$M\eta = M\sum_{i=1}^{5}\gamma_i = \sum_{i=1}^{5}M\gamma_i = 5\cdot\frac{13}{6}=\frac{65}{6},$$

где мы учли свойство математического ожидания: математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин, равно сумме математических ожиданий.

Пример 10.18. Случайная величина ξ ограниченна с вероятностью $\mathrm{P}\{|\xi|\le c\}=1$. Доказать, что $D\xi \le c\cdot M|\xi|$.

Решение:

1) По определению дисперсия равна: $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi$, откуда следует, что $D\xi \le M\xi^2$.

2) То есть $D\xi \le M\xi^2 = M|\xi|^2 = M\{|\xi|\cdot|\xi|\} = \{$ так как $c\ge|\xi|$ $\} \le M\{c\cdot|\xi|\} = c\cdot M|\xi|$

Задачи по теме 10

10.1. Случайная величина принимает три возможных значения 1, 2 и ξ_3 с вероятностями 0.1, 0.5 и p_3 соответственно. Известно, что $M\{\xi\}=2,3$. Найти ξ_3 и p_3.

10.2. Найти математическое ожидание случайной величины ζ, если $\zeta=\xi+3\eta$ и $M\{\xi\}=2, M\{\eta\}=4.$

10.3. ξ и η – независимые случайные величины. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ζ, если $\zeta=\xi+3\eta$, а $D\{\xi\}=5$, $D\{\eta\}=6.$

10.4. Брошены 7 игральных костей. Найти дисперсию суммы числа очков, которые появятся на всех выпавших гранях.

10.5. Из партии, содержащей 10 деталей, среди которых две бракованных, взяты наудачу три детали. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

10.6. В схеме Бернулли найти вероятность появления события A в каждом испытании, если дисперсия числа появлений события A в трёх независимых испытаниях равна 0.63.

10.7. Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=e^{\alpha X}$.

10.8. Случайная величина имеет равномерное распределение

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x\in(1,4),\\ 0, & x\notin(1,4).\end{cases}$$

Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и третий начальный момент случайной величины.

10.9. Найти математическое ожидание и дисперсию экспоненциально распределенной случайной величины. Найти вероятность того, что ξ примет значение меньше своего математического ожидания.

10.10. Диаметр круга X измерен приближенно, причем $a\le X\le b$. Рассматривая диаметр круга как случайную величину, распределенную равномерно в $[a,b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

10.11. Пусть случайная величина $\zeta=\xi+\eta$, где ξ,η независимые случайные величины, имеющие центральные моменты 3-го порядка μ_3^ξ, μ_3^η. Доказать, что центральный момент 3-го порядка случайной величины ζ определяется так: $\mu_3=\mu_3^\xi+\mu_3^\eta$.

10.12. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2(b+x)}{b(a+b)}, & -b<x\le 0,\\ \dfrac{2(a-x)}{a(a+b)}, & 0<x\le a.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию ξ.

10.13. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{3}{4}(2x-x^2), & 0<x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ***X***.

10.14. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<3\\ C(x-3)^2, 3\le x\le 5\\ 1, x>5\end{cases}$$

***Найти*:** Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.15. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x\le 0,\ x>\pi.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.16. Случайная величина ξ задана плотностью распределения вероятности:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin x, & 0<x\le C\\ 0, & x>C\end{cases}$$

Найти: **а)** константу C; математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.17. При каких значениях параметров k и b функция

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\ kx+b, -1<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

может быть функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины ξ.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.18. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4}, x\geq 1\\ 0, x<1\end{cases}$$

Найти: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.19. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{4-x^2}}, |x|<2\\ 0, |x|>2\end{cases}$$

Найти: **а)** значение параметра C; **б)** математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

10.20. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ a+b\arcsin x, -1\leq x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$$

Найти: **а)** коэффициенты a, b; **б)** функцию плотности распределения случайной величины ξ; **в)** математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.21. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1\\ a\cdot\dfrac{\ln x}{x^3}, & x>1\end{cases}$$

Найти: **а)** значение параметра a; **б)** математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.22. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью:

$$P_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 0{,}3\cdot e^{-0{,}3t}, & t\geq 0\end{cases}$$

Найти: **а)** функцию распределения вероятностей $F_T(t)$; **б)** математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T.

10.23. Нормально распределенная случайная величина ξ задана своей плотностью:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.24. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}}, & 4 < x \le 16 \\ 0, & x \le 4, x > 16 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

10.25. В единичный квадрат наугад бросается точка. Пусть случайная величина ξ – расстояние от точки до фиксированной диагонали квадрата. Записать для данной случайной величины функцию плотности и найти все основные числовые характеристики.

Тема 11. Законы распределения многомерных случайных величин. Зависимость случайных величин

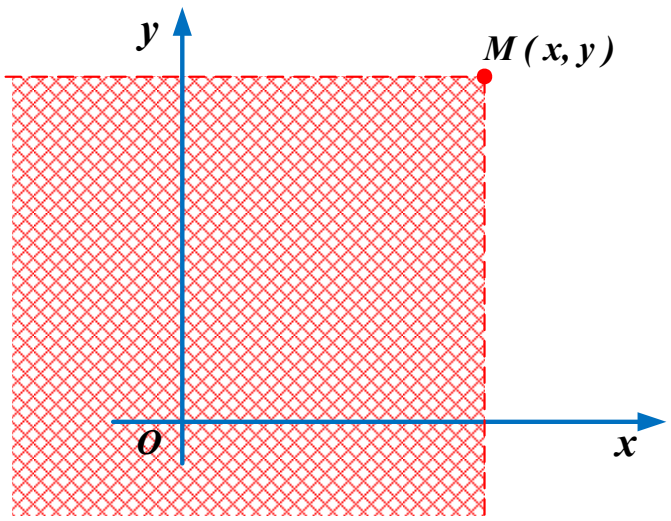
Иногда в результате опыта получают не одну, а несколько случайных величин. В этом случае говорят о ***многомерной случайной величине*** $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ **(*случайном векторе*** *или* ***системе случайных величин*****)**.

Например, погоду в определенном месте в определенное время суток можно охарактеризовать следующими случайными величинами: ξ_1 – температура, ξ_2 – давление, ξ_3 – влажность воздуха, ξ_4 – скорость ветра; любого человека можно охарактеризовать величинами: вес, рост, возраст, размер одежды, размер обуви и т.д.

Основной характеристикой *n*-мерной случайной величины является *n*-мерная функция распределения

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots \xi_n < x_n\}.$$

Например, при $n = 2$ непрерывная многомерная случайная величина может интерпретироваться как случайная точка на плоскости, а при n =3 – как случайная точка в пространстве. Функцией распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ системы двух случайных величин (ξ, η) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $\xi < x$, $\eta < y$, т.е. $F_{\xi\eta}(x, y) = \mathrm{P}\{\xi < x,\ \eta < y\}$. Геометрически $F_{\xi\eta}(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрант с вершиной M (x, y) (заштрихованный на рисунке):



Если $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ абсолютно непрерывна, то *n*-мерная случайная величина называется непрерывной. Тогда существует плотность распределения *n*-мерной случайной величины, которая определяется как смешанная частная производная *n*-го порядка функции распределения

$$p(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Тогда функция распределения через плотность выражается следующей формулой

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n .$$

Дискретные *n*-мерные случайные величины характеризуются совокупностью вероятностей $\mathrm{P}\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots \xi_n = i_n\}$. Функция распределения для таких величин выражается в виде кратной суммы

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i_1 < x_1,\, i_2 < x_2} \sum \dots \sum_{i_n < x_n} P\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots \xi_n = i_n\},$$

где суммирование производится по всем возможным значениям каждой из случайных величин, для которых $i_1 < x_1, i_2 < x_2, \dots i_n < x_n$.

Вероятность попадания случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ в пределы *n*-мерной области (*D*) можно вычислить по формуле

$$\mathrm{P}\{(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \in (D)\} = \iint_{(D)} \dots \int p(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n .$$

Свойства функции распределения многомерных случайных величин

1. $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ − является неубывающей функцией по каждому из своих аргументов;
2. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}$;
3. $F(\infty, \infty, \dots \infty) = 1$ − ***условие нормировки***;
4. $\lim\limits_{x_n \to +\infty} F(x_1, x_2, \dots x_n) = F(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$ − ***условие согласованности***.

Таким образом, чтобы найти функцию распределения подсистемы случайных величин меньшей размерности, необходимо в *n*-мерной функции распределения не интересующие нас аргументы устремить к +∞.

Свойства плотности распределения многомерных случайных величин

1. $p(x_1, x_2, \dots x_n) \geq 0$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 -$ ***условие нормировки***;

3. $p_\xi(x_1, x_2, \dots x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x_1, x_2, \dots x_n) dx_n -$ ***условие согласованности***.

Используя условие согласованности и зная многомерный закон распределения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, можно записать ***одномерный (маргинальный)*** закон распределения каждой из величин, входящих в систему. Но по одномерным законам распределения величин $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ записать многомерный закон распределения можно не всегда. В общем случае нужно знать условные законы распределения.

Условным законом распределения случайной величины, входящей в систему, называется ее закон распределения, полученный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

В случае двумерной случайной величины (ξ, η) условные функции распределения входящих в систему случайных величин обозначаются $F_{\xi|\eta}(x|y)$ и $F_{\eta|\xi}(y|x)$, а условные плотности распределения (для непрерывных величин) – $p_{\xi|\eta}(x|y)$ и $p_{\eta|\xi}(y|x)$ (можно записывать и так $p(x|y)$, $p(y|x)$):

$$p_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(u,y)\,du}, \text{ и аналогично } p_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,u)\,du}.$$

Теорема умножения вероятностей:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\xi|\eta}(x|y) \cdot p_\eta(y) \text{ или } p_{\xi\eta}(x,y) = p_{\eta|\xi}(y|x) \cdot p_\xi(x).$$

Случайные величины (ξ, η) называются ***независимыми***, если

$$p_{\xi|\eta}(x|y) = p_\xi(x),\ p_{\eta|\xi}(y|x) = p_\eta(y).$$

Соответсвенно, для независимых величин выполняется:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$$

В общем случае можно утверждать: компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ независимы (в совокупности), если для функции распределения и для плотности распределения выполняется:

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \cdots F_{\xi_n}(x_n),$$

$$p_\xi(x_1, x_2, \ldots x_n) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) \cdots p_{\xi_n}(x_n).$$

Замечание. В теории вероятностей есть понятие ***попарной независимости*** и ***независимости в совокупности.*** Система *n* случайных величин ***попарно независима***, если любая пара этой системы независима. Из ***независимости в совокупности*** следует независимость попарная, но из попарной независимости не следует независмость в совокупности. Как правило, если говорят о независимости, то имеют ввиду независимость в совокупности.

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины может быть задан в виде ряда (таблицы с двойным входом), где $p_{ij} = \mathrm{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$ – вероятность того, что величина ξ приняла значение x_i, а величина η – значение y_j:

ξ \ η	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{im}
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nj}	…	p_{nm}

Так как события $\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ составляют полную группу попарно несовместных событий, то выполняется условие $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, которое называется условием нормировки.

Зная распределение $\mathrm{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ случайной величины (ξ, η), можно получить ***маргинальные*** *(одномерные)* ***функции распределения*** каждой из компонент ξ и η:

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi\eta}(x, +\infty) = \sum_{i: x_i < x} \mathrm{P}\{\xi = x_i\}, \text{ где } \mathrm{P}\{\xi = x_i\} = p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

$$F_{\eta}(y) = F_{\xi\eta}(+\infty, y) = \sum_{j: y_j < y} \mathrm{P}\{\eta = y_j\}, \text{ где } \mathrm{P}\{\eta = y_j\} = p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Дискретные случайные величины ξ и η являются ***независимыми***, если выполняется условие:

$\mathrm{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = \mathrm{P}\{\xi = x_i\} \cdot \mathrm{P}\{\eta = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Примеры решения задач по теме 11

Пример 11.1. Задана функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \ \text{ или } \ y < 0, \\ \sin x \cdot \sin y, \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \ x > \dfrac{\pi}{2} \ \text{ или } \ y > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная точка (ξ, η) попадёт в прямоугольник:

$$\left\{(x, y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{6} \le y \le \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Решение: Данную вероятность можно найти двумя способами: 1) используя функцию распределения и 2) используя плотность распределения. Рассмотрим их.

1-й способ

$$P\{x_1 \le \xi \le x_2, \ y_1 \le \eta \le y_2\} = \left[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)\right] - \left[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right].$$

В нашем случае $x_1 = 0, \ x_2 = \dfrac{\pi}{4}, \ y_1 = \dfrac{\pi}{6}, \ y_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

Таким образом, можем вычислить вероятность

$$\mathrm{P}\left\{0 \le \xi \le \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{6} \le \eta \le \frac{\pi}{3}\right\} = \left[\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 \sin\frac{\pi}{3}\right] - \left[\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 \sin\frac{\pi}{6}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2-й способ

$P\{x_1 \le \xi \le x_2,\ y_1 \le \eta \le y_2\} = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy$, где $p_{\xi\eta}(x,y)$ – плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины. Найдем эту плотность, зная функцию распределения:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 0,\ x<0,\ x>\dfrac{\pi}{2},\ y<0,\ y>\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos y \cdot \cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогда $P\left\{0 \le \xi \le \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{6} \le \eta \le \dfrac{\pi}{3}\right\} = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x \cos y\,dxdy = \int\limits_0^{\pi/4} \cos x dx \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cos y dy =$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \cos x dx \left[\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right] = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right] - \sin 0 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 11.2. Для случайной величины (ξ,η) с двумерной плотностью вероятности

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi R^3}\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right),\ x^2+y^2 \le 4 = R^2, \\ 0,\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$$

найти вероятность попадания точки (ξ,η) в единичный круг с центром в начале координат.

Решение: Искомая вероятность будет вычисляться по формуле:

$$P\{(\xi,\eta) \in D\} = \frac{3}{\pi R^3} \iint\limits_D \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy,$$

где область $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$. Для вычисления двойного интеграла сделаем замену переменных, перейдя к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ r \in [0,1]$. Найдём якобиан перехода (коэффициент деформации):

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \cdot \cos^2\varphi + r \cdot \sin^2\varphi = r.$$

Таким образом, для искомой вероятности после замены переменных можем записать:

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(2-r)rdr=\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(r^2-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{2}.$$

Пример 11.3. Функция распределения двумерной случайной величины (ξ,η) имеет вид:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0,\ x<0,\ y<0,\\ 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y},\ x\ge 0,\ y\ge 0.\end{cases}$$

Найти:

а) плотность $p_{\xi\eta}(x,y)$,

б) вероятность $P\{(\xi,\eta)\in D\}$, где $D=\{(x,y):1\le x\le 2,\ 3\le y\le 5\}$,

в) одномерные плотности $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$,

г) проверить выполнение условия нормировки для одномерных плотностей.

Решение:

а) Найдём $p_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x}$, $\left(\left(a^x\right)'=a^x\ln a\right)$:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0,\ x<0\ \text{или}\ y<0,\\ 2^{-x-y}\cdot\ln^2 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.\end{cases}$$

б) Найдем вероятность попадания (ξ,η) в область D:

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\ln^2 2\cdot\int_1^2\int_3^5 2^{-x-y}dxdy=\ln^2 2\cdot\int_1^2 2^{-x}dx\int_3^5 2^{-y}dy=$$

$$=\ln^2 2\cdot\left(\frac{2^{-x}}{-\ln 2}\Bigg|_1^2\cdot\frac{2^{-y}}{-\ln 2}\Bigg|_3^5\right)=\left(2^{-2}-2^{-1}\right)\cdot\left(2^{-5}-2^{-3}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{128}.$$

в) Найдём одномерные плотности, используя условие согласованности:

$$p_\xi(x)=\int_0^\infty p_{\xi\eta}(x,y)dy=\ln^2 2\cdot\int_0^\infty 2^{-x-y}dy=-\ln^2 2\cdot\lim_{A\to\infty}\int_0^A 2^{-x-y}d(-y-x)=$$

$$=-\ln 2\cdot\lim_{A\to\infty}2^{-x-y}\Big|_0^A=-\ln 2\cdot\lim_{A\to\infty}\left[2^{-x-A}-2^{-x}\right]=2^{-x}\cdot\ln 2,\quad \text{т.е.}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ 2^{-x}\cdot\ln 2,\ x\ge 0.\end{cases}$$

Аналогично находим $p_\eta(y)$ интегрированием $p_{\xi\eta}(x,y)$ по переменной x:

$$p_\eta(y)=\begin{cases}0,\ y<0,\\ 2^{-y}\cdot\ln 2,\ y\ge 0.\end{cases}$$

г) Проверим выпонение условия нормировки для $p_\eta(y)$:

$$\int_0^\infty p_\eta(y)\,dy = \int_0^\infty 2^{-y}\cdot\ln 2\,dy = \lim_{A\to\infty}\int_0^A 2^{-y}\cdot\ln 2\,dy = -\ln 2\cdot\lim_{A\to\infty}\frac{2^{-y}}{\ln 2}\Big|_0^A = -\lim_{A\to\infty}\left[2^{-A}-2^0\right]=1.$$

Пример 11.4. В двух ящиках находится по шесть шаров; в первом ящике: один шар с номером 1, два шара с номером 2, три шара с номером 3; во втором ящике: два шара с номером 1, три шара с номером 2, один шар с номером 3. Из каждого ящика наудачу вынули по шару. Пусть X – номер шара, вынутого из первого ящика, Y – номер шара, вынутого из второго ящика. Найти закон распределения случайной величины (X,Y).

Решение:

Имеется два ящика по 6 шаров, номера шаров рапределены следующим образом:

1-ый ящик	№ 1 – 1 шар	№ 2 – 2 шара	№ 3 – 3 шара
2-ой ящик	№ 1 – 2 шара	№ 2 – 3 шара	№ 3 – 1 шар

Рассмотрим пространство элементарных исходов: $\Omega=\{(1,1),(2,3),(1,2),\ldots\}$.

1) Составим закон распределения каждой из компонент случайной величины (X,Y):

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

y_j	1	2	3
p_j	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) Найдем закон распределения (X,Y). Так как X и Y независимы, то совместная вероятность будет равна произведению соответствующих вероятностей:

$p_{ij}=\mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_i\}=\mathrm{P}\{X=x_i\}\cdot\mathrm{P}\{Y=y_i\}$.

Таким образом, запишем все вероятности:

$$p_{11}=\mathrm{P}\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{18},\quad p_{12}=\mathrm{P}\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12},$$

$$p_{13}=\mathrm{P}\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},\quad p_{21}=\mathrm{P}\{X=2,Y=1\}=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9},$$

$$p_{22}=\mathrm{P}\{X=2,Y=2\}=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6},\quad p_{23}=\mathrm{P}\{X=2,Y=3\}=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18},$$

$$p_{31}=\mathrm{P}\{X=3,Y=1\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6},\quad p_{32}=\mathrm{P}\{X=3,Y=2\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4},$$

$$p_{33}=\mathrm{P}\{X=3,Y=3\}=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

3) Запишем распределение в виде ряда:

x_i \ y_j	1	2	3	
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\sum_{j=1}^{3} p_{1j} = \frac{6}{36}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\sum_{j=1}^{3} p_{2j} = \frac{6}{18}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\sum_{j=1}^{3} p_{3j} = \frac{6}{12}$
	$\sum_{i=1}^{3} p_{i1} = \frac{6}{18}$	$\sum_{i=1}^{3} p_{i2} = \frac{6}{12}$	$\sum_{i=1}^{3} p_{i3} = \frac{6}{36}$	$\sum_{i,j=1}^{3} p_{ij} = 1$

4) Запишем функцию распределения случайного вектора (X,Y): $F_{XY}(x,y) = \sum\limits_{(i,j):\begin{cases} x_i<x, \\ y_j<y \end{cases}}^{3} p_{ij}$.

x	y			
	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 1$	0	0	0	0
$1 < x \le 2$	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$
$2 < x \le 3$	0	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2}$
$x > 3$	0	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$	1

Пример 11.5. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Рассматриваются две случайные величины: ξ – число попаданий, η – число промахов. Построить двумерный закон распределения случайной величины (ξ,η) и одномерные законы распределения ее компонент.

***Решение*:**

Обозначим события A – «промах» и $\overline{A}$ –«попадание», тогда $\mathrm{P}(A) = p$, $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1-p$.

1) Возможные значения случайных величин ξ и η:

$\xi:\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1;$

$\eta:\ \eta_1 = 0,\ \eta_2 = 1.$

2) Найдем вероятности, соответствующие значениям случайного вектора (ξ, η).

Сначала перечислим значения (ξ, η):

$(\xi_1 = 0,\ \eta_1 = 0);\ (\xi_1 = 0,\ \eta_2 = 1);\ (\xi_2 = 1,\ \eta_1 = 0);\ (\xi_2 = 1,\ \eta_2 = 1).$

$(\xi_1 = 0,\ \eta_1 = 0)$ – и не попал в цель, и не промахнулся (это невозможное событие);

$(\xi_2 = 1,\ \eta_2 = 1)$ – и попал в цель, и промахнулся (тоже невозможное событие);

$(\xi_1 = 0,\ \eta_2 = 1)$ – не попал в цель, промахнулся;

$(\xi_2 = 1,\ \eta_1 = 0)$ – попал в цель, не промахнулся.

Тогда соответствующие вероятности можем записать так:

$\mathrm{P}(\xi_1 = 0,\ \eta_1 = 0) = 0,\ \mathrm{P}(\xi_2 = 1,\ \eta_2 = 1) = 0,\ \ \mathrm{P}(\xi_1 = 0,\ \eta_2 = 1) = 1 - p,\ \ \ \mathrm{P}(\xi_2 = 1,\ \eta_1 = 0) = p.$

Предстаим закон распределения (ξ, η) в виде ряда:

ξ_i \ η_j	$\eta_1 = 0$	$\eta_2 = 1$
$\xi_1 = 0$	0	$1 - p$
$\xi_2 = 1$	p	0

3) Запишем двумерный закон распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$:

x	y		
	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0	$1 - p$
$x > 1$	0	p	1

4) Одномерные законы распределения:

ξ_i	0	1
p_i	$1 - p$	p

η_j	0	1
p_j	p	$1-p$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-p, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1;\end{cases} \qquad F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ p, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

Пример 11.6. Случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятности:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\frac{C}{1+x^2+y^2+x^2y^2},\ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty.$$

Найти:

а) коэффициент *C*;

б) установить являются ли зависимыми величины ξ и η;

в) найти вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в квадрат, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину равную двум.

***Решение*:**

а) Коэффициент *C* найдём из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy=1$. В нашем случае двойной интеграл легко сводится к повторному:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C}{1+x^2+y^2+x^2y^2}dxdy=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+y^2)}dy.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_A^0+\lim\limits_{B\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^B=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, то

$C\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+y^2)}dy=C\cdot\pi^2=1$. Таким образом, $C=\frac{1}{\pi^2}$.

б) Чтобы понять, являются ли случайные величины ξ и η независимыми, надо проверить выполнение свойства: для независимых величин выполняется свойство $p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$. Найдём одномерные законы, используя условие согласованности:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\cdot\pi=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

$-\infty<x<\infty$,

$$p_\eta(y)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi^2(1+y^2)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dy=\frac{1}{\pi^2(1+y^2)}\cdot\pi=\frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

$-\infty<y<\infty$.

Очевидно, что условие $p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$ выполняется, следовательно, случайные величины ξ и η независимы.

в) Найдем $P\{(\xi,\eta)\in D\}$, где $D=\{(x,y):-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$:

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,dxdy=\frac{1}{\pi^2}\cdot\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 11.7. Даны две независимые случайные величины: непрерывная ξ с плотностью вероятности $p_\xi(x)$ и дискретная η с распределением:

η_i	η_1	η_2	….	η_n
p_i	p_1	p_2	….	p_n

Найти функцию распределения двумерной случайной величины (ξ,η).

***Решение*:**

1) Так как случайные величины независимы, то $F_{\xi\eta}(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$.

2) Запишем функцию распределения для величин ξ и η соответственно:

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi(t)\,dt,\qquad F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le\eta_1\\ p_1, & \eta_1<y\le\eta_2,\\ p_1+p_2, & \eta_2<y\le\eta_3,\\ \ldots.\\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}p_i, & \eta_{n-1}<y\le\eta_n,\\ 1, & y>\eta_n.\end{cases}$$

3) Таким образом, двумерная функция распределения будет равна $F_{\xi\eta}(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$, где $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ определены в пункте 2).

Пример 11.8. Пусть случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=0,\ \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, η распределена равномерно на $[0,1]$. Найти совместное распределение (плотность и функцию распределения) $p_{\xi\eta}(x,y)$, $F_{\xi\eta}(x,y)$.

***Решение*:**

1) Запишем плотность распределения нормальной случайной величины:

$p_\xi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in(-\infty,\infty)$, где $a=M\xi$ и $\sigma^2=D\xi$. В нашем случае $a=0$ и $\sigma^2=\dfrac{1}{2}$,

тогда $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

2) Плотность равномерного распределения имеет вид:

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & y\in[a,b],\\ 0, & y\notin[a,b].\end{cases}$$

Для случайной величины $\eta\sim R[0;1]$ плотность будет иметь вид:

$$p_\eta(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1],\\ 0, & y\notin[0,1].\end{cases}$$

3) Наши случайные величины ξ и η независимы, тогда должно выполняться условие

$$p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, & x\in(-\infty,\infty),\ y\in[0,1],\\ 0, & x\in(-\infty,\infty),\ y\notin[0,1].\end{cases}$$

4) Найдем совместную функцию распределения: $F_{\xi\eta}(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$ (так как величины независимы). Сначала найдем функцию распределения величины ξ: $F_\xi(x)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi(u)\,du=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2}du$. Выразим $F_\xi(x)$ через функцию Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ,$$

тогда

$$F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(\sqrt{2}u)^2}{2}}du=\left|\begin{matrix}\sqrt{2}u=t\\ du=\dfrac{1}{\sqrt{2}}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{2}x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi\left(\sqrt{2}x\right).$$

Найдем функцию распределения величины η: $F_\eta(y)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{y}p_\eta(u)\,du$.

При $y\le 0$ $F_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}0\,du=0$, при $0<y\le 1$ $F_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,du+\int\limits_{0}^{y}1\,du=y$,

при $y>1$ $F_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{0}0du+\int\limits_{0}^{1}1du+\int\limits_{1}^{y}0du=1$. Тогда можем записать

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ y, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

5) Теперь запишем двумерную функцию распределения величины (ξ,η):

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & -\infty<x<\infty,\ y\le 0,\\ y\cdot\Phi\left(\sqrt{2}x\right), & -\infty<x<\infty,\ 0<y\le 1,\\ 1, & -\infty<x<\infty,\ y>1.\end{cases}$$

6) Проверим полученные результаты. Найдём двумерную плоность (ξ,η):

$p_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$. Сначала найдём $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\begin{cases}0, & y\le 0,\ y>1,\\ \Phi\left(\sqrt{2}x\right), & 0<y\le 1.\end{cases}$

Тогда

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\left(\Phi\left(\sqrt{2}x\right)\right)_x'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2}x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)_x'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{2x^2}{2}}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-x^2},\ x\in(-\infty,\infty),\ y\in(0,1]\ .$$

Пример 11.9. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятностей $p_{\xi\eta}(x,y)=C\cdot\exp(-x^2-2xy-4y^2)$. Найти постоянную C, $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ – одномерные и $p(x\,|\,y)$, $p(y\,|\,x)$ – условные плотности вероятностей компонент ξ и η. Проверить зависимость ξ и η.

Решение:

1) Константу C найдём из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy=1$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}C\cdot\exp\left\{-x^2-2xy-4y^2\right\}dxdy=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-x^2-2xy-y^2-3y^2\right\}dxdy=$$

$$=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-(x+y)^2-3y^2\right\}dxdy=C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+y)^2}\cdot e^{-3y^2}dxdy=$$

$$= C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2}dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2} d(x+y).$$

Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2} d(x+y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (интеграл Пуассона).

Тогда $C\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2}dy = \frac{C\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{3}y)^2} d(\sqrt{3}y) = \frac{C\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{C\pi}{\sqrt{3}} = 1$, где

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{3}y)^2} d(\sqrt{3}y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ и, значит, $C = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

2) Найдём $p_\xi(x)$. Используя условие согласованности, можем записать

$$p_\xi(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2 - 2xy - 4y^2\}dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2y + (2y)^2\right)\right\}dy =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{3}{4}x^2\right\}\exp\left\{-\left(\frac{x}{2}+2y\right)^2\right\}dy = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cdot e^{-\frac{3}{4}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{x}{2}+2y\right)^2\right\} d\left(2y+\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cdot e^{-\frac{3}{4}x^2}\cdot\sqrt{\pi}, \text{ где } \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{x}{2}+2y\right)^2\right\} d\left(2y+\frac{x}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-t^2\}dt = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, $p_\xi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{3}{4}x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Аналоично найдем $p_\eta(y)$:

$$p_\eta(y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2 - 2xy - 4y^2\}dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}\cdot e^{-3y^2}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot e^{-3y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2} d(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot e^{-3y^2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-3y^2},$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2} d(x+y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, $p_\eta(y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-3y^2}$, $y \in (-\infty, \infty)$.

3) Найдём условные плотности $p_{\xi|\eta}(x \mid y)$, $p_{\eta|\xi}(y \mid x)$. По определению можем записать:

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) \overset{\text{def}}{=} \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}, \quad p_{\eta|\xi}(y \mid x) \overset{\text{def}}{=} \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}.$$

Тогда

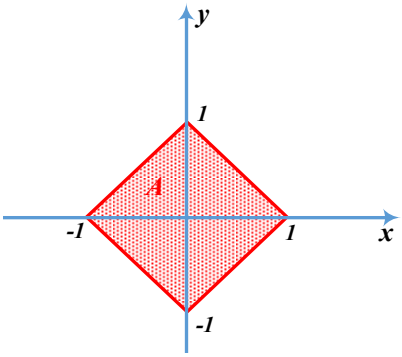
$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\exp\left\{-x^2-2xy-4y^2\right\}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\exp\left\{3y^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(x^2+2xy+y^2\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-(x+y)^2\right\}.$$

Таким образом, $p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-(x+y)^2\right\}$, $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(\frac{x}{2}+2y\right)^2\right\}$.

4) Очевидно, что $p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)\neq p_{\xi}(x)$, $p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)\neq p_{\eta}(y)$, значит, можем сделать вывод о зависимости случайных величин ξ,η.

Пример 11.10.



Случайная велична (ξ,η) равномерно распределена внутри изображенного на рисунке квадрата. Найти двумерную и одномерные плотности вероятности этой случайной величины. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Решение:

1) Обозначим A область, определяемую квадратом. Так как (ξ,η) равномерно рапределена внути квадрата, то можно записать что $p_{\xi\eta}(x,y)=C$. Применяя условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{A}p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy=1$ (вне квадрата плотность равна нулю), найдём константу C. Квадрат A можно разделить на четыре одинаковые части (прямоугольных треугольника). Тогда условие нормировки можно записать так: $4\cdot\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x}C\,dxdy=1$. Найдем C, вычисляя двойной интеграл:

$$4C\cdot\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x}dxdy=4C\cdot\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}dy=4C\cdot\int\limits_{0}^{1}(1-x)\,dx=4C\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=4C\cdot\frac{1}{2}=1,$$

тогда $C=\frac{1}{2}$ и, значит, можем записать двумерную плотность:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in A,\\ 0, & (x,y)\notin A.\end{cases}$$

2) Найдём маргинальные плотности. Сначала найдём $p_{\xi}(x)$, для этого рассмотрим как изменяются значения y в зависимости от x:

а) очевидно, что при $x<-1$ и $x>1$ $p_{\xi}(x)=0$;

б) при $x\in[-1,0)$ значения y: $-(1+x)\le y\le 1+x$, тогда

$$p_{\xi}(x)=\int\limits_{-(1+x)}^{1+x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}y\Big|_{-(1+x)}^{1+x}=\frac{1}{2}(1+x+1+x)=x+1;$$

в) при $x\in[0,1]$ значения y: $x-1\le y\le -x+1$, тогда

$$p_{\xi}(x)=\int\limits_{x-1}^{-x+1}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}y\Big|_{x-1}^{-x+1}=\frac{1}{2}(1-x+1-x)=1-x;$$

Таким образом, объединяя все полученные выражения в одно, запишем:

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0),\\ 1-x, & x\in[0,1],\\ 0, & x<-1,\ x>1,\end{cases}\qquad\text{или}\quad p_{\xi}(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Аналогично, можем найти $p_{\eta}(y)$:

а) при $y<-1$ и $y>1$ $p_{\eta}(y)=0$;

б) при $y\in[-1,0)$ значения x: $-(1+y)\le x\le 1+y$, тогда

$$p_{\eta}(y)=\int\limits_{-(1+y)}^{1+y}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_{-(1+y)}^{1+y}=\frac{1}{2}(1+y+1+y)=y+1;$$

в) при $y\in[0,1]$ значения x: $y-1\le x\le -y+1$, тогда

$$p_{\eta}(y)=\int\limits_{y-1}^{-y+1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_{y-1}^{-y+1}=\frac{1}{2}(1-y+1-y)=1-y;$$

$$p_{\eta}(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$$

3) Определим, являются ли зависимыми величины ξ и η. Для этого получим условные плотности, а потом сравним их с одномерными соответствующими плотностями.

$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)=\dfrac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\eta}(y)}=\dfrac{1}{2(1-|y|)}$, при $|x|+|y|<1$, тогда

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-|y|)}, & |x|+|y|<1,\\ 0, & |x|+|y|>1;\end{cases}$$

$p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)=\dfrac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_{\xi}(x)}=\dfrac{1}{2(1-|x|)}$, при $|x|+|y|<1$, тогда

$$p_{\eta|\xi}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-|x|)}, & |x|+|y|<1,\\ 0, & |x|+|y|>1.\end{cases}$$

Так как условные плотности не совпадают с безусловными, то можем сделать вывод, что ξ и η зависимы.

Пример 11.11. Случайная величина (ξ,η) равномерно распределена внутри трапеции *ABCD* с вершинами *A*(-6,0), *B*(-3,4), *C*(3,4), *D*(6,0). Найти двумерную плотность $p_{\xi\eta}(x,y)$ и одномерные плотности $p_{\xi}(x)$, $p_{\eta}(y)$.

Решение:

1) Найдем двумерную плотность. Обозначим *S* – площадь трапеции, а *G* – область, которая соответствует трапеции. Тогда плотность величины (ξ,η) запишем в виде:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

Вычислим площадь трапеции $S=\dfrac{1}{2}(a+b)\cdot h$, где $a=BC$, $b=AD$, h – высота трапеции,

$S=\dfrac{1}{2}(6+12)\cdot 4=36$. Таким образом, искомая плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (ξ,η) равна:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{36}, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

2) Получим одномерные плотности, для этого воспользуемся условием согласованности (проинтегрируем двумерную плотность по «лишней» переменой), в этом случае необходимо знать пределы интегирования.

Чтобы найти плотность $p_\xi(x)$, рассмотрим различные интервалы изменения значений x и соответсвующие им значения y:

а) при $x \in [-6,-3)$ значения y изменяются так: $0 \le y \le \frac{4}{3}x+8$, тогда

$$p_\xi(x) = \int_0^{\frac{4}{3}x+8} \frac{1}{36}dy = \frac{1}{36}y\Big|_0^{\frac{4}{3}x+8} = \frac{1}{36}\left(\frac{4}{3}x+8\right) = \frac{4x}{108}+\frac{8}{36} = \frac{x}{27}+\frac{2}{9};$$

б) при $x \in [-3,3]$ значения y изменяются так: $0 \le y \le 4$, тогда

$$p_\xi(x) = \int_0^4 \frac{1}{36}dy = \frac{1}{36}y\Big|_0^4 = \frac{1}{36}\cdot 4 = \frac{1}{9};$$

в) при $x \in (3,6]$ значения y изменяются так: $0 \le y \le -\frac{4}{3}x+8$, тогда

$$p_\xi(x) = \int_0^{-\frac{4}{3}x+8} \frac{1}{36}dy = \frac{1}{36}y\Big|_0^{-\frac{4}{3}x+8} = \frac{1}{36}\left(-\frac{4}{3}x+8\right) = -\frac{x}{27}+\frac{2}{9};$$

г) при $x \in (-\infty,-6)\cup(6,\infty)$ $p_\xi(x) = 0$, так как $p_{\xi\eta}(x,y) = 0$.

Обобщим полученные результаты:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{27}+\frac{2}{9}, & x \in [-6,-3), \\ \frac{1}{9}, & x \in [-3,3], \\ -\frac{x}{27}+\frac{2}{9}, & x \in (3,6], \\ 0, & x \in (-\infty,-6)\cup(6,\infty). \end{cases}$$

Рассуждая подобным образом, получим $p_\eta(y)$:

а) при $y \in [0,4]$ значения x изменяются так: $\frac{3}{4}y-6 \le x \le -\frac{3}{4}y+6$,

$$p_\eta(y) = \int_{\frac{3}{4}y-6}^{-\frac{3}{4}y+6} \frac{1}{36}dx = \frac{1}{36}\left(-\frac{3}{4}y+6-\frac{3}{4}y+6\right) = \frac{1}{36}\left(-\frac{3}{2}y+12\right) = -\frac{y}{24}+\frac{1}{3};$$

б) при $y \in (-\infty,0)\cup(4,\infty)$ $p_\eta(y) = 0$, так как $p_{\xi\eta}(x,y) = 0$.

Запишем выражение для плотности величины η в виде:

$$p_\eta(y)=\begin{cases}-\dfrac{y}{24}+\dfrac{1}{3}, & y\in[0,4],\\ 0, & y\notin[0,4].\end{cases}$$

Пример 11.12. Трехмерная случайная величина (ξ,η,ζ) распределена равномерно внутри шара радиуса R с центром в начале координат. Найти совместную плотность $p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)$, одномерные плотности $p_\xi(x), p_\eta(y), p_\zeta(z)$, двумерную плотность $p_{\eta\zeta}(y,z)$, условную плотность $p_{\xi|\eta,\zeta}(x\,|\,y,z)$, вероятность попадания случайной величины в шар радиуса $\dfrac{R}{2}$ с центром в начале координат.

Решение:

1) Найдём трехмерную плотность $p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)=\begin{cases}C, & x^2+y^2+z^2<R^2,\\ 0, & x^2+y^2+z^2\ge R^2.\end{cases}$

Константу C найдём из условия нормировки: $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R} C\,dx\,dy\,dz=1$. Вспоминая формулу, определяющую объём шара радиуса R, перепишем условие нормировки в виде:

$C\cdot\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R} dx\,dy\,dz=C\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3=1$. Теперь выразим C: $C=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\pi R^3}$, тогда искомая плотность будет иметь вид:

$$p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\pi R^3}, & x^2+y^2+z^2<R^2,\\ 0, & x^2+y^2+z^2\ge R^2.\end{cases}$$

2) Одномерные плотности найдём, применяя условие согласованности многомерных распределений (интегрируем по «лишним» переменным):

$$p_\xi(x)=\iint\limits_{y^2+z^2<R^2-x^2} p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)\,dy\,dz=\iint\limits_{y^2+z^2<R^2-x^2}\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi R^3}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi R^3}\iint\limits_{y^2+z^2<R^2-x^2} dy\,dz=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi R^3}\cdot\pi\left(R^2-x^2\right),$$

где $\iint\limits_{y^2+z^2<R^2-x^2} dy\,dz$ определяет площадь круга радиуса $\sqrt{R^2-x^2}$. Таким образом, для плотности величины ξ можем записать:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{R^3}\left(R^2-x^2\right), & |x|<R,\\ 0, & |x|\ge R.\end{cases}$$

Аналогично можем записать выражения для плотностей величин η и ζ соответственно:

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{R^3}\left(R^2-y^2\right), & |y|<R,\\ 0, & |y|\ge R,\end{cases}\quad\text{и}\quad p_\zeta(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{R^3}\left(R^2-z^2\right), & |z|<R,\\ 0, & |z|\ge R.\end{cases}$$

3) Двумерную плотность найдём также, используя условие согласованности:

$$p_{\eta\zeta}(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)\,dx=\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}\frac{3}{4\pi R^3}\,dx=\frac{3}{4\pi R^3}\cdot 2\sqrt{R^2-y^2-z^2}=\frac{3\sqrt{R^2-y^2-z^2}}{2\pi R^3}.$$

В результате для $p_{\eta\zeta}(y,z)$ можем записать выражение:

$$p_{\eta\zeta}(y,z)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{R^2-y^2-z^2}}{2\pi R^3}, & y^2+z^2<R,\\ 0, & y^2+z^2\ge R.\end{cases}$$

4) Найдём условную плотность $p_{\xi|\eta,\zeta}(x\,|\,y,z)$:

$$p_{\xi|\eta,\zeta}(x\,|\,y,z)=\frac{p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)}{p_{\eta\zeta}(y,z)}=\frac{3}{4\pi R^3}\cdot\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{R^2-y^2-z^2}}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2-z^2}}\quad\text{или}$$

$$p_{\xi|\eta,\zeta}(x\,|\,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2-z^2}}, & |x|<\sqrt{R^2-y^2-z^2},\\ 0, & |x|\ge\sqrt{R^2-y^2-z^2}.\end{cases}$$

5) Вероятность попадания случайной величины (ξ,η,ζ) в шар радиуса $\dfrac{R}{2}$ с центром в начале координат соответствует вероятности попадания в область

$$D=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<\left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}:$$

$$P\{(\xi,\eta,\zeta)\in D\}=\iiint\limits_D p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_D\frac{3}{4\pi R^3}dxdydz=$$

$$=\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_D dxdydz=\frac{3}{4\pi R^3}\cdot\frac{4\pi R^3}{3\cdot 8}=\frac{1}{8},\quad\text{где}\ \iiint\limits_D dxdydz=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3.$$

Задачи по теме 11

11.1. Система независимых случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ задана плотностями вероятностей $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$. Определить функцию распределению этой системы случайных величин.

11.2. Плотность распределения трехмерной случайной величины (ξ, η, ζ) равна:

$$p(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{6}{(1+x+y+z)^4}, & x, y, z > 0 \\ 0, \ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти одномерные плотности распределения.

11.3. Плотность распределения двумерной случайной величины (ξ, η) равна:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{2}, 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 < y \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \ x \le 0, x > \dfrac{\pi}{2}, \ y \le 0, y > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x, y)$.

11.4. Координаты (ξ, η) случайной точки на плоскости подчиняются нормальному закону:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \frac{(x-\bar{x})^2}{{\sigma_1}^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{{\sigma_2}^2} \right\},$$

Найти: одномерные и условные плотности вероятности. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

11.5. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, величина Y – число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна p_1, для второго – p_2. Определить закон распределения и функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y).

11.6. Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$p(x,y) = \begin{cases} C\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right), x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0, \quad x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Найти: **а)** постоянную C; **б)** одномерные плотности вероятности компонент $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$; **в)** условные плотности вероятности компонент $p_\xi(x \mid y),\ \ p_\eta(y \mid x)$.

11.7. Определить плотность вероятности системы трех случайных величин (X,Y,Z) по заданной функции распределения:

$$F(x,y,z) = (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz}),\ \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$$

11.8. В условиях предыдущей задачи определить геометрическое место точек, обладающих одинаковой плотностью:

$$p(x,y,z) = p_0,\ \ p_0 \le abc.$$

11.9. По заданной функции распределения двумерной случайной величины определить плотность и найти вероятность попадания точки с координатами (X,Y) в область $\{1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 1\}$, найти значение коэффициента k:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-ky^2} + a^{-x^2-ky^2}, & x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

11.10. Найти одномерные плотности, если известна плотность вероятностей двумерной случайной величины (X,Y): $p(x,y) = \dfrac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}$. Являются ли величины зависимыми?

11.11. Дана плотность вероятности координат случайной точки на плоскости:

$$p(x,y) = C \cdot \exp\left\{-\left[4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2\right]\right\}.$$

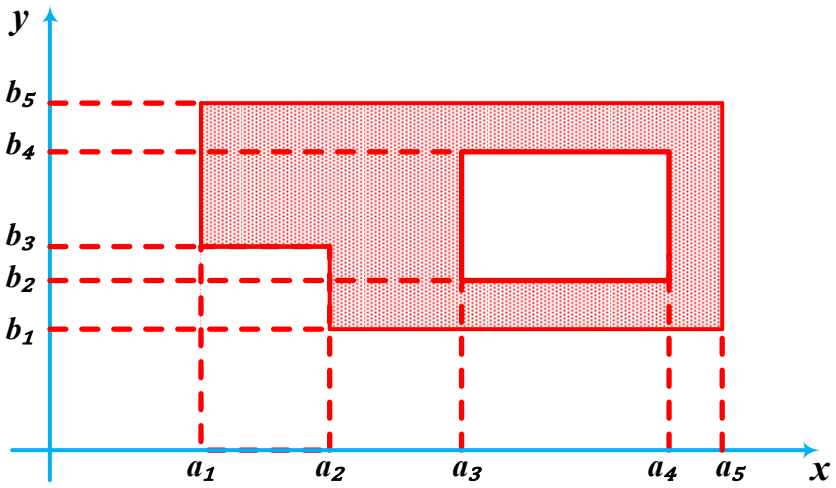
Найти постоянную C и одномерные распределения.

11.12. Дана плотность вероятности системы двух случайных величин (X,Y):

$$p(x,y) = ke^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Найти: **а)** постоянную k; **б)** одномерные законы распределения $p(x),\ p(y)$; **в)** условные законы распределения $p(x \mid y),\ \ p(y \mid x)$.

11.13. Определить вероятность попадания случайной точки в указанную на рисунке заштрихованную область, если задана функция распределения $F(x,y)$:



11.14. Система случайных величин (X,Y) имеет плотность вероятности: $p(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}$. ***Найти*** постоянную A и записать функцию распределения.

11.15. Пусть $u(x)$ – нечетная непрерывная функция на прямой, равная нулю вне интервала $[-1,1]$, причем $|u(x)|<\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. Доказать, что функция

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+u(x)u(y)$$

есть двумерная плотность распределения, которое не является нормальным, но его маргинальные распределения нормальны.

11.16. Координаты (X_1,Y_1) и (X_2,Y_2) случайных точек на плоскости подчинены нормальному закону распределения, причем математические ожидания всех координат равны нулю, дисперсии всех координат одинаковы и равны 10; корреляционные моменты между одноименными координатами $M\{X_1X_2\}=M\{Y_1Y_2\}=2$; остальные пары координат не коррелированы. ***Найти*** плотность вероятности $p(x_1,y_1,x_2,y_2)$.

Тема 12. Числовые характеристики многомерных случайных величин

Математическое ожидание многомерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ – это вектор $M\xi = (M\xi_1, ..., M\xi_n)$.

Дисперсия многомерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ – это вектор $D\xi = (D\xi_1, ..., D\xi_n)$.

Для системы двух случайных величин также вводятся следующие характеристики.

Начальным моментом порядка $k+s$ ***двумерной случайной величины*** (ξ,η) называется математическое ожидание произведения случайных величин ξ, η в соответствующих степенях:

$$m_{k,s} = M(\xi^k \cdot \eta^s),$$

для дискретных случайных величин: $m_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k \cdot y_j^s \cdot p_{ij}$;

для непрерывных случайных величин: $m_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot y^s \cdot p_{\xi\eta}(x,y) dxdy$.

Центральным моментом порядка $k+s$ ***двумерной случайной величины*** (ξ,η) называется математическое ожидание произведения отклонений случайных величин ξ, η в соответствующих степенях:

$$\mu_{k,s} = M\left\{(\xi - M\xi)^k \cdot (\eta - M\eta)^s\right\},$$

для дискретных случайных величин $\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - M\xi)^k \cdot (y_j - M\eta)^s \cdot p_{ij}$;

для непрерывных случайных величин $\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k \cdot (y - M\eta)^s \cdot p_{\xi\eta}(x,y) dxdy$.

Математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ, η двумерной случайной величины можно найти применяя формулы:

для дискретных случайные величин

$$M(\xi) = \sum_i \sum_j x_i \cdot p_{ij},\ M\eta = \sum_i \sum_j y_j \cdot p_{ij},$$

$$D\xi = \sum_i \sum_j x_i^{\,2} p_{ij} - M^2(\xi\eta),\ D\eta = \sum_i \sum_j (y_j - M\eta)^2 \cdot p_{ij};$$

для непрерывных случайных величин

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy,\ M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy,$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy,\ D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy.$$

Величина $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\left\{\left(\xi - M\{\xi\}\right)\left(\eta - M\{\eta\}\right)\right\}$ называется ***<u>ковариацией</u>*** или ***<u>корреляционным моментом</u>*** величин ξ и η; $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ – это центральный момент порядка 1+1 двумерной случайной величины (ξ,η). Является характеристикой зависимости случайных величин, имеет размерность.

Для дискретных случайных величин ковариация определяется по формуле

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} - M\xi \cdot M\eta,$$

для непрерывных случайных величин

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy - M\xi \cdot M\eta$$

<u>Коэффициентом корреляции</u> $r_{\xi\eta}$ случайных величин ξ, η называется нормированная ковариация:

$$r_{\xi\eta} = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \cdot \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\{\xi\}\,D\{\eta\}}}.$$

***<u>Свойства коэффициента корреляции</u>*:**

1. $\left|r_{\xi\eta}\right| \le 1$;

2. Если $\eta = a\xi + b, a \ne 0,$ то $r_{\xi\eta} = \pm 1$;

3. Если $r_{\xi\eta} = \pm 1$, то $\exists$ такие a, b, что $\eta = a\xi + b$;

4. Если случайные величины ξ и η независимы, то $r_{\xi\eta} = 0$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной связи между двумя случайными величинами, является безразмерной величиной. Если $r_{\xi\eta}=0$, то между случайными величинами ξ и η отсутствует линейная зависимость, и тогда величины ξ и η называются некоррелированными.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Из некоррелированности ξ и η не следует их независимость.

Ковариационная матрица системы n случайных величин – это квадратная матрица, составленная из ковариаций $K_{ij}=\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j), i,j=\overline{1,n}$ всех величин взятых попарно:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица симметричная, положительно полуопределена (неотрицательно определена), на главной диагонали элементы $K_{ii}=D\xi_i, i=\overline{1,n}$.

Примеры решения задач по теме 12

Пример 12.1. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ,η):

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\sin x\sin y,\ 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi,\\ 0,\ \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции величин ξ и η. Зависимы ли эти величины?

***Решение*:**

1) Запишем формулу для коэффициента корреляции: $r_{\xi\eta}=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta}$, где

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\left\{(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\right\}.$$

2) Прежде чем искать этот коэффициент, найдём маргинальные плотности, используя условие согласованности:

$$p_\xi(x)=\int_0^\pi p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\int_0^\pi\frac{1}{4}\sin x\sin y\,dy=\frac{1}{4}\sin x\int_0^\pi\sin y\,dy=\frac{1}{4}\sin x\cdot(-\cos y)\Big|_0^\pi=\frac{1}{2}\sin x.$$

Аналогично найдём $p_\eta(y)=\int\limits_0^\pi p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\frac{1}{2}\sin y$.

Таким образом, $p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$, следовательно, величины ξ и η независимы. Это значит, что коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}=0$.

Теперь найдем $r_{\xi\eta}$ по определению:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M\{(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\}=M(\xi\cdot\eta)-M\xi\cdot M\eta.$$

$$M\xi=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x\cdot\sin x\,dx=\begin{bmatrix}u=x\\dv=\sin x\,dx\\v=-\cos x\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[u\cdot v\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi v\cdot du\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x\cdot\cos x\Big|_0^\pi+\int\limits_0^\pi\cos x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[\pi+\sin x\Big|_0^\pi\right]=\frac{\pi}{2},$$

$$M\eta=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi y\cdot\sin y\,dy=\frac{\pi}{2},\quad M(\xi\cdot\eta)=\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi x\cdot y\cdot\sin x\sin y\,dxdy=\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi x\cdot\sin x\,dx\int\limits_0^\pi y\cdot\sin y\,dy=\frac{\pi^2}{4},$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi\cdot\eta)-M\xi\cdot M\eta=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=0.$$

Таким образом, $r_{\xi\eta}=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta}=0$.

Пример 12.2. Из урны, в которой a белых, b черных и c красных шаров, вынимается один шар. Случайные величины X, Y, Z определяются следующими условиями:

$$X=\begin{cases}1,\ \textit{если появится белый шар},\\0,\ \textit{если появится чёрный или красный шар},\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1,\ \textit{если появится чёрный шар},\\0,\ \textit{если появится белый или красный шар},\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1,\ \textit{если появится красный шар},\\0,\ \textit{если появится чёрный или белый шар}.\end{cases}$$

Построить матрицу ковариаций компонент случайного вектора (X,Y,Z).

Решение:

1) Запишем одномерные законы распределения:

x_i	0	1
p_i	$\frac{b+c}{a+b+c}$	$\frac{a}{a+b+c}$

y_j	0	1
p_j	$\frac{a+c}{a+b+c}$	$\frac{b}{a+b+c}$

z_k	0	1
p_k	$\frac{a+b}{a+b+c}$	$\frac{c}{a+b+c}$

Найдём MX, MY, MZ:

$$MX = 1 \cdot \frac{a}{a+b+c} + 0 \cdot \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{a}{a+b+c}, \quad MY = \frac{b}{a+b+c}, \quad MZ = \frac{c}{a+b+c}.$$

2) Ковариационная матрица **K** является квадратной, симметричной **K=K$^{\mathbf{T}}$** и неотрицательно определенной: $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$,

где элементы главной диагонали определяют дисперсии $DX = K_{11}, DY = K_{22}, DZ = K_{33}$, а

$K_{ij} = \operatorname{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right) = M\left(\xi_i \cdot \xi_j\right) - M\xi_i \cdot M\xi_j$, $i = 1..3, j = 1..3, i \neq j$. (**)

3) Найдем двумерные законы распределения для каждой пары X,Y; X,Z; Y,Z:

x_i \ y_j	0	1
0	$\frac{c}{a+b+c}$	$\frac{a}{a+b+c}$
1	$\frac{b}{a+b+c}$	0

x_i \ z_k	0	1
0	$\frac{b}{a+b+c}$	$\frac{a}{a+b+c}$
1	$\frac{c}{a+b+c}$	0

y_j \ z_k	0	1
0	$\frac{a}{a+b+c}$	$\frac{b}{a+b+c}$
1	$\frac{c}{a+b+c}$	0

4) Найдём $M\left(X \cdot Y\right)$, $M\left(Y \cdot Z\right)$, $M\left(X \cdot Z\right)$. Из рядов распределения очевидно, что $M\left(X \cdot Y\right) = 0$, $M\left(Y \cdot Z\right) = 0$, $M\left(X \cdot Z\right) = 0$. Покажем это на примере $M\left(X \cdot Y\right)$:

$$M\left(X \cdot Y\right) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = 0 \cdot 0 \cdot \frac{c}{a+b+c} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{a}{a+b+c} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{b}{a+b+c} + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Из 1) запишем $MX \cdot MY = \frac{ab}{\left(a+b+c\right)^2}$, $MX \cdot MZ = \frac{ac}{\left(a+b+c\right)^2}$, $MY \cdot MZ = \frac{bc}{\left(a+b+c\right)^2}$.

5) Найдём ковариации, используя формулу (**):

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{ab}{\left(a+b+c\right)^2}, \quad \operatorname{cov}\left(X,Z\right) = -\frac{ac}{\left(a+b+c\right)^2}, \quad \operatorname{cov}\left(Y,Z\right) = -\frac{bc}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

6) Найдем дисперсии – элементы ковариационной матрицы, стоящие на главной диагонали. По определению дисперсии запишем: $DX = M\left\{\left(X - MX\right)^2\right\} = MX^2 - M^2X$.

Чтобы найти MX^2 необходимо записать ряд распределения для X^2 (для Y^2 и Z^2 аналогично):

x_i^2	0^2	1^2
p_i	$\frac{b+c}{a+b+c}$	$\frac{a}{a+b+c}$

$$MX^2 = \frac{a}{a+b+c},\ MY^2 = \frac{b}{a+b+c},\ MZ^2 = \frac{c}{a+b+c}.$$

Тогда

$$DX = \frac{a}{a+b+c} - \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2 = \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2},$$

$$DY = \frac{b}{a+b+c} - \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2 = \frac{b(a+c)}{(a+b+c)^2},\ DZ = \frac{c}{a+b+c} - \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2 = \frac{c(a+b)}{(a+b+c)^2}.$$

7) Теперь запишем матрицу ковариаций:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2} & -\frac{ab}{(a+b+c)^2} & -\frac{ac}{(a+b+c)^2} \\ -\frac{ab}{(a+b+c)^2} & \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2} & -\frac{bc}{(a+b+c)^2} \\ -\frac{ac}{(a+b+c)^2} & -\frac{bc}{(a+b+c)^2} & \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2} \end{pmatrix}.$$

Пример 12.3. Закон распределения случайной величины (ξ,η) представлен следующей таблицей:

η_i \ ξ_j	$\xi_1 = 20$	$\xi_2 = 40$	$\xi_3 = 60$
$\eta_1 = 10$	3λ	λ	0
$\eta_2 = 20$	2λ	4λ	2λ
$\eta_3 = 30$	λ	2λ	5λ

Найти: 1) величину λ; 2) математические ожидания $M\{\xi\}, M\{\eta\}$; 3) дисперсии $D\{\xi\}, D\{\eta\}$; 4) коэффициент корреляции случайных величин ξ,η.

Решение:

1) Найдем λ из условия нормировки $\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} = 1$:

$$3\lambda + \lambda + 0 + 2\lambda + 4\lambda + 2\lambda + \lambda + 2\lambda + 5\lambda = 1,\ \lambda = \frac{1}{20}.$$

2) Наёдем сначала одномерные законы, а затем числовые характеристики:

ξ_j	$\xi_1 = 20$	$\xi_2 = 40$	$\xi_3 = 60$
p_j	$\frac{6}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$

где $p_j = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}$, $j = 1,2,3$,

η_i	$\eta_1 = 10$	$\eta_2 = 20$	$\eta_3 = 30$
p_i	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}$

где $p_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}$, $i = 1,2,3$.

Найдём математические ожидания:

$$M\xi = 20 \cdot \frac{6}{20} + 40 \cdot \frac{7}{20} + 60 \cdot \frac{7}{20} = 41 \quad \text{и} \quad M\eta = 10 \cdot \frac{4}{20} + 20 \cdot \frac{8}{20} + 30 \cdot \frac{8}{20} = 22.$$

3) Найдём дисперсии:

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi, \quad M\xi^2 = 20^2 \cdot \frac{6}{20} + 40^2 \cdot \frac{7}{20} + 60^2 \cdot \frac{7}{20} = 120 + 560 + 1260 = 1940,$$

$$D\xi = 1940 - 41^2 = 259;$$

$$D\eta = M\eta^2 - M^2\eta, \quad M\eta^2 = 10^2 \cdot \frac{4}{20} + 20^2 \cdot \frac{8}{20} + 30^2 \cdot \frac{8}{20} = 20 + 160 + 360 = 540,$$

$$D\eta = 540 - 22^2 = 56.$$

4) Найдём коэффициент корреляции:

$$r_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}, \ \operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta.$$

Сначала получим $M(\xi \cdot \eta)$ (см. двуменое распределение):

$$M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \cdot \eta_j \cdot p_{ij} = 10 \cdot 20 \cdot \frac{3}{20} + 10 \cdot 40 \cdot \frac{1}{20} + 10 \cdot 60 \cdot 0 +$$

$$+20 \cdot 20 \cdot \frac{2}{20} + 20 \cdot 40 \cdot \frac{4}{20} + 20 \cdot 60 \cdot \frac{2}{20} + 30 \cdot 20 \cdot \frac{1}{20} + 30 \cdot 40 \cdot \frac{2}{20} + 30 \cdot 60 \cdot \frac{5}{20} =$$

$$= 30 + 20 + 40 + 160 + 120 + 30 + 120 + 450 = 970,$$

$$M\xi \cdot M\eta = 41 \cdot 22 = 902, \ \operatorname{cov}(\xi,\eta) = 970 - 902 = 68.$$

Тогда $r_{\xi\eta} = \frac{68}{\sqrt{259 \cdot 56}} = \frac{68}{120,4} \approx 0,56$.

Пример 12.4. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятности:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти математические ожидания $M\xi, M\eta$ и дисперсии $D\xi, D\eta$.

***Решение*:**

1) Для непрерывной случайной величины $M\xi \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot p_{\xi}(x)\,dx$. Сначала найдём маргинальные плотности (используя условие согласованности):

$$p_{\xi}(x)=\int\limits_0^1 p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 (x+y)\,dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=x+\frac{1}{2}.$$

Аналогично находим $p_{\eta}(y)=\int\limits_0^1 p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=y+\frac{1}{2}$.

Тогда $M\xi=\int\limits_0^1 x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}$, $M\eta=\int\limits_0^1 y\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}$.

2) Чтобы найти дисперсию, необходимо найти второй начальный момент:

$$M\xi^2=\int\limits_0^1 x^2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{12},\quad M\eta^2=\int\limits_0^1 y^2\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{12}.$$

$$D\xi=D\eta=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}.$$

Пример 12.5. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятности:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}24xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, \text{ (или } 0\le y\le 1, 0\le x\le 1-y)\\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти математические ожидания $M\xi, M\eta$, дисперсии $D\xi, D\eta$ и коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

***Решение*:**

1) Найдём одномерные плотности:

$$p_{\xi}(x)=\int\limits_0^{1-x} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\int\limits_0^{1-x} 24xy\,dy=24x\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}=12x(1-x)^2,$$

$$p_{\eta}(y)=\int\limits_0^{1-y} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\int\limits_0^{1-y} 24xy\,dx=24y\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{1-y}=12y(1-y)^2.$$

Теперь по формулам $M\xi = \int\limits_0^1 x \cdot p_\xi(x)\,dx$ и $M\eta = \int\limits_0^1 y \cdot p_\eta(y)\,dy$ находим математические ожидания. Можно также найти эти характеристики, применяя формулы:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy,\ M\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p_{\xi\eta}(x,y)dxdy,$$

$$M\xi = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x} x \cdot 24xy\,dxdy = 24\int\limits_0^1 x^2dx \int\limits_0^{1-x} ydy = 24\int\limits_0^1 x^2dx\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = 24\int\limits_0^1 x^2\frac{(1-x)^2}{2}dx =$$

$$= 12\int\limits_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)dx = 12\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 12\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5};$$

$$M\eta = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x} y \cdot 24xydxdy = 24\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} y^2dy = 24\int\limits_0^1 xdx\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} = 8\int\limits_0^1 x(1-x)^3dx =$$

$$= 8\int\limits_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx = 8\left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

(в последнем интеграле можно было изменить порядок интегрирования, тогда получили бы аналогичный предыдущему итеграл, т.е. $M\eta = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x} y \cdot 24xydxdy = 24\int\limits_0^1 y^2dy \int\limits_0^{1-y} xdx$).

2) Найдём $D\xi, D\eta$:

$$M\xi^2 = \int\limits_0^1 x^2 p_\xi(x)\,dx = 12\int\limits_0^1 x^3(1-x)^2\,dx = 12\int\limits_0^1 \left(x^3 - 2x^4 + x^5\right)dx = 12\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5},$$

$$M\eta^2 = \int\limits_0^1 y^2 p_\eta(y)\,dy = 12\int\limits_0^1 y^3(1-y)^2\,dy = \frac{1}{5},\ D\xi = D\eta = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}.$$

3) Найдем $r_{\xi\eta} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$, $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\cdot\eta) - M\xi \cdot M\eta$:

$$M(\xi\cdot\eta) = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x} xy \cdot 24xy\,dxdy = 24\int\limits_0^1 x^2dx \int\limits_0^{1-x} y^2dy = 24\int\limits_0^1 x^2dx\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} = 8\int\limits_0^1 x^2(1-x)^3\,dx =$$

$$= 8\int\limits_0^1 \left(x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5\right)dx = 8\left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = 8\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15},$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = -\frac{2}{75},\quad r_{\xi\eta} = \frac{-\frac{2}{75}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}} = -\frac{2}{3}.$$

Пример 12.6. Закон распределения случайной величины (ξ,η) представлен таблицей:

η_i \ ξ_j	$\xi_1 = x_1$	$\xi_2 = x_2$	$\xi_3 = x_3$
$\eta_1 = y_1$	0,15	0,12	0,09
$\eta_2 = y_2$	0	0,35	0,21
$\eta_3 = y_2$	0	0	0,08

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$. Зависимы ли величины ξ и η?

***Решение*:**

1) Составим ряды распределения компонент случайного вектора (ξ,η):

ξ_j	x_1	x_2	x_3
p_j	0,15	0,47	0,38

η_i	y_1	y_2	y_3
p_i	0,36	0,56	0,08

Теперь найдем условные законы распределени для ξ и η:

$\xi_j \mid \eta = y_1$	x_1	x_2	x_3
p_j	0,42	0,33	0,25

Как получили p_j?

$$p_j = \mathrm{P}\{\xi = x_j \mid \eta = y_i\} = \frac{\mathrm{P}\{\xi = x_j, \eta = y_i\}}{\mathrm{P}\{\eta = y_i\}}, \quad i = 1,2,3,\ j = 1,2,3.$$

$$p_1 = \mathrm{P}\{\xi = x_1 \mid \eta = y_1\} = \frac{\mathrm{P}\{\xi = x_1, \eta = y_1\}}{\mathrm{P}\{\eta = y_1\}} = \frac{0,15}{0,36} \approx 0,42,$$

$$p_2 = \mathrm{P}\{\xi = x_2 \mid \eta = y_1\} = \frac{\mathrm{P}\{\xi = x_2, \eta = y_1\}}{\mathrm{P}\{\eta = y_1\}} = \frac{0,12}{0,36} \approx 0,33,$$

$$p_3 = \mathrm{P}\{\xi = x_3 \mid \eta = y_1\} = \frac{\mathrm{P}\{\xi = x_3, \eta = y_1\}}{\mathrm{P}\{\eta = y_1\}} = \frac{0,09}{0,36} \approx 0,25.$$

Условие нормировки 0,42+0,33+0,25=1 – выполняется.

Аналогично составим условные законы при условии $\eta = y_2$ и $\eta = y_3$:

$\xi_j \mid \eta = y_2$	x_1	x_2	x_3
p_j	0	0,625	0,375

$$p_1 = \mathrm{P}\{\xi = x_1 \mid \eta = y_2\} = \frac{0}{0,56} = 0,$$

$$p_2 = \mathrm{P}\{\xi = x_2 \mid \eta = y_2\} = \frac{0,35}{0,56} = 0,625,$$

$$p_3 = \mathrm{P}\{\xi = x_3 \mid \eta = y_2\} = \frac{0,21}{0,56} \approx 0,375,$$

0+0,625+0,375=1 – условие нормировки;

$\xi_j \mid \eta = y_3$	x_1	x_2	x_3
p_j	0	0	1

$$p_1 = \mathrm{P}\{\xi = x_1 \mid \eta = y_3\} = \frac{0}{0,08} = 0,$$

$$p_2 = \mathrm{P}\{\xi = x_2 \mid \eta = y_3\} = \frac{0}{0,08} = 0,$$

$$p_3 = \mathrm{P}\{\xi = x_3 \mid \eta = y_3\} = \frac{0,08}{0,08} = 1,$$

0+0+1=1 – условие нормировки.

Из полученных условных законов распределения можем сделать вывод, что случайные величины зависимы, так как безусловный закон распределения величины ξ отличается от полученных условных законов. Очевидно, в этом случае коэффициент корреляции не равен нулю. Найдём его.

2) Найдём числовые характеристики ξ и η из одномерных законов распределения:

$$M\xi = \sum_{j=1}^{3} x_j p_j, \quad M\eta = \sum_{i=1}^{3} y_i p_i, \quad M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j=1}^{3} y_i x_j p_{ij}, \quad \operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi M\eta,$$

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi, \quad D\eta = M\eta^2 - M^2\eta, \quad M\xi^2 = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 p_j, \quad M\eta^2 = \sum_{j=1}^{3} y_i^2 p_i.$$

$$M\xi = 0,15x_1 + 0,47x_2 + 0,38x_3, \; M\eta = 0,36y_1 + 0,56y_2 + 0,08y_3,$$

$$M(\xi \cdot \eta) = 0,15x_1y_1 + 0,12x_2y_1 + 0,09x_3y_1 + 0,35x_2y_2 + 0,21x_3y_2 + 0,08x_3y_3,$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0,15x_1y_1 + 0,12x_2y_1 + 0,09x_3y_1 + 0,35x_2y_2 + 0,21x_3y_2 + 0,08x_3y_3 -$$

$$-(0,15x_1 + 0,47x_2 + 0,38x_3)\cdot(0,36y_1 + 0,56y_2 + 0,08y_3) =$$

$$= (0,096x_1 - 0,0492x_2 - 0,0468x_3)y_1 + (-0,084x_1 + 0,0868x_2 - 0,0028x_3)y_2 +$$
$$+(-0,012x_1 - 0,0376x_2 + 0,0496x_3)y_3,$$

$$D\xi = 0,15x_1^2 + 0,47x_2^2 + 0,38x_3^2 - (0,15x_1 + 0,47x_2 + 0,38x_3)^2,$$

$$D\eta = 0,36y_1^2 + 0,56y_2^2 + 0,08y_3^2 - (0,36y_1 + 0,56y_2 + 0,08y_3)^2.$$

Тогда

$$r_{\xi\eta}=\frac{(0,096x_1-0,0492x_2-0,0468x_3)y_1-(0,084x_1-0,0868x_2+0,0028x_3)y_2-(0,012x_1+0,0376x_2-0,0496x_3)y_3,}{\sqrt{0,15x_1^2+0,47x_2^2+0,38x_3^2-(0,15x_1+0,47x_2+0,38x_3)^2}\cdot\sqrt{0,36y_1^2+0,56y_2^2+0,08y_3^2-(0,36y_1+0,56y_2+0,08y_3)^2}}.$$

Пример 12.7. Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$ случайных величин $X=\alpha\xi+\beta\eta$ и $Y=\alpha\xi-\beta\eta$, если ξ и η – независимые нормально распределённые случайные величины, α,β – положительные вещественные коэффициенты и $M\{\xi\}=M\{\eta\}=a$, $D\{\xi\}=D\{\eta\}=\sigma^2$.

Решение: Запишем формулу для коэффициента корреляции $r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X\cdot\sigma_Y}}$.

Найдём ковариацию и дисперсии:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY,$$

$$M(X\cdot Y)=M\left[(\alpha\xi+\beta\eta)\cdot(\alpha\xi-\beta\eta)\right]=M\left(\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2\right)=\alpha^2M\xi^2-\beta^2M\eta^2.$$

По условию задачи известно, что $M\xi=M\eta=a$, $D\xi=D\eta=\sigma^2$.

Тогда второй начальный момент

$$M\xi^2=M\eta^2=\sigma^2+a^2 \text{ (т.к. } D\xi=M\xi^2-M^2\xi\text{)},$$

$$M(X\cdot Y)=\alpha^2M\xi^2-\beta^2M\eta^2=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\cdot\left(a^2+\sigma^2\right),$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\cdot\left(a^2+\sigma^2\right)-a^2\left(\alpha^2-\beta^2\right)=\sigma^2\left(\alpha^2-\beta^2\right).$$

Для дисперсий можем записать:

$$DX=D(\alpha\xi+\beta\eta)=\alpha^2D\xi+\beta^2D\eta=\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2\right),\quad DY=D(\alpha\xi-\beta\eta)=\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2\right),$$

где воспользовались свойствами дисперсии и независимостью величин ξ и η.

Теперь запишем выражение для коэффициента корреляции:

$$r_{XY}=\frac{\sigma^2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{\left(\sqrt{\sigma^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\right)^2}=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)}.$$

***Пример 12.8*.** Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n$ случайные величины и коэффициент корреляции двух из них равен ρ. Доказать, что для этого коэффициента корреляции справедливо неравенство:

$$\rho\geq\frac{-1}{n-1}.$$

***Доказательство*:** Запишем нормированную корреляционную матрицу R

$$R=\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ – эта матрица неотрицательно определена.

Поэтому для любого вектора $\vec{X}=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)^T$, $\vec{x}\neq 0$ справедливо:

$\vec{X}^T\cdot R\cdot\vec{X}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\rho\sum_{i<j}x_ix_j\geq 0$. Как получили последнее неравенство:

$$\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+\rho\sum_{i=2}^{n}x_i, & x_2+\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}x_i, & \dots, & x_n+\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}x_i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} x_1+\rho\sum_{i=2}^{n}x_i, & x_2+\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}x_i, & \dots, & x_n+\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}x_i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x_1^2+x_1\rho\sum_{i=2}^{n}x_i+x_2^2+x_2\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}x_i+\dots+x_n^2+x_n\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}x_i$$

Заметим, в каждой сумме присутствуют одинаковые произведения вида x_ix_{i+k}, $k>0$. Например, в 1-ой и 2-ой есть одинаковые произведения x_1x_2, во 2-ой и 3-ей – x_2x_3, в 1-ой и 3-ей – x_1x_3, в 1-ой и n-ой – x_1x_n и т.д. Таким образом, можем записать:

$$\begin{pmatrix} x_1+\rho\sum_{i=2}^{n}x_i, & x_2+\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}x_i, & \dots, & x_n+\rho\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n}x_i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\rho\sum_{i<j}x_ix_j\geq 0.$$

(≥ 0, так как марица неотрицательно определена).

При $x_1=x_2=\dots=x_n=1$ получим $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\rho\sum_{i<j}x_ix_j=n+2\rho\frac{n(n-1)}{2}=n+\rho n(n-1)\geq 0$,

где мы учитываем, что $\sum_{i<j}x_ix_j=\frac{n(n-1)}{2}$ при $x_i=1$.

Тогда из последнего неравенства получим $\rho\geq-\frac{1}{n-1}$.

Пример 12.9. Пусть ξ,η,ζ – независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Могут ли быть независимыми случайные величины $\xi+\zeta$ и $\eta+\zeta$?

***Решение*:** Обозначим $X=\xi+\zeta,\ Y=\eta+\zeta$. Для независимых сучайных величин выполняется: $M(X\cdot Y)=MX\cdot MY$, $D(X\pm Y)=DX+DY$. Проверим выполнение этих свойств:

$$M(X\cdot Y)=M\{(\xi+\zeta)\cdot(\eta+\zeta)\}=M\{\xi\eta+\zeta\eta+\xi\zeta+\zeta^2\}=M\xi M\eta+M\zeta M\eta+M\xi M\zeta+M\zeta^2\ ,$$

$$MX\cdot MY=(M\xi+M\zeta)\cdot(M\eta+M\zeta)=M\xi M\eta+M\zeta M\eta+M\xi M\zeta+M^2\zeta\ .$$

Сравнивая $MX\cdot MY$ и $M(X\cdot Y)$ приходим к выводу, что $MX\cdot MY=M(X\cdot Y)\Leftrightarrow M^2\zeta=M\zeta^2$, значит, $D\zeta=0\Leftrightarrow\zeta=const$.

$$D(X+Y)=D(\xi+\zeta+\eta+\zeta)=D(\xi+\eta+2\zeta)=D\xi+D\eta+4D\zeta\ ,$$

$$D(X-Y)=D(\xi+\zeta-\eta-\zeta)=D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta.$$

Так как в случае независимости X и Y $D(X+Y)=D(X-Y)$, то $D\xi+D\eta+4D\zeta=D\xi+D\eta$.

Последнее равенство выполняется $\Leftrightarrow D\zeta=0\Leftrightarrow\zeta=const$.

Таким образом, $\xi+\zeta,\eta+\zeta$ могут быть независимыми, если $\zeta=const$.

***Пример 12.10*.** Вычислить математическое ожидание и дисперсию определителя $\Delta=\begin{vmatrix}\xi_{11} & \xi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}\end{vmatrix}$, если все ξ_{ij} независимы, $M\{\xi_{ij}\}=0,\quad D\{\xi_{ij}\}=\sigma^2$.

***Решение*:**

1) $M\Delta=M\{\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}\xi_{21}\}=M\xi_{11}M\xi_{22}-M\xi_{12}M\xi_{21}=0$,

2) $D\Delta=D(\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}\xi_{21})=D(\xi_{11}\xi_{22})+D(\xi_{12}\xi_{21})$, так как $\xi_{11}\xi_{22}$ и $\xi_{12}\xi_{21}$ независимы.

$D(\xi_{11}\xi_{22})=M(\xi_{11}\xi_{22})^2-M^2(\xi_{11}\xi_{22})=M\xi_{11}^2\cdot M\xi_{22}^2=\sigma^2\cdot\sigma^2=\sigma^4$, где

$M\xi_{ii}^2=D\xi_{ii}+M^2\xi_{ii}=\sigma^2, i=1,2$.

Аналогично находим $D(\xi_{12}\xi_{21})=\sigma^4$, тогда $D\Delta=2\sigma^4$.

Задачи по теме 12

12.1. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет функцию распределения

$$F(x,y)=1-e^{-ax}-e^{-bx}+e^{-ax-bx}\ \ (a>0,\ b>0)\ .$$

Найти математическое ожидание и корреляционную матрицу этой двумерной случайной величины. Являются ли эти величины зависимыми?

12.2. Случайные величины ξ и η независимые и имеют конечные дисперсии. Доказать, что $D\{\xi\eta\} \geq D\xi \cdot D\eta$.

12.3. Какими характеристиками должны обладать независимые случайные величины, чтобы выполнялось равенство: $D\{\xi\eta\} = D\xi \cdot D\eta$.

12.4. Пусть ξ неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi \geq i\}$; б) пусть ξ и η независимые случайные величины, принимающие неотрицательные целочисленные значения и с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что

$$M \min\{\xi, \eta\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi \geq i\} \mathrm{P}\{\eta \geq i\}.$$

12.5. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

$$p(x, y) = \begin{cases} 2xy \exp\{-x^2 - y^2\}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

<u>Найти</u> одномерные плотности, математические ожидания и дисперсии величин ξ и η.

12.6. Достаточно ли попарной независимости случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ для выполнения свойства: $D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$.

12.7. Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi R^3}\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right), & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, \quad x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

<u>Найти</u> ковариацию компонент случайной величины (ξ, η).

12.8. Двумерная случайная величина (ξ, η) задана законом распределения, представленным в таблице

	ξ=2	ξ=4	ξ=7
η=3	0,12	0,18	0,10
η=8	0,10	0,11	0,39

<u>Найти</u> ковариацию случайных величин ξ и η.

12.9. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность вероятности

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{2}, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, 0<y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0,\ x\le 0, x>\dfrac{\pi}{2},\ y\le 0, y>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

<u>Найти</u> математические ожидания $M\{\xi\}, M\{\eta\}$, дисперсии $D\{\xi\}, D\{\eta\}$ и построить ковариационную матрицу.

12.10. $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – случайные величины с конечными ненулевыми дисперсиями. Доказать, что условие $D\left(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n\right)=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n$ выполняется тогда и только тогда, когда $r\left(\xi_i,\xi_j\right)=0$.

12.11. Определить математическое ожидание, дисперсию двумерной случайной величины (X,Y), если плотность вероятности имеет вид: $p(x,y)=\dfrac{2}{\pi\left(x^2+y^2+1\right)^3}$.

12.12. Даны математические ожидания двух нормальных величин $M\{X\}=26,\ M\{Y\}=-12$ и их ковариационная матрица: $\mathbf{K}=\begin{bmatrix}196 & -91\\ -91 & 169\end{bmatrix}$. Определить плотность вероятности двумерной величины (X,Y).

12.13. В условиях задачи ***11.11*** записать ковариационную матрицу.

12.14. Определить в точке $x_1=2, x_2=2$ плотность вероятности системы двух нормальных величин (X,Y), для которых: $M\{X\}=0, M\{Y\}=0$ и $\mathbf{K}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

12.15. Случайные величины (X,Y) связаны соотношением: $mX+nY=c$, где $m\ne 0, n\ne 0, c$ – неслучайные величины.

***<u>Найти</u>*: а)** коэффициент корреляции; **б)** отношение среднеквадратических отклонений.

Тема 13. Характеристическая и производящая функции

Определение 1. ***Характеристической функцией*** $g_\xi(u)$ случайной величины ξ называется комплекснозначная функция, определяемая как математическое ожидание $\exp\{iu\xi\}$, где i – мнимая единица, u – вещественная величина:

$$g_\xi(u) = M\left\{e^{iu\xi}\right\}.$$

Для ***непрерывной*** случайной величины характеристическая функция определяется формулой

$$g_\xi(u) = M\left\{e^{iu\xi}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, dF_\xi(x),$$

для ***дискретной*** –

$$g_\xi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{iux_k} p_k,$$

где x_k – частные значения случайной величины, $p_k = \mathrm{P}\{\xi = x_k\}$ – соответствующие им вероятности.

Плотность вероятностей $p_\xi(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию как *обратное преобразование Фурье*:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} g_\xi(u)\, du.$$

(Для дискретных случайных величин эта формула даёт плотность вероятностей в виде суммы дельта-функций).

Основные свойства характеристических функций

1. $g_\xi(u)$ – непрерывная функция, $g_\xi(0) = 1$, $\left|g_\xi(u)\right| \le 1$ для любых u;

2. Если $\eta = a\xi + b$, то $g_\eta(u) = e^{ibu} g_\xi(au)$;

3. Если ξ и η независимые случайные величины, то для $\zeta = \xi + \eta$ характеристическая функция $g_\zeta(u)$ определяется следующим образом:

$$g_\zeta(u) = g_\xi(u) \cdot g_\eta(u);$$

4. Если начальный момент m_k существует, то

$$m_k = M\left\{\xi^k\right\} = \frac{1}{i^k}\left.\frac{d^k g_\xi(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Если случайная величина принимает только неотрицательные значения, то характеристическую функцию выгоднее брать в виде

$$g_\xi(s) = M\left\{e^{-s\xi}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} dF_\xi(x).$$

Характеристическая функция является важной характеристикой случайной величины, наряду с функцией распределения. Основное достоинство заключается в простоте определения с их помощью моментов случайной величины. Также рекомендуется использовать характеристическую функцию, если приходится работать с суммами случайных величин.

Определение 2. Производящей функцией случайной величины ξ, которая принимает лишь значения 0, 1, 2…, с вероятностью $p_k = \mathrm{P}\{\xi = p_k\}$, $k = 0,1,2...$, называется функция

$$\psi_\xi(z) = M\left\{z^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k .$$

Основные свойства производящих функций

1. $\psi_\xi(1) = 1$;

2. Если ξ и η независимые случайные величины, то для $\zeta = \xi + \eta$ производящая функция $\psi_\zeta(z)$ определяется следующим образом: $\psi_\zeta(z) = \psi_\xi(z) \cdot \psi_\eta(z)$;

3. $M\xi = \psi'_\xi(1), M\xi^2 = \psi''_\xi(1) + \psi'_\xi(1)$.

Примеры решения задача по теме 13

Пример 13.1. Пусть дискретная случайна ξ величина задана рядом распределения:

ξ_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Найти выражение для производящей функции, $M\xi$, $D\xi$ и выражение для характеристической функции.

Решение:

1) $\psi_\xi(z) = M\left(z^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k = z^1 \cdot \frac{1}{2} + z^2 \cdot \frac{1}{6} + z^3 \cdot \frac{1}{3}$, где показаетли степеней z – это возможные значения случайной величины.

2) Найдём $M\xi,\ D\xi$, используя производящую функцию:

$$M\xi = \psi'(1) = \left(\frac{1}{2} + 2z\cdot\frac{1}{6} + 3z^2\cdot\frac{1}{3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{6}.$$

Если мы найдем $M\xi$ по определению, то получим то же самое:

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Так как $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi$, $M\xi^2 = \psi''(1) + \psi'(1)$, то $D\xi = \psi''(1) + \psi'(1) - \left(\psi'(1)\right)^2$;

$$\psi''(1) = \left(\frac{1}{3} + 2z\right)\Big|_{z=1} = \frac{7}{3}, \text{ тогда } D\xi = \frac{7}{3} + \frac{11}{6} - \frac{121}{36} = \frac{29}{36}.$$

Найдём $D\xi$ по определению: $M\xi^2 = 1\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{3} = \frac{25}{6},\ D\xi = \frac{25}{6} - \frac{121}{36} = \frac{29}{36}$.

3) Получим выражение для характеристической функции и найдём $M\xi,\ D\xi$, используя эту функцию: $g_\xi(u) = \sum_k e^{iux_k}\cdot p_k = e^{iu\cdot 1}\cdot\frac{1}{2} + e^{iu\cdot 2}\cdot\frac{1}{6} + e^{iu\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}$.

Если $M\left\{|\xi|^k\right\} < +\infty$, то $g_\xi^{(k)}(0) = i^k\cdot M\left(\xi^k\right)$, т.е. $M(\xi) = \frac{1}{i}\cdot g'_\xi(0)$.

В нашем случае

$$g'_\xi(0) = \left(e^{iu\cdot 1}\cdot\frac{i}{2} + e^{iu\cdot 2}\cdot\frac{2i}{6} + e^{iu\cdot 3}\cdot\frac{3i}{3}\right)\Big|_{u=0} = \frac{i}{2} + \frac{i}{3} + i \Rightarrow M\xi = \frac{1}{i}\left(\frac{i}{2} + \frac{i}{3} + i\right) = \frac{11}{6}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - M^2\xi,\ M\left(\xi^2\right) = \frac{1}{i^2}\cdot g''_\xi(0) = -g''_\xi(0);$$

$$g''_\xi(0) = \left(e^{iu\cdot 1}\cdot\frac{i^2}{2} + e^{iu\cdot 2}\cdot\frac{(2i)^2}{6} + e^{iu\cdot 3}\cdot\frac{(3i)^2}{3}\right)\Big|_{u=0} = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 3 = -\frac{25}{6} \Rightarrow M\xi^2 = \frac{25}{6},$$

тогда

$$D\xi = \frac{25}{6} - \frac{121}{36} = \frac{29}{36}.$$

Из полученных результатов понятно, что, используя аппарат характеристических или производящих функций, можно легко «производить» моменты любого порядка.

Пример 13.2. Пусть $g_\xi(u)-$ характеристическая функция случайной величины ξ. Найти характеристическую функцию случайной величины $-\xi$.

Решение: Воспользуемся формулой Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$:

$$g_\xi(u) = Me^{iu\xi} = M\left\{\cos(u\xi) + i\sin(u\xi)\right\}.$$

Тогда $g_{-\xi}(u) = Me^{-iu\xi} = M\left\{\cos(-u\xi) + i\sin(-u\xi)\right\} = M\left\{\cos(u\xi) - i\sin(u\xi)\right\} = \overline{g_\xi(u)}$ – получили комплексносопряжённую функцию.

Свойство характеристической функции: если характеристическая функция принимает только вещественные значения, то она чётна $g_\xi(u) = g_\xi(-u)$. В общем же случае $g_\xi(-u) = \overline{g_\xi(u)}$.

***Пример 13.3*.** Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Лапласа с плотностью вероятности $p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

***Решение*:** В нашем случае имеем непрерывную случайную величину, поэтому характеристическая функция будет преобразованием Фурье плотности вероятностей величины ξ: $g_\xi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} p_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux}e^{-|x|}\,dx$.

Функция $e^{-|x|}$ имеет разные аналитические выражения на разных участках действительной прямой: $e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0, \\ e^{x}, & x < 0. \end{cases}$

С учётом этого перепишем наш интеграл:

$$g_\xi(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux}e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{iux}e^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{iux}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(iu+1)x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{(iu-1)x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(iu+1)}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(iu+1)x}\,d\left((iu+1)x\right) + \frac{1}{2(iu-1)}\int\limits_{0}^{\infty} e^{(iu-1)x}\,d\left((iu-1)x\right) =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2(iu+1)}e^{(iu+1)x}\Big|_B^0 + \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2(iu-1)}e^{(iu-1)x}\Big|_0^A = \frac{1}{2(iu+1)}\cdot(1-0) + \frac{1}{2(iu-1)}\cdot(0-1) =$$

$$= \frac{1}{2(iu+1)} - \frac{1}{2(iu-1)} = \frac{-2}{2(iu+1)(iu-1)} = \frac{1}{u^2+1}.$$

Таким образом, получили $g_\xi(u) = \frac{1}{u^2+1}$.

***Пример 13.4*.** Найти характеристическую функцию для следующих распределений: **а)** биномиального; **б)** равномерного непрерывного; **в)** геометрического; **г)** распределения Коши. Для каждого случая получить числовые характеристики случайной величины $M\xi$, $D\xi$.

Решение:

а) $\mathrm{P}\{\xi = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m = 0,1,2,...,n.$

$$1)\ g_\xi(u) = \sum_{m=0}^{n} e^{ium} \cdot C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(pe^{iu}\right)^m (1-p)^{n-m} = \left(1-p+pe^{iu}\right)^n ,$$

где мы воспользовались биномом Ньютона $\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m} = (b+a)^n$.

$$2)\ M\xi = \frac{1}{i}\cdot g'_\xi(0),\ \ g'_\xi(u) = n\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-1}\cdot p\cdot i\cdot e^{iu},\ \ M\xi = np\left(1-p+p\right)^{n-1} = np\ .$$

$$M\xi^2 = -g''_\xi(0),\ g'_\xi(u) = npi\left[\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-1}\left(e^{iu}\right)' + e^{iu}\left(\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-1}\right)'\right] =$$

$$= npi\left[e^{iu} i\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-1} + e^{iu} ip(n-1)\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-2}\right] =$$

$$= -np\left[e^{iu}\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-1} + e^{iu} p(n-1)\left(1-p+pe^{iu}\right)^{n-2}\right].$$

$$M\xi^2 = -g''_\xi(0) = np\left[\left(1-p+p\right)^{n-1} + p(n-1)\left(1-p+p\right)^{n-2}\right] = np\left[1+p(n-1)\right].$$

Тогда $D\xi = np\left[1+p(n-1)\right] - (np)^2 = np + (np)^2 - np^2 - (np)^2 = np(1-p).$

Получили характеристики равные тем, которые ранее были найдены по определению.

б) $p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a,b], \\ 0, \qquad x \notin [a,b]. \end{cases}$

$$1)\ g_\xi(u) = Me^{iu\xi} = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{iux}dx = \frac{1}{iu(b-a)}\int_a^b e^{iux}d(iux) = \frac{1}{iu(b-a)} e^{iux}\Big|_a^b = \frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}.$$

$$2)\ M\xi = \frac{g'_\xi(0)}{i},$$

$$g'_\xi(u) = \frac{1}{i(b-a)}\left[\frac{ibu\cdot e^{ibu} - iau\cdot e^{iau} - e^{ibu} + e^{iau}}{u^2}\right] = \frac{1}{i(b-a)}\left[\frac{(ibu-1)e^{ibu} - (iau-1)e^{iau}}{u^2}\right].$$

При подстановке в $g'_\xi(u)$ значение $u = 0$ получим неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Можно её раскрыть, используя правило Лопиталя 2 раза или разложить экспоненту в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right);$$

$$\lim_{u\to 0} g'_\xi(u) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{i(b-a)} \cdot \frac{-(1-ibu)\left(1+ibu-\frac{(ub)^2}{2}\right)+(1-iau)\left(1+iau-\frac{(ua)^2}{2}\right)+o(u^2)}{u^2} =$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1}{i(b-a)} \cdot \frac{-(1-ibu)\left(1+ibu-\frac{(ub)^2}{2}\right)+(1-iau)\left(1+iau-\frac{(ua)^2}{2}\right)+o(u^2)}{u^2}.$$

После несложных преобразований получим:

$$\lim_{u\to 0} g'_\xi(u) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{i(b-a)u^2} \cdot \left[\frac{(au)^2}{2} - \frac{(bu)^2}{2} + o(u^2)\right] = -\frac{b^2-a^2}{2i(b-a)} = -\frac{b+a}{2i}.$$

Тогда $M\xi = \frac{g'_\xi(0)}{i} = \frac{b+a}{2}$.

Дисперсию $D\xi$ найти самостоятельно, аналогичну пункту **а)**.

в) $P\{\xi = m\} = p(1-p)^{n-1}$, $n = 1,2,3,....$

Для заданной величины можем записать

$$g_\xi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{iun} p(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} e^{iun} \frac{(1-p)^n}{1-p} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty} e^{iun}(1-p)^n = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{iu}(1-p)\right)^n.$$

Получили бесконечную сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем равным $e^{iu}(1-p) < 1$, тогда можем записать выражение для характеристической функции:

$$g_\xi(u) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{iu}(1-p)}{1-e^{iu}(1-p)} = \frac{pe^{iu}}{1-e^{iu}(1-p)}.$$

$M\xi$, $D\xi$ найти самостоятельно, аналогичну пункту **а).**

г) $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-a)^2}$, $\lambda, a > 0 -$ параметры распределения, $-\infty < x < \infty$.

$$g_\xi(u) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{\lambda^2+(x-a)^2}dx = \begin{bmatrix} x-a=t \\ x=a+t \\ dx=dt \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(a+t)}}{\lambda^2+t^2}dt = \frac{\lambda e^{iua}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iut}}{\lambda^2+t^2}dt.$$

Нужно вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iut}}{\lambda^2+t^2}dt$. Сделаем это с помощью вычетов.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iuz}}{\lambda^2+z^2} dz$. Подынтегральная функция имеет две особые точки (простые полюса): $\lambda^2+z^2=0,\ z_1=i\lambda,\ z_2=-i\lambda.$ Тогда, согласно теории вычетов:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iuz}}{\lambda^2+z^2} dz = 2\pi i \sum_{k=1,2} \underset{z=z_k}{res}\left(\frac{e^{iuz}}{\lambda^2+z^2}\right).$$

Рассмотрим два случая:

1) $u>0$. В этом случае берем вычеты в особых точках, лежащих в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Особая точка $z=i\lambda$ – принадлежит верхней полуплоскости. Поэтому:

$$\underset{z=i\lambda}{res}\left(\frac{e^{iuz}}{\lambda^2+z^2}\right) = \lim_{z\to i\lambda} \frac{e^{iuz}}{(z+i\lambda)(z-i\lambda)}(z-i\lambda) = \frac{e^{-u\lambda}}{2i\lambda};$$

2) $u<0$. В этом случае берем вычеты в особых точках, лежащих в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$. Особая точка $z=-i\lambda$ – лежит в нижней полуплоскости. Поэтому:

$$\underset{z=-i\lambda}{res}\left(\frac{e^{iuz}}{\lambda^2+z^2}\right) = \lim_{z\to -i\lambda} \frac{e^{iuz}}{(z+i\lambda)(z-i\lambda)}(z+i\lambda) = \frac{e^{u\lambda}}{2i\lambda}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut}}{\lambda^2+t^2} dt = 2\pi i \frac{e^{-|u|\lambda}}{2i\lambda} = \pi \frac{e^{-|u|\lambda}}{\lambda},$$

и характеристическая функция будет иметь вид:

$$g_\xi(u) = \frac{\lambda e^{iua}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut}}{\lambda^2+t^2} dt = \frac{\lambda e^{iua}}{\pi} \cdot \frac{\pi e^{-|u|\lambda}}{\lambda} = e^{iua-|u|\lambda}.$$

***Пример 13.5*.** Показать, что чётная характеристическая функция случайной величины с плотностью вероятности $p_\xi(x)$ представима в виде: $g_\xi(u) = 2\int\limits_0^{\infty} \cos ux\, p_\xi(x)\, dx$.

***Доказательство*:** $g_\xi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} p_\xi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, p_\xi(x)\, dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, p_\xi(x)\, dx$. Так как функция $g_\xi(u)$ по условию чётная, то мнимая часть должна быть равна нулю, значит,

$$g_\xi(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, p_\xi(x)\, dx = 2\int\limits_0^{\infty} \cos ux\, p_\xi(x)\, dx.$$

Пример 13.6. Показать, что вещественная функция, не являющаяся четной, не может быть характеристической функцией.

***Доказательство*:**

1 способ. Обозначим $f(u)=g_\xi(u)$,

$$g_\xi(u)\neq g_\xi(-u)\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}p_\xi(x)dx\neq\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}p_\xi(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,p_\xi(x)dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin ux\,p_\xi(x)dx\neq\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,p_\xi(x)dx-i\int_{-\infty}^{\infty}\sin ux\,p_\xi(x)dx.$$

По условию задачи $f(u)$ вещественная, поэтому мнимая часть должна быть равна нулю:

$\int_{-\infty}^{\infty}\sin ux\,p_\xi(x)dx=0$. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,p_\xi(x)dx\neq\int_{-\infty}^{\infty}\cos ux\,p_\xi(x)dx$ – противоречие, которое показывает, что $f(u)$ не может быть характеристической функцией.

2 способ. Рассмотрим вещественную функцию $\varphi(t)\neq\varphi(-t)$. Функция вещественна, когда выполняются условия: $\overline{\varphi(t)}=\varphi(t)$ и $\overline{\varphi(t)}=\varphi(-t)$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(t)=\varphi(-t)$.

Пример 13.7. Пусть ξ и η независимые случайные величины с характеристической функцией $g(u)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi-\eta$.

Решение: $g_\xi(u)=M\left\{e^{iu\xi}\right\}$, $g_\eta(u)=M\left\{e^{iu\eta}\right\}$. Так как ξ и η независимы, то

$$g_{\xi-\eta}(u)=M\left\{e^{iu(\xi-\eta)}\right\}=M\left\{e^{iu\xi}\cdot e^{-\eta iu}\right\}=M\left\{e^{iu\xi}\right\}\cdot M\left\{e^{\eta i(-u)}\right\}$$

Тогда можем записать

$$g_{\xi-\eta}(u)=g(u)\cdot g(-u)=g(u)\cdot\overline{g(u)}=M\{\cos ux+i\sin ux\}\,M\{\cos ux-i\sin ux\}=$$

$$=M\{(\cos ux+i\sin ux)(\cos ux-i\sin ux)\}=M\left(\cos^2 ux+\sin^2 ux\right)=1.$$

***Пример 13.8*.** Пусть случайные величины $\xi\sim N\left(a_1,\sigma_1^2\right)$, $\eta\sim N\left(a_2,\sigma_2^2\right)$ независимы. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi+\eta$.

***Решение*:** Воспользуемся свойством характеристических функций: если две случайные величины независимы, то характеристическая функция их суммы равна произведению их характеристических функций, т.е. $g_{\xi+\eta}(u)=g_{\xi}(u)\cdot g_{\eta}(u)$.

В нашем случае: $g_{\xi}(u)=e^{iua_1-\frac{\sigma_1^2u^2}{2}}$, $g_{\eta}(u)=e^{iua_2-\frac{\sigma_2^2u^2}{2}}$. Тогда $g_{\xi+\eta}(u)=e^{iu(a_1+a_2)-\left(\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)u^2}$.

***Пример 13.9*.** Доказать, что следующие функции не могут быть характеристическими:

а) $e^{-i|u|}$;

б) $a_1\cos(u)+a_2\cos(2u)+\ldots+a_n\cos(nu)+b_1\sin(u)+b_2\sin(2u)+\ldots+b_n\sin(nu)$,

где $a_i, b_i, i=1,2,...n$ – вещественные положительные числа.

***Доказательство*:** (Для решения такого типа задач, достаточно показать, что какое-то из свойств характеристических функций не выпоняется).

а) $f(u)=e^{-i|u|}$.

Для любой характеристической функции должно выполняться условие $\forall u \quad f(-u)=\overline{f(u)}$. Рассмотрим выполняется ли оно для нашей функции:

$f(-u)=e^{-i|-u|}=e^{-i|u|}=f(u)=\cos u-i\sin|u|$, т.е.

$$f(-u)=\begin{cases}e^{-iu}, & u>0,\\ e^{iu}, & u<0,\\ 1, & u=0,\end{cases}=\begin{cases}\cos u-i\sin u, & u>0,\\ \cos u+i\sin u, & u<0,\\ 1, & u=0.\end{cases}$$

$\overline{f(u)}=\overline{e^{-i|u|}}=\overline{\cos u-i\sin|u|}=\cos u+i\sin|u|$, т.е.

$$\overline{f(u)}=\begin{cases}\cos u+i\sin u, & u>0,\\ \cos u-i\sin u, & u<0,\\ 1, & u=0.\end{cases}$$

Возьмём точки

1) $u=0$: $f(-u)=\overline{f(u)}=1$;

2) $u=\pi$: $f(-u)=\overline{f(u)}=-1$;

3) $u=\dfrac{\pi}{2}$: $f(-u)=-i,\ \overline{f(u)}=i$.

Таким образом, существуют такие u, при которых не выполняется условие $f(-u)=\overline{f(u)}$ (в точках, где sin$u$ не равен нулю), т.е. $f(u)=e^{-i|u|}$ не является характеристической.

б) $f(u)=\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos ku+b_k\sin ku),\ a_k,b_k>0,\ a_k,b_k\in R,\ k=1,..,n.$

Очевидно, данная функция принимает вещественные значения. Для характеристических функций должно выполняться условие: если характеристическая функция вещественна, то она чётна. При $b_k>0$ функция $f(u)=\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos ku+b_k\sin ku)$ не является чётной. Следовательно, она не является характеристической.

***Пример 13.10*.** Могут ли быть характеристическими функциями некоторых распределений следующие функции: **а)** $\sin(2t)$; **б)** e^{-t^4}; **в)** $\cos(t^2)$; **г)** $e^{-|t|}$?

***Решение*:**

а) $g(t)=\sin 2t$. Возьмём $t=0$, $g(0)=0$. Не выполняется свойство характеристической функции $g(0)=1$.

б) $g(t)=e^{-t^4}$. Для характеристической функции выполняется $g_\xi^{(k)}(0)=i^k\cdot M(\xi^k)$.

Найдем два первых начальных момента:

$$M\xi=\frac{1}{i}\left(e^{-t^4}\right)'\Big|_{t=0}=-4t^3\frac{1}{i}e^{-t^4}\Big|_{t=0}=0;\quad M\xi^2=\frac{1}{i^2}\left(e^{-t^4}\right)''\Big|_{t=0}=-\left(16t^6+12t^2\right)e^{-t^4}\Big|_{t=0}=0.$$

Дисперсия $D\xi=M\xi^2-M^2\xi=0\Rightarrow$ случайная величина имеет нулевое среднее и «нулевой разброс» около среднего. Очевидно, что $\xi=const=0$ и $\mathrm{P}\{\xi=0\}=1$, т.е. случайная величина имеет вырожденное распределение, для которого $g_\xi(t)\equiv 1$. Получили противоречие, которое и доказывает, что $g(t)=e^{-t^4}$ не является характеристической функцией.

в) $g(t)=\cos(t^2)$. Найдем два первых начальных момента:

$$M\xi=\frac{1}{i}\left(\cos t^2\right)'\Big|_{t=0}=-2t\frac{1}{i}\sin t^2\Big|_{t=0}=0;\quad M\xi^2=\frac{1}{i^2}\left(\cos t^2\right)''\Big|_{t=0}=\left(2\sin t^2+4t^2\cos t^2\right)\Big|_{t=0}=0.$$

Аналогично предыдущей задаче, исходная функция не является характеристической.

г) $g(t)=e^{-|t|}$. Основные свойства характеристических функций легко проверяются для этой функции. Найдем плотность распределения вероятностей по известной характеристической функции как обратное преобразование Фурье $g_\xi(t)$:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_\xi(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-|t|}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-itx}e^{-t}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-itx}e^{t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1+ix)}\int_{0}^{\infty}e^{-t(1+ix)}d(1+ix)t+\frac{1}{2\pi(1-ix)}\int_{-\infty}^{0}e^{t(1-ix)}d(1-ix)t=$$

$$=-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi(1+ix)}e^{-t(1+ix)}\Big|_0^A+\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2\pi(1-ix)}e^{t(1-ix)}\Big|_B^0=-\frac{1}{2\pi(1+ix)}(0-1)+\frac{1}{2\pi(1-ix)}(1-0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-ix)}+\frac{1}{2\pi(1+ix)}=\frac{2}{2\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(при предельном переходе учитываем, что $e^{-itx}=\cos tx-i\sin tx$ ограниченна при любом *t*).

Распределение Коши имеет вид: $p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\lambda^2+(x-a)^2}$, $x\in(-\infty,\infty)$, (λ,a –параметры распределения). Мы получили плотность $p_\xi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ – частный случай рапределения Коши при $\lambda=1,\ a=0$.

Пример 13.11. Найти распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

а) $\frac{1}{1+t^2}$; **б)** $\cos t$; **в)** $\cos^2 t$; **г)** e^{-t^2}; **д)** $\frac{\sin t}{t}$; **е)** $e^{-|t|}\cos t$; **ж)** $\frac{1}{1-it}$.

***Решение*:**

а) $p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_\xi(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{1+t^2}dt$.

Можно вычислить этот интеграл с помощью вычетов, но можно воспользоваться табличным интегралом:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(it)^{-\nu}e^{-itp}}{\beta^2+t^2}dt=\pi\beta^{-\nu-1}e^{-|p|\beta}.$$

В нашем случае $\beta = 1,\ p = x,\ v = 0$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{1+t^2} dt = \pi e^{-|x|},\ p_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

В теории вероятностей известно распределение Лапласа, его плотность $p_\xi(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|}, \alpha, \beta -$ параметры распределения, причём $M\xi = \beta,\ D\xi = \frac{2}{\alpha^2}$.

Мы получили частный случай этого распределения с $\alpha = 1, \beta = 0$.

б) Запишем характеристическую функцию в виде:

$g_\xi(t) = \cos t = \frac{e^{-it} + e^{it}}{2} = e^{-it}\frac{1}{2} + e^{it}\frac{1}{2}$. В случае, если случайная величина дискретная с распределением $\mathrm{P}\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \ldots$, то $g_\xi(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} \cdot p_k$. В нашем случае $g_\xi(t) = e^{it\cdot(-1)}\frac{1}{2} + e^{it\cdot 1}\frac{1}{2}$, таким образом, можем записать ряд распределения:

x_k	-1	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Получили равномерно распределенную случайную величину на множестве $\{-1, 1\}$.

в) $g_\xi(t) = \cos^2 t = \left(\frac{e^{-it} + e^{it}}{2}\right)^2 = e^{-2it}\frac{1}{4} + e^{0it}\frac{1}{2} + e^{2it}\frac{1}{4}$.

Аналогично предыдущему пункту запишем ряд распределения:

x_k	-2	0	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

г) $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_\xi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - t^2} dt$.

Сделаем несложные преобразования в показателе экспоненты:

$$-t^2 - 2\frac{ix}{2}t - \left(\frac{ix}{2}\right)^2 + \left(\frac{ix}{2}\right)^2 = -\left(t + \frac{ix}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\ .$$

Тогда

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-t^2} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t+\frac{ix}{2}\right)} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t+\frac{ix}{2}\right)} d\left(t + \frac{ix}{2}\right) =$$

$$\left[t+ix=u\right]=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi}\sqrt{\pi},$$

где $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ – интеграл Пуассона. Таким образом, мы получили $p_\xi(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$.

Плотность нормального распределения с параметрами a и σ^2 имеет вид

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Мы получили плотность нормального распределения в частном случае: $a=0,\ \sigma=\sqrt{2}$.

д) $p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}g_\xi(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{1}{t}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}dt=$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{e^{it}-e^{-it}}{t}dt=\frac{1}{4\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx+it}}{t}dt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx-it}}{t}dt\right]=\frac{1}{4\pi i}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(x-1)}}{t}dt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(x+1)}}{t}dt\right].$$

Рассмотрим выражение с интегралами $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(x-1)}}{t}dt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(x+1)}}{t}dt$ подробнее. Заметим, что эти интегралы имеют смысл лишь как главные значения соответствующих несобственных интегралов второго рода (так как они существуют только в смысле главного значения). Вычислим их, используя вычеты. Еще отметим, что в случае равенства нулю показателя экспоненты эти интегралы раны нулю в смысле главного значения:

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}dt=\lim_{A\to\infty}\ln t\Big|_{-A}^{A}=\lim_{A\to\infty}\left(\ln|A|-\ln|-A|\right)=\lim_{A\to\infty}\left(\ln\left|\frac{A}{-A}\right|\right)=\lim_{A\to\infty}\left(\ln|-1|\right)=0.$$

Сделаем замену переменных во втором интеграле (для удобства): $-t=\tau$. Тогда получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(x-1)}}{t}dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau(x+1)}}{\tau}d\tau.$$

Обозначим: $V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it(x-1)}}{t}dt=I_1,\ \ V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau(x+1)}}{\tau}d\tau=I_2,\ I=I_1+I_2$.

Эти интегралы I_1, I_2 имеют одну особую точку в нуле. В случае расположения *n* особых точек функции $f(z)$ на действительной оси, такие интегралы согласно теории вычетов вычисляются так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} f(z)dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z)\right] \cdot \operatorname{sgn}\alpha .$$

В этом случае для первого интеграла запишем (перейдем к переменной z):

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz(1-x)}}{z}dz = I_1 = \begin{cases} \pi i \cdot \underset{z=0}{res}\left(\frac{1}{z}\right), & \text{если } 1-x \neq 0, \\ 0, & \text{если } 1-x = 0, \end{cases} = \begin{cases} \pi i, & \text{если } 1-x > 0, \\ -\pi i, & \text{если } 1-x < 0, \\ 0, & \text{если } 1-x = 0, \end{cases}$$

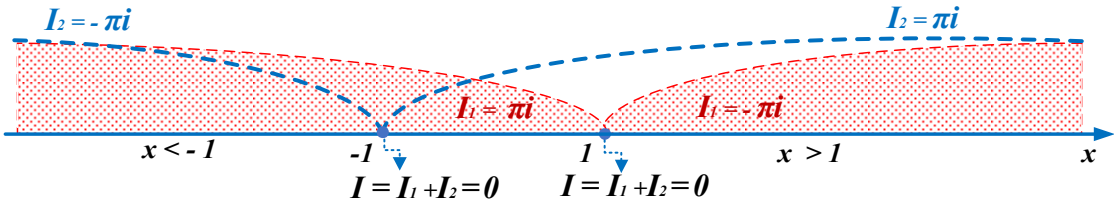
так как $\underset{z=0}{res}\frac{1}{z} \overset{\text{def}}{=} \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\cdot(z-0) = 1$

Аналогично для второго интеграла:

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz(1+x)}}{z}dz = I_2 = \begin{cases} \pi i \cdot \underset{z=0}{res}\left(\frac{1}{z}\right), & \text{если } 1+x \neq 0, \\ 0, & \text{если } 1+x = 0, \end{cases} = \begin{cases} \pi i, & \text{если } 1+x > 0, \\ -\pi i, & \text{если } 1+x < 0, \\ 0, & \text{если } 1+x = 0. \end{cases}$$

Тогда, для интеграла I можем записать, учитывая множество значений x (см. рис.):

$$I = I_1 + I_2 = \begin{cases} 2\pi i, & x \in (-1,1), \\ 0, & x \notin (-1,1). \end{cases}$$



Для искомой плотности вероятности окончательно запишем:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{4\pi i}\cdot I = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-1,1), \\ 0, & x \notin (-1,1). \end{cases}$$

е) $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_\xi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|}\cos t\,dt$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|}\cos t\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-itx} e^{t}\cos t\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-itx} e^{-t}\cos t\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}\cos t\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)}\cos t\,dt .$$

Получили два циклических интеграла вида $\int e^{\alpha t}\cos t\,dt$, которые вычисляются по частям (два раза):

$$I=\int e^{\alpha t}\cos t\,dt=\begin{bmatrix} u=\cos t \\ du=-\sin t \\ dv=e^{\alpha t}dt \\ v=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos t+\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}\sin t\,dt=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos t+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin t-\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha t}\cos t\,dt\right]=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos t+\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha t}\sin t-\frac{1}{\alpha^2}\int e^{\alpha t}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos t+\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha t}\sin t-\frac{1}{\alpha^2}I.$$

Тогда (решаем уравнение относительно I): $I=\dfrac{1}{1+\alpha^2}\left(\alpha e^{\alpha t}\cos t+e^{\alpha t}\sin t\right)$.

Запишем выражения для наших двух несобственных интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{t(1-ix)}\cos t\,dt=\left[\alpha=1-ix\right]=\lim_{A\to-\infty}\frac{(1-ix)e^{(1-ix)t}\cos t+e^{(1-ix)t}\sin t}{1+(1-ix)^2}\Bigg|_{A}^{0}=\frac{(1-ix)}{1+(1-ix)^2},$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t(1+ix)}\cos t\,dt=\left[\alpha=-(1+ix)\right]=\lim_{A\to\infty}\frac{-(1+ix)e^{-(1+ix)t}\cos t+e^{-(1+ix)t}\sin t}{1+(1+ix)^2}\Bigg|_{0}^{A}=\frac{(1+ix)}{1+(1+ix)^2},$$

где мы учли, что $\lim\limits_{A\to\infty}e^{-A}e^{\pm ixA}\cos t=\lim\limits_{A\to\infty}e^{-A}(\cos xA\pm i\sin xA)\cos t=0,$ так как $(\cos xA\pm i\sin xA)\cos t$ ограниченная величина (аналогично для $\lim\limits_{A\to\infty}e^{-A}e^{\pm ixA}\sin t$).

Окончательно можем записать после несложных преобразований (проделать самостоятельно):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-|t|}\cos t\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{t(1-ix)}\cos t\,dt+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t(1+ix)}\cos t\,dt=\frac{(1-ix)}{1+(1-ix)^2}+\frac{(1+ix)}{1+(1+ix)^2}=$$

$$=\frac{(1-ix)\left(1+(1+ix)^2\right)+(1+ix)\left(1+(1-ix)^2\right)}{\left(1+(1-ix)^2\right)\left(1+(1+ix)^2\right)}=\frac{2x^2+4}{x^4+4}.$$

Таким образом, искомая плотность имеет вид $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{x^2+2}{x^4+4}$.

ж) $p_\xi(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\dfrac{1}{1-it}dt.$ Воспользуемся табличным интегралом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itp}\left(\beta-it\right)^{-\nu}dt=\begin{cases}\dfrac{2\pi p^{\nu-1}e^{-\beta p}}{\Gamma(\nu)}, & p>0,\\ 0, & p<0,\end{cases}$$

где $\Gamma(\nu)-$ гамма функция; если $\nu \geq 0$ целое, то $\Gamma(\nu+1)=\nu!$, в общем же случае $\Gamma(\nu)=\int\limits_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t}dt, \operatorname{Re}(\nu)>0.$ В нашем случае $\beta=1, \nu=1, p=x.$ Тогда, если $x>0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itp}(\beta-it)^{-\nu}\,dt\Big|_{\substack{\beta=1\\ p=x\\ \nu=1}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{1-it} = \frac{2\pi x^0 e^{-x}}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi e^{-x}}{0!} = 2\pi e^{-x}.$$

Таким образом, плотность вероятностей случайной величины ξ будет иметь вид:

$$p_\xi(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Получили плотность показательного закона распределения $p_\xi(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \lambda>0,\\ 0, & x<0, \end{cases}$

в частном случае при $\lambda=1.$

Пример 13.12. Показать, что характеристическая функция $g(u)=\dfrac{1}{2e^{-iu}-1}$ может соответствовать лишь дискретной случайной величине. Найти ряд распределения этой случайной величины.

***Решение*:**

1) Преобразуем выражение для $g_\xi(u)$:

$g_\xi(u)=\dfrac{1}{2e^{-iu}-1}=\dfrac{e^{iu}}{2-e^{iu}}=\dfrac{\frac{e^{iu}}{2}}{1-\frac{e^{iu}}{2}}=\dfrac{b_1}{1-q}$ – это сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{e^{iu}}{2}$. Ряд сходится, если $|q|<1,$ в нашем случае $\dfrac{|e^{iu}|}{2}<1,$ так как $|e^{iu}|=|\cos u+i\sin u|=\sqrt{\cos^2 u+\sin^2 u}=1.$ Таким образом, можем записать

$$g_\xi(u)=\frac{1}{2}e^{iu}+\frac{1}{4}e^{2iu}+\frac{1}{8}e^{3iu}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}e^{iuk}\cdot p_k = M\left\{e^{iu\xi}\right\}.$$

2) Запишем закон распределения случайной величины в виде ряда распределения:

ξ_k	1	2	3	…..	k	k+1	…..
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…..	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^{k+1}}$	…..

***Пример 13.13*.** Найти распределения, которым соответствуют следующие производящие функции: **а)** $\frac{1}{4}(1+z)^2$; **б)** $e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda>0$.

а) Распишем выражение для производящей функции

$$g_\xi(z)=\frac{1}{4}(1+z)^2=\frac{1}{4}\left(1+2z+z^2\right)=\frac{1}{4}z^0+\frac{1}{2}z^1+\frac{1}{4}z^2.$$

Теперь можем записать ряд распределения:

ξ_k	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

б) $g_\xi(z)=e^{\lambda(z-1)}=\frac{1}{e^\lambda}\cdot e^{\lambda z}$, экспоненту $e^{\lambda z}$ представим в виде ряда Маклорена:

$$e^{\lambda z}=1+\lambda z+\frac{(\lambda z)^2}{2!}+\frac{(\lambda z)^3}{3!}+....$$

Тогда

$$g_\xi(z)=\frac{1}{e^\lambda}\cdot\left(1+\lambda z+\frac{(\lambda z)^2}{2!}+\frac{(\lambda z)^3}{3!}....\right)=\frac{(z\lambda)^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{(\lambda z)^1}{1!}e^{-\lambda}+\frac{(\lambda z)^2}{2!}e^{-\lambda}+\frac{(\lambda z)^3}{3!}e^{-\lambda}....=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k,$$

где $p_k=\mathrm{P}\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ – распределение Пуассона, $\xi\sim P(\lambda)$.

Таким образом, $g_\xi(z)=e^{\lambda(z-1)}$ – производящая функция случайной величины, которая имеет распределение Пуассона.

***Пример 13.14*.** С помощью производящих функций показать, что сумма независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

Решение: В задаче № ***13.12*.б)** было показано, что производящая функция случайной величины, которая имеет распределение Пуассона, имеет вид $\tilde{g}_\xi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k p_k=e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda>0$. Зная её,

можно получить и характеристическую функцию. Для этого достаточно в сумме заменить z на e^{iu}: $\tilde{g}_\xi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k=\sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k=e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}=g_\xi(u)$.

Таким образом, $g_{\xi_1}(u)=e^{\lambda_1\left(e^{iu}-1\right)}$, $g_{\xi_2}(u)=e^{\lambda_2\left(e^{iu}-1\right)}$. Так как ξ_1 и ξ_2 независимы, то по свойству характеристических функций для независимых величин справедливо:

$$g_{\xi_1+\xi_2}(u)=g_{\xi_1}(u)\cdot g_{\xi_2}(u)=e^{\lambda_1\left(e^{iu}-1\right)}\cdot e^{\lambda_2\left(e^{iu}-1\right)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)e^{iu}-(\lambda_1+\lambda_2)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)\left(e^{iu}-1\right)}.$$

По виду характеристической функии можно сказать (в силу взаимнооднозначного соответствия между характеристической функцией и функцией распределения), что сумма независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

***Пример 13.15*.** Пусть ξ – случайная величина с характеристической функцией $g_\xi(u)$, и для некоторого a имеет место неравенство $\mathrm{P}\{\xi=a\}>0{,}5$. Доказать, что $\left|g_\xi(u)\right|$ не обращается в нуль на вещественной прямой.

***Доказательство*:**

$$\left|g_\xi(u)\right|=\left|Me^{iu\xi}\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}dF(x)\right|=\left|\int_{-\infty}^{a} e^{iux}dF(x)+\int_{a}^{a+0} e^{iux}dF(x)+\int_{a+0}^{\infty} e^{iux}dF(x)\right|$$

Рассмотрим $\int_{a}^{a+0} e^{iux}dF(x)$. Так как $F(a+0)-F(a)=\mathrm{P}\{\xi=a\}$, то можем записать:

$$\int_{a}^{a+0} e^{iux}dF(x)=e^{iua}\left[F(a+0)-F(a)\right]=e^{iua}\cdot\mathrm{P}\{\xi=a\}.$$

Тогда, учитывая свойства модуля $|x+y|\ge|x|-|y|$, $|x+y|\ge|y|-|x|$, получим:

$$\left|\int_{-\infty}^{a} e^{iux}dF(x)+\int_{a}^{a+0} e^{iux}dF(x)+\int_{a+0}^{\infty} e^{iux}dF(x)\right|=\left|\int_{x\ne a} e^{iux}dF(x)+e^{iua}\cdot\mathrm{P}\{\xi=a\}\right|\ge$$

$$\ge\left|e^{iua}\cdot\mathrm{P}\{\xi=a\}\right|-\left|\int_{x\ne a} e^{iux}dF(x)\right|=\left|e^{iua}\right|\left|\mathrm{P}\{\xi=a\}\right|-\left|\int_{x\ne a} e^{iux}dF(x)\right|>\frac{1}{2}-\left|\int_{x\ne a} e^{iux}dF(x)\right|,$$

так как $\left|e^{iua}\right|=1$, а $\mathrm{P}\{\xi=a\}>0{,}5$ – по условию.

Рассмотрим интеграл $\left|\int_{x\ne a} e^{iux}dF(x)\right|\le\int_{x\ne a}\left|e^{iux}\right|dF(x)=\int_{x\ne a}dF(x)$. Таким образом, имеем:

$$\left|g_\xi(u)\right| > \frac{1}{2} - \left|\int\limits_{x\neq a} e^{iux} dF(x)\right| \geq \frac{1}{2} - \int\limits_{x\neq a} dF(x) = \frac{1}{2} - \mathrm{P}\{\xi \neq a\} > 0,$$

так как $\mathrm{P}\{\xi \neq a\} < \frac{1}{2}$.

Пример 13.16. Доказать, что всякая вещественная характеристическая функция обладает свойством $\forall u \;\; 1 - g_\xi(2u) \leq 4\left(1 - g_\xi(u)\right)$.

Доказательство: $g_\xi(u) = M\left\{e^{iu\xi}\right\} = M\{\cos u\xi + i\sin u\xi\}$. Так как по условию $g_\xi(u)$ вещественная, то $g_\xi(u) = M\{\cos u\xi\}$.

Рассмотрим $g_\xi(2u)$: $g_\xi(2u) = M\{\cos 2u\xi\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2ux\, dF(x)$, тогда

$$1 - g_\xi(2u) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2ux\, dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2ux)\, dF(x) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^2 ux\, dF(x),$$

где использовали формулу понижения степени и условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$. Далее, вспомниная основное тригонометрическое тождество и то, что $1 + \cos ux \leq 2$, запишем:

$$1 - g_\xi(2u) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \cos^2 ux\right) dF(x) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos ux)(1 + \cos ux)\, dF(x) = 4\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos ux)\, dF(x) =$$

$$= 4\int\limits_{-\infty}^{\infty} dF(x) - 4\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, dF(x) = 4\left(1 - g_\xi(u)\right).$$

Таким образом, получили $1 - g_\xi(2u) \leq 4\left(1 - g_\xi(u)\right)$.

Пример 13.17. Доказать, что для любой вещественной характеристической функции выполняется неравенство: $\left|g_\xi(u)\right| \leq \sqrt{\frac{1 + g_\xi(2u)}{2}}$.

Доказательство:

$$1 + g_\xi(2u) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2ux\, dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + \cos 2ux)\, dF(x) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2 ux dF(x) \geq$$

$$\geq 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos uxdF(x)\right)^2 = 2g_\xi^2(u).$$

Таким образом, получили $1+g_\xi(2u)\geq 2g_\xi^2(u)$, отсюда $\left|g_\xi(u)\right|\leq\sqrt{\frac{1+g_\xi(2u)}{2}}$.

Пример 13.18. Найти распределение, которому соответствует производящая функции:

$$\psi(z)=\frac{p}{1-(1-p)z}.$$

Решение: Представим производящую функцию в виде бесконечной суммы членов убывающей геометрической прогрессии: $\psi(z)=\frac{p}{1-(1-p)z}=\frac{b_1}{1-qz}$, $0<p<1,\ 0<z<1$. Очевидно, знаменатель прогрессии $qz=(1-p)z<1$. Тогда производящая функция может быть представлена в виде: $\psi(z)=pz^0+p(1-p)^1z^1+p(1-p)^2z^2+p(1-p)^3z^3+....$

Запишем ряд распределения:

ξ_k	0	1	2	…..		k	k+1	…..
p_k	p	pq	pq^2	…..		pq^k	pq^{k+1}	…..

Если принять за κ – число неудач до первого успеха, то $p_k=\mathrm{P}\{\xi_k=k\}=pq^k$, где p – вероятность успеха, k=0,1,2… Таким образом, получили геометрическое распределение с параметром p.

Задачи по теме 13

13.1. Найти характеристическую функцию экспоненциально распределенной случайной величины.

13.2. Найти характеристическую и производящую функции случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона:

$$P\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\ldots\ .$$

13.3. ***Найти*** плотность распределения (с помощью вычетов), которому соответствует характеристическая функция

$$g(u)=\frac{1}{1+u^2}.$$

13.4. ***Найти*** характеристическую функцию Гамма-распределения, имеющего плотность:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

где $\alpha>0, \beta>0$ и $\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$, $\mathrm{Re}(z)>0$ – Гамма функция Эйлера.

13.5. ***Найти*** характеристическую функцию, соответствующую плотности:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{a-|x|}{a^2}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\ge a.\end{cases}$$

13.6. Доказать свойство характеристической функции:

$$|g(u+h)-g(u)|\le\sqrt{2\left(1-\mathrm{Re}\,g(h)\right)}.$$

13.7. ***Найти*** характеристическую функцию дискретной случайной величины X, подчиняющейся закону распределения Паскаля: $\mathrm{P}\{X=m\}=\dfrac{a^m}{(1+a)^{m+1}}$, $a>0$, и по ней найти MX, DX.

13.8. Убедиться, что функция $g(u)=\dfrac{1-\beta}{1+\alpha}\cdot\dfrac{1+\alpha e^{-it}}{1-\beta e^{it}}$, $0<\alpha<\beta<1$, является характеристической, и найти закон распределения, соответствующий ей.

13.9. ***Найти*** характеристическую функцию случайной величины, плотность вероятностей которой имеет вид: $p(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$, $|x|<a$.

13.10. Пользуясь выражением $g(u)=\exp\left\{iua-\dfrac{u^2\sigma^2}{2}\right\}$ для характеристической функции закона нормального распределения случайной величины X, ***найти*** характеристическую функцию для случайной величины: **а)** $Y=\alpha X+\beta$; **б)** $Y=X-a$.

13.11. Даны характеристические функции: $g_1(u)=\dfrac{1+iu}{1+u^2}$, $g_2(u)=\dfrac{1-iu}{1+u^2}$.

Определить соответствующие им плотности.

13.12. Убедиться, что функция $g(u)=\dfrac{3+\cos u}{4}$ является характеристической. Найти закон распределения, соответствующий этой характеристической функции.

13.13. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\ldots$ каждая из которых может принимать значения $+1$ и -1 с вероятностями, равными $\dfrac{1}{2}$.

Пусть $\eta_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\xi_k$, где a_k – постоянные.

а) Найти характеристическую функцию случайной величины η_n.

б) Полагая $a_k=\dfrac{1}{2^k}$, показать, что распределение η_n стремится при $n\to\infty$ к равномерному распределению на отрезке $[-1,1]$.

13.14. ***<u>Найти</u>*** распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\dfrac{2e}{e^2-1}\mathrm{ch}z$; **б)** $1+\dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)$**.**

13.15. ***<u>Найти</u>*** распределение, отвечающее производящей функции $\psi(z)$, если

$$\psi\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n},\ n=1,2,3...$$

Тема 14. Функциональные преобразования случайных величин

Рассмотрим случайный вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ с совместной плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и другой случайный вектор $\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m)$, причём

$$\eta_1=f_1(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),\ \eta_2=f_2(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),\ \dots..,\ \eta_m=f_m(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n).$$

Т.е. $\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m)$ – это многомерная случайная величина, связанная функционально с $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$. Задача состоит в том, чтобы найти плотность $p_\eta(y_1,y_2,\dots,y_m)$.

Возможны следующие случаи:

1) $m=n$

$$p_\eta(y_1,y_2,\dots,y_n)=p_\xi(\varphi_1(y_1,y_2,\dots,y_n),\dots,\varphi_2(y_1,y_2,\dots,y_n))\cdot|J|,$$

где J – якобиан преобразования, который вычисляется как определитель матрицы Якоби:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}.$$

2) $m<n$

В этом случае для определения $p_\eta(y_1,y_2,\dots,y_m)$ вводятся дополнительные функции $y_{m+1}=f_{m+1}(x_1,x_2,...,x_n)$, $\dots,y_n=f_n(x_1,x_2,...,x_n)$. Новая система n функций однозначно определяет n-мерную случайную величину $\overline{\eta}=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m,\eta_{m+1},...,\eta_n)$, плотность $p_{\overline{\eta}}(y_1,y_2,\dots,y_n)$ которой может быть найдена как в случае $m=n$.

Тогда искомую плотность $p_\eta(y_1,y_2,\dots,y_m)$ можно найти из условия согласованности:

$$p_\eta(y_1,y_2,\dots,y_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}p_{\overline{\eta}}(y_1,y_2,\dots,y_n)\,dy_{m+1}...dy_n\,.$$

Замечание: Дополнительные функции $y_{m+1}=f_{m+1}(x_1,x_2,...,x_n)$, $\dots,y_n=f_n(x_1,x_2,...,x_n)$ вводят как правило очень простые, главное, чтобы было взаимнооднозначное соответствие.

Рассмотрим случай $m=n=1$. Имеются величины ξ и η, причём $\eta=f(\xi)$. Известна плотность $p_\xi(x)$, нужно найти $p_\eta(y)$.

Так как $\eta = f(\xi)$, то все пары случайных точек лежат на кривой $y = f(x)$. Если функция $y = f(x)$ непрерывная и строго монотонная, то существует обратная функция $x = \varphi(y)$ и искомая плотность равна $p_\eta(y) = p_\xi(\varphi(y))|\varphi'(y)|$.

Рассмотрим подробнее, каким образом получили результат.

а) Пусть $y = f(x)$ – непрерыная и строго монотонно возрастающая функция на $[a,b]$. Следовательно, на $[c,d]$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая также непрерывна и монотонно возрастает.

Пусть $G_\eta(y)$ – функция распределения величины η, тогда её плотность $p_\eta(y) = \dfrac{dG_\eta(y)}{dy}$. По определению функции распределения запишем:

$G_\eta(y) = \mathrm{P}\{\eta < y\}$ – это вероятность попадания η в интервал $[c,y)$. Это событие эквивалентно попаданию величины ξ левее $x = \varphi(y)$, поэтому

$$\mathrm{P}\{\eta < y\} = \mathrm{P}\{\xi < x\} = \mathrm{P}\{\xi < \varphi(y)\} = F_\xi(\varphi(y)),$$

где $F_\xi(x)$ – функция распределения ξ. Её плотность равна $p_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$, тогда для функции распределения величины η запишем (продифференцировали сложную функцию)

$$G_\eta(y) = F_\xi(\varphi(y)) \Rightarrow p_\eta(y) = \frac{dF_\xi(\varphi(y))}{dy} = p_\xi(\varphi(y))\varphi'(y).$$

б) Пусть $y = f(x)$ – непрерывная и строго монотонно убывающая функция на $[a,b]$.

В этом случае $G_\eta(y) = \mathrm{P}\{\eta < y\} = \mathrm{P}\{\xi > \varphi(y)\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi < \varphi(y)\} = 1 - F_\xi(\varphi(y))$. Тогда

$$p_\eta(y) = -p_\xi(\varphi(y))\varphi'(y).$$

в) Объединяя выражения, полученные в а) и б), получим формулу

$$p_\eta(y) = p_\xi(\varphi(y))|\varphi'(y)|.$$

Примеры решения задач по теме 14

Пример 14.1. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

ξ_k	-2	-1	0	1	2
p_k	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти ряд распределения $\eta = \xi^2 + 1$.

Решение: Значения, которые может принимать η равны 1, 2, 5.

Найдём соответствующие вероятности:

$$\mathrm{P}\{\eta = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = 0\} = 0,3,$$

$$\mathrm{P}\{\eta = 2\} = \mathrm{P}\{\xi = -1\} + \mathrm{P}\{\xi = 1\} = 0,2 + 0,3 = 0,5,$$

$$\mathrm{P}\{\eta = 5\} = \mathrm{P}\{\xi = -2\} + \mathrm{P}\{\xi = 2\} = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

Теперь запишем ряд распределения величины η

η_k	1	2	5
p_k	0,3	0,5	0,2

***Пример 14.2*.** Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

ξ_k	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_k	0,2	0,7	0,1

Найти ряд распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

***Решение**:* Найдём возможные значения η :

$$\eta_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \eta_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \eta_3 = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Соответствующие вероятности:

$$\mathrm{P}\{\eta = 1\} = \mathrm{P}\left\{\xi = \frac{\pi}{2}\right\} = 0,7 \text{ и } \mathrm{P}\left\{\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \mathrm{P}\left\{\xi = \frac{\pi}{4}\right\} + \mathrm{P}\left\{\xi = \frac{3\pi}{4}\right\} = 0,2 + 0,1 = 0,3.$$

Таким образом, запишем ряд распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$:

η_k	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
p_k	0,3	0,7

Пример 14.3. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \sin\xi$.

***Решение*:** Все пары значений (ξ,η) лежат на кривой $y=\sin x$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ функция $y=\sin x$ строго монотонно возрастает. Поэтому плотность величины η будет определяться выражением $p_\eta(y)=p_\xi\left(\varphi(y)\right)\varphi'(y)$, где $x=\arcsin y=\varphi(y)$, $y\in(-1,1)$.

Так как $\xi\sim R\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, то $p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ 0,\ x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$

Теперь можем записать плотность величины η:

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, y\in(-1,1),\\ 0, \qquad y\notin(-1,1).\end{cases}$$

***Пример 14.4*.** Случайная величина ξ распределена экспоненциально с параметром единица, $\xi\sim E(1)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta=e^{-\xi}$.

***Решение*:** Все пары значений (ξ,η) лежат на кривой $y=e^{-x}$. Эта функция монотонно убывает на $(-\infty,\infty)$. Так как $y=f(x)=e^{-x}$, то $x=-\ln y=\varphi(y)\Rightarrow\left|\varphi'(y)\right|=\frac{1}{y}$.

По условию $\xi\sim E(1)$, тогда $p_\xi(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\ge 0,\\ 0,\ x<0.\end{cases}$

Для плотности величины $\eta=e^{-\xi}$ запишем выражение $p_\eta(y)=\begin{cases}e^{\ln y}\cdot\frac{1}{y}, y\in(0,1],\\ 0,\ y\notin(0,1],\end{cases}$

или $p_\eta(y)=\begin{cases}1, \quad y\in(0,1],\\ 0, \quad y\notin(0,1].\end{cases}$

***Пример 14.5*.** Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью вероятности $p_\xi(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Найти распределение случайной величины $\eta=\xi^2$.

***Решение*:** Все пары значений (ξ,η) лежат на параболе $y=x^2$, которая непрерывна и на $(-\infty,0)$ убывает, на $(0,\infty)$ возрастает, т.е. имеем два интервала монотонности. Так как $y=f(x)=x^2$, то $x=\varphi_k(y)=\pm\sqrt{y}\Rightarrow|\varphi_k'(y)|=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $y\in(0,+\infty)$, $k=1,2$.

По условию $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x\in(-\infty,\infty)$, значит, для плотности величины $\eta=\xi^2$ запишем выражение $p_\eta(y)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_\xi(\varphi_k(y))\cdot|\varphi_k(y)|$, где n –количество интервалов монотонности ($n=2$):

$$p_\eta(y)=\sum_{k=1}^{2}p_\xi(\varphi_k(y))\cdot|\varphi_k(y)|=\frac{1}{\pi(1+y)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\pi(1+y)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)},\ y\in(0,+\infty).$$

***Пример 14.6*.** Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $p_\xi(x)$. Записать плотность вероятности случайной величины η, если

а) $\eta=\operatorname{arctg}\xi$; **б)** $\eta=|\xi|$; **в)** $\eta=\dfrac{1}{1+\xi^2}$; **г)** $\eta=\sqrt{R^2-\xi^2}$; **д)** $\eta=e^{-\xi^2}$; **е)** $\eta=\dfrac{1}{\xi}$ ($x>0$).

***Решение*:**

а) Функция $y=f(x)=\operatorname{arctg}x$, $x\in(-\infty,\infty)$ непрерывна, возрастает на всей числовой оси. Обратная функция $x=\varphi(y)=\operatorname{tg}y$, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow|\varphi'(y)|=\dfrac{1}{\cos^2 y}$, тогда для плотности запишем выражение $p_\eta(y)=p_\xi(\operatorname{tg}y)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Функция $y=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ непрерывна, имеет два участка монотонности: на $(-\infty,0)$ функция убывает, на $[0,\infty)$ – возрастает. Для обратной функции можем записать:

$x=\begin{cases}y, & y\ge 0,\\ -y, & y>0,\end{cases}$ т.е. $x=\varphi_k(y)=\pm y$, $y\in[0,\infty)\Rightarrow|\varphi_k(y)|=1$, $k=1,2$, значит,

$$p_\eta(y)=\sum_{k=1}^{2}p_\xi(\varphi_k(y))\cdot|\varphi_k(y)|=p_\xi(y)\cdot 1+p_\xi(-y)\cdot 1=p_\xi(y)+p_\xi(-y),\ y\in[0,\infty).$$

в) Функция $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in(-\infty,\infty)$ непрерывна, имеет два участка монотонности:

$$x=\varphi_k(y)=\pm\sqrt{\frac{1-y}{y}},\ y\in(0,1]\Rightarrow|\varphi_k'(y)|=\frac{\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{1-y}},\ k=1,2;$$

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)\cdot\frac{\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{1-y}} + p_\xi\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)\cdot\frac{\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{1-y}},\ y\in(0,1).$$

г) Функция $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$ определяет полуокружность радиуса R с центром в начале координат, она непрерывна и имеет два участка монотонности:

$$x = \varphi_k(y) = \pm\sqrt{R^2 - y^2},\ y \in [0, R] \Rightarrow |\varphi_k'(y)| = \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}},\ k = 1,2;$$

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(\sqrt{R^2 - y^2}\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} + p_\xi\left(-\sqrt{R^2 - y^2}\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}},\ y \in [0, R).$$

д) Функция $y = f(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$ непрерывна, имеет два участка монотонности:

обратная функция $x = \varphi_k(y) = \pm\sqrt{-\ln y} = \pm\sqrt{\ln\frac{1}{y}}$, $y \in (0,1) \Rightarrow |\varphi_k'(y)| = \frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}}$;

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)\cdot\frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}} + p_\xi\left(-\sqrt{\ln\frac{1}{y}}\right)\cdot\frac{1}{2y\sqrt{\ln\frac{1}{y}}},\ y \in (0,1).$$

е) Функция $y = f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на $(0,\infty)$, строго монотонно убывает. Значит, существует обратная функция: $x = \frac{1}{y} = \varphi(y)$, $y \in (0,\infty) \Rightarrow |\varphi'(y)| = \frac{1}{y^2}$;

$$p_\eta(y) = p_\xi\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2},\ y \in (0,\infty).$$

Пример 14.7. Диаметр круга ξ измерен приближенно. Считая величину ξ равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$, найти плотность вероятности площади круга.

***Решение*:** Площадь круга $S = \pi R^2$, так как $R = \frac{D}{2}$, то $S = \frac{\pi D^2}{4}$. У нас $\xi = D$, тогда $S = \frac{\pi\xi^2}{4}$.

Все пары значений (ξ, S) лежат на параболе $y = f(x) = \frac{\pi x^2}{4}$, она непрерывна и имеет два интервала монотонности: $x = \varphi_k(y) = \pm 2\sqrt{\frac{y}{\pi}} \Rightarrow |\varphi_k'(y)| = \frac{1}{\sqrt{\pi y}}$.

По условию $p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[a,b],\end{cases}$ значит для плотности площади запишем выражение:

$$p_\eta(y)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi y}}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi y}}=\frac{2}{b-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi y}},\ y\in\left[\frac{\pi a^2}{4},\frac{\pi b^2}{4}\right].$$

Пример 14.8. Найти плотности вероятности произведения $\eta=\xi_1\cdot\xi_2$ и частного $\eta=\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ случайных величин ξ_1 и ξ_2, если известна совместная плотность вероятности $p_\xi(x_1,x_2)$ двумерной случайной величины $\xi=(\xi_1,\xi_2)$.

Решение:

а) $\eta=\xi_1\cdot\xi_2$

Размерность «старой» величины n=2, размерность «новой» – m=1. Таким образом, мы имеем случай $m<n$. Вводим дополнительную функцию следующим образом:

$f_1(x_1,x_2)=y_1=x_1\cdot x_2$ – это мы имеем по условию;

$f_2(x_1,x_2)=y_2=x_2$ – эту функцию мы ввели (достаточно простую, потом мы от переменной y_2 избавимся, используя условие согласованности).

Найдём обратное преобразование: $x_1=\varphi_1(y_1,y_2)=\dfrac{y_1}{y_2},\ x_2=\varphi_2(y_1,y_2)=y_2$.

Якобиан преобразования будет иметь вид: $J=\dfrac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{y_2} & 0\\ -\dfrac{y_1}{y_2} & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{y_2}\neq 0$.

Тогда плотность «новой» величины запишем в виде: $p_\eta(y_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi\left(\dfrac{y_1}{y_2},y_2\right)\cdot\left|\dfrac{1}{y_2}\right|dy_2$.

б) $\eta=\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$

Аналогично пункту а) введём дополнительную функцию:

$f_1(x_1,x_2)=y_1=\dfrac{x_1}{x_2}$ – это мы имеем по условию;

$f_2(x_1,x_2)=y_2=x_2$ – эту функцию мы ввели.

Найдём обратное преобразование: $x_1=\varphi_1(y_1,y_2)=y_1y_2\ \ x_2=\varphi_2(y_1,y_2)=y_2$.

Якобиан преобразования будет иметь вид: $J=\dfrac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_2 & 0\\ y_1 & 1\end{vmatrix}=y_2\neq 0$.

Тогда плотность «новой» величины запишем в виде: $p_\eta(y_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(y_1y_2,y_2)\cdot|y_2|dy_2$.

***Пример 14.9*.** Найти плотность вероятности суммы, разности и частного независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

***Решение*:**

а) ***1 способ.***

По условию ξ_1 и ξ_2 независимы, тогда, зная характеристические функции этих величин, можно найти характеристическую функцию их суммы: $g_{\xi_1+\xi_2}(u)=g_{\xi_1}(u)\cdot g_{\xi_2}(u)$.

Ранее, в теме «Характеристические функции», была получена характеристическая функция для нормальной случайной величины. Значит, можем записать в нашем случае:

$$g_{\xi_i}(u)=\exp\left\{uia_i-\frac{\sigma_1^2u^2}{2}\right\},\ i=1,2.$$

Тогда

$$g_{\xi_1+\xi_2}(u)=\exp\left\{ui(a_1+a_2)-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)u^2}{2}\right\}.$$

Найдём плотность $p_{\xi_1+\xi_2}(x)$, как обратное преобразование Фурье, обозначив

$$a=(a_1+a_2),\ b=\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}\ .$$

Тогда

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-uix}g_{\xi_1+\xi_2}(u)\,du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{uia-bu^2-uix\}\,du.$$

Преобразуем показатель у экспоненты, выделив полный квадрат:

$$uia-bu^2-uix=-\left[\left(\sqrt{b}u\right)^2-ui(a-x)\right]=-\left[\left(\sqrt{b}u\right)^2-2\cdot\sqrt{b}u\cdot i(a-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{b}}\pm\left(i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2\right]=$$

$$=-\left[\left(\sqrt{b}u\right)-\left(i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)\right]^2+\left(i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2;$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left[\sqrt{b}u-i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right]^2+\left(i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2\right\}du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left[\sqrt{b}u-i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right]^2-(a-x)^2\frac{1}{4b}\right\}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(a-x)^2\frac{1}{4b}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sqrt{b}u-i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2}du\,.$$

В полученном выражении несложно увидеть интеграл Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sqrt{b}u-i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2}du=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sqrt{b}u-i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)^2}d\left(\sqrt{b}u-i(a-x)\frac{1}{2\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\pi}\,,$$

тогда

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-(a-x)^2\frac{1}{4b}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{2\pi}e^{-(a_1+a_2-x)^2\frac{1}{4b}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x-(a_1+a_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_1^2)}}\,.$$

Таким образом, случайная величина, полученная сложением двух нормальных случайных величин, имеет также нормальный закон распределения: $\xi_1+\xi_2\sim N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_1^2)$

2 способ. Найдем плотность с помощью преобразования случайных величин.

У нас $\eta=\xi_1+\xi_2$, $m<n$, тогда $f_1(x_1,x_2)=y_1=x_1+x_2$, $f_2(x_1,x_2)=y_2=x_2$ (ввели новую функцию), значит, $x_1=\varphi_1(y_1,y_2)=y_1-y_2$, $x_2=\varphi_2(y_1,y_2)=y_2$.

Запишем якобиан преобразования:

$$J=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\,.$$

Далее действуем аналогично решению задачи ***14.8.***

3 способ. Для реализации этого способа используем свойство: если ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность вероятностей их суммы определяется как свёртка их плотностей, т.е.

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(y-y_2)\,p(y_2)\,dy_2$$

Чтобы слишком не усложнять выкладки, рассмотрим стандартные нормальные величины.

Тогда $p_{\xi_1}(x)=p_{\xi_2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\cdot e^{-\frac{(y-y_2)^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}}dy_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-y_2)^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}}dy_2\,.$$

Рассмотрим показатель экспоненты:

$$-\left(\frac{y^2-2yy_2+y_2^2}{2}\right)-\frac{y_2^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+yy_2-y_2^2=-\frac{y^2}{2}-\left(y_2^2-2\frac{y}{2}y_2\pm\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{y^2}{2}-\left(y_2-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=-\frac{y^2}{4}-\left(y_2-\frac{y}{2}\right)^2.$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{4}-\left(y_2-\frac{y}{2}\right)^2\right\}dy_2=e^{-\frac{y^2}{4}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(y_2-\frac{y}{2}\right)^2}d\left(y_2-\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}},$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(y_2-\frac{y}{2}\right)^2\right\}d\left(y_2-\frac{y}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,.$$

Ранее, мы получили выражение для плотности в общем случае:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_1^2\right)}}e^{-\frac{\left(y-(a_1+a_2)\right)^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_1^2\right)}}.$$

Если подставить $a_1=a_2=0$, $\sigma_1=\sigma_2=1$, то получим только что найденное выражение для плотности $p_{\xi_1+\xi_2}(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$ в случае $\xi_i\sim N(0,1), i=1,2$.

б) Найдем плотность $p_{\xi_1-\xi_2}(y_1)$, используя *2-ой способ*.

У нас $\eta=\xi_1-\xi_2$, $m<n$, тогда $f_1(x_1,x_2)=y_1=x_1-x_2$, $f_2(x_1,x_2)=y_2=x_2$ (ввели новую функцию), значит, $x_1=\varphi_1(y_1,y_2)=y_1+y_2$, $x_2=\varphi_2(y_1,y_2)=y_2$.

Запишем якобиан преобразования:

$$J=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Можем записать искомую плотность $p_\eta(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1\xi_2}(y_1+y_2,y_2)\cdot 1\,dy_2$, где в случае нормально распределенных ξ_1,ξ_2 двумерная плотность имеет следующий вид:

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}-2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\},$$

$M\xi_i = a_i,\ D\xi_i = \sigma_i^2,\ i = 1,2$, r – коэффициент корреляции величин ξ_1, ξ_2.

В нашем случае величины независимы по условию, значит, $r = 0$. Рассмотрим случай стандартных нормальных случайных величин ξ_1, ξ_2, т.е. $M\xi_i = 0,\ D\xi_i = 1,\ i = 1,2$ (чтобы не усложнять выкладки). В таком случае можем записать:

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2 + y^2\right]\right\}. \qquad (***)$$

Тогда для плотности $p_\eta(y_1)$ получим: $p_\eta(y_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(y_1+y_2)^2 + y_2{}^2\right]\right\}dy_2$.

Рассмотрим показатель экспоненты:

$$-\frac{1}{2}\left[(y_1+y_2)^2 + y_2{}^2\right] = -\frac{1}{2}\left[y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2\right] = -\frac{1}{2}y_1^2 - \left(y_1y_2 + y_2^2\right) =$$

$$-\frac{1}{2}y_1^2 - \left(y_2^2 + 2\frac{y_1}{2}y_2 \pm \left(\frac{y_1}{2}\right)^2\right) = -\frac{y_1^2}{2} + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 - \left(y_2 + \frac{y_1}{2}\right)^2 = -\frac{y_1^2}{4} - \left(y_2 + \frac{y_1}{2}\right)^2,$$

$$p_\eta(y_1) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(y_2+\frac{y_1}{2}\right)^2}d\left(y_2 + \frac{y_1}{2}\right) = = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{4}},$$

где

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(y_2+\frac{y_1}{2}\right)^2}d\left(y_2 + \frac{y_1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, по виду полученного распределения можем сказать, что $\eta = \xi_1 - \xi_2$ нормально распределена с $M\eta = 0, \sigma_\eta = \sqrt{2}$.

в) Найдём $p_{\xi_1/\xi_2}(y_1)$, используя тот же способ, что и для разности.

У нас $m<n$, тогда $f_1(x_1,x_2) = y_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $f_2(x_1,x_2) = y_2 = x_2$ (ввели новую функцию), значит,

$x_1 = \varphi_1(y_1,y_2) = y_1 \cdot y_2,\ x_2 = \varphi_2(y_1,y_2) = y_2$.

Якобиан преобразования будет иметь вид:

$$J = \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2.$$

Искомая плотность будет иметь вид $p_\eta(y_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(y_1\cdot y_2,y_2)|y_2|dy_2$. Подставляя совместную плотность (***), получим

$$p_\eta(y_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(y_1y_2)^2+{y_2}^2\right]\right\}|y_2|dy_2=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(y_1y_2)^2+{y_2}^2\right]\right\}y_2dy_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(y_1y_2)^2+{y_2}^2\right]\right\}y_2dy_2=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2\left[y_1^2+1\right]\right\}d\left(\frac{y_2^2}{2}\right)+-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2\left[y_1^2+1\right]\right\}d\left(\frac{y_2^2}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2\left[y_1^2+1\right]\right\}d\left(\frac{y_2^2}{2}\right)=\frac{1}{\pi\left(y_1^2+1\right)}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2\left[y_1^2+1\right]\right\}d\left(\frac{y_2^2}{2}\cdot\left(y_1^2+1\right)\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi\left(y_1^2+1\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2\left[y_1^2+1\right]\right\}\Bigg|_0^A=\frac{1}{\pi\left(y_1^2+1\right)}.$$

Получили распределение Коши $p_\xi(x)=\dfrac{\lambda}{\pi\left((x-a)^2+\lambda^2\right)}, -\infty<x<\infty,$ в частном случае с параметрами $a=0,\lambda=1$ (стандартное распределение Коши), $\eta\sim C(0,1)$.

Пример 14.10. Найти распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, если:

а) обе случайные величины имеют распределение Пуассона с параметрами λ и μ соответственно;

б) обе случайные величины имеют распределение Коши с параметром, равным единице;

Решение:

а) ***1 способ.*** В нашем случае $P\{\xi=m\}=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $P\{\eta=m\}=\dfrac{\mu^m e^{-\mu}}{m!}$. Ранее мы получили характеристическую функцию распределения Пуассона: $g_\xi(u)=e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}$, $g_\eta(u)=e^{\mu\left(e^{iu}-1\right)}$.

Величины независимы, поэтому, пользуясь свойствами характеристических функций, запишем выражение для $g_{\xi+\eta}(u)$ как произведение $g_\xi(u)$, $g_\eta(u)$:

$$g_{\xi+\eta}(u)=e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}\cdot e^{\mu\left(e^{iu}-1\right)}=e^{(\lambda+\mu)\left(e^{iu}-1\right)}.$$

Очевидно, получили характеристическую функцию распределения Пуассона, т.е. $\xi+\eta\sim P(\lambda+\mu)$.

2 способ. (самостоятельно, используя преобразование случайных величин)

б) ***1 способ.*** В нашем случае $g_{\xi}(u)=g_{\eta}(u)=e^{iu-|u|}$. Величины независимы, поэтому

$$g_{\xi+\eta}(u)=e^{2\left(iu-|u|\right)}.$$

Восстановим плотность по характеристической функции:

$$p_{\xi+\eta}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-uix}e^{2\left(iu-|u|\right)}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-uix}e^{2iu+2u}du+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-uix}e^{2iu-2u}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi\left(-ix+2i+2\right)}\int_{-\infty}^{0}e^{u\left(-ix+2i+2\right)}d\left(u\left(-ix+2i+2\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi\left(ix-2i+2\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-u\left(ix-2i+2\right)}d\left(-u\left(ix-2i+2\right)\right)=$$

$$=\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2\pi\left(-ix+2i+2\right)}e^{u\left(-ix+2i+2\right)}\Big|_{B}^{0}-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi\left(ix-2i+2\right)}e^{-u\left(ix-2i+2\right)}\Big|_{0}^{A}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\left(-i\left(x-2\right)+2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(i\left(x-2\right)+2\right)}=\frac{2}{\pi\left(2^2+\left(x-2\right)^2\right)}=\frac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2+\left(x-a\right)^2\right)}.$$

Получили распределение Коши с парметрами $a=2,\lambda=2$.

Таким образом, если $\xi\sim C(1,1),\eta\sim C(1,1)$ и независимы, то $\xi+\eta\sim C(2,2)$.

2 способ. Здесь мы найдём плотность суммы независимых случайных величин $\xi+\eta$, пользуясь сверткой плотностей каждой величины ξ и η:

$$p_{\xi+\eta}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(y-y_2)\,p(y_2)\,dy_2=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy_2}{\left[1+\left(y-y_2-1\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(y_2-1\right)^2\right]}.$$

Вычислим интеграл с помощью вычетов, используя формулу:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}res_{z_k}f(z),$$

где сумма берётся по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(z)>0$.

Рассмотрим подынтегральную функцию, сделаем замену $z=y_2-1$ (для удобства выкладок):

$$\frac{1}{\left[1+\left(y-y_2-1\pm1\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(y_2-1\right)^2\right]}=\frac{1}{\left[1+\left(y-2-\left(y_2-1\right)\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(y_2-1\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left[1+\left(y-2-z\right)^2\right]\cdot\left[1+z^2\right]}=f(z).$$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки: $z_1=i,\ z_2=i+y-2,\ z_3=-i,\ z_4=-i+y-2$.

В верхней полуплоскости $(\mathrm{Im}\,z>0)$ лежат точки z_1, z_2. Значит, в нашем случае $n=2$. Найдем вычеты в этих точках, учитывая, что это полюса первого порядка (простые полюса):

$$res_{z=z_1}\frac{1}{\left[1+\left(y-2-z\right)^2\right]\cdot\left[1+z^2\right]}=\lim_{z\to i}\frac{1}{\left[1+\left(y-2-z\right)^2\right]\cdot(z+i)(z-i)}\cdot(z-i)=\frac{1}{2i\left(1+(y-2-i)^2\right)},$$

$$res_{z=z_2}\frac{1}{\left[1+\left(y-2-z\right)^2\right]\cdot\left(1+z^2\right)}=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{\left[\left(\left(y-2-z\right)-i\right)\left(\left(y-2-z\right)+i\right)\right]\cdot\left(1+z^2\right)}\cdot\left[z-\left(i+y-2\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2i\left(1+(y-2+i)^2\right)}.$$

Для удобства обозначим $y-2=s$, тогда вычеты перепишем в виде:

$$res_{z=z_1}\frac{1}{\left[1+\left(s-z\right)^2\right]\cdot\left[1+z^2\right]}=\frac{1}{2i\left(1+(s-i)^2\right)},\ res_{z=z_2}\frac{1}{\left[1+\left(s-z\right)^2\right]\cdot\left(1+z^2\right)}=\frac{1}{2i\left(1+(s+i)^2\right)}.$$

Теперь это подставим в формулу, для вычисления интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=2\pi i\left(res_{z=i}f(z)+res_{z=i+y-2}f(z)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{2i\left(1+(s-i)^2\right)}+\frac{1}{2i\left(1+(s+i)^2\right)}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\left(s^2-2si\right)}+\frac{1}{\left(s^2+2si\right)}\right)=\pi\frac{2s^2}{\left(s^2-2si\right)\left(s^2+2si\right)}=\pi\frac{2}{\left(s^2+4\right)}=\pi\frac{2}{\left(\left(y-2\right)^2+4\right)}.$$

Окончательно получаем:

$$p_{\xi+\eta}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(y-y_2)\,p(y_2)\,dy_2=\frac{1}{\pi}\frac{2}{\left((y-2)^2+4\right)}.$$

Получили плотность распределения вероятностей Коши с парамерами $a=2,\ \lambda=2$.

Пример 14.11. Случайная величина ξ имеет плотность распределения веротяностей $p_\xi(x)$. Записать функцию распределения $F_{\xi\xi^2}(x,y)$ двумерной случайной величины $\left(\xi,\xi^2\right)$.

Решение:

Введем случайную величину $\eta=\xi^2$, и найдём плотность $p_\eta(y)$, используя формулу $p_\eta(y)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_\xi\left(\varphi_i(y)\right)\left|\varphi_i(y)\right|$, где *n* – это количество интервалов монотонности (в нашем случае *n*=2). Все точки случайного вектора лежат на кривой $y=x^2=f(x)$, тогда $\varphi(y)=\pm\sqrt{y}$, т.е. $\varphi_1(y)=\sqrt{y}$ и $\varphi_2(y)=-\sqrt{y}$, тогда $\left|\varphi'(y)\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

В результате искомая плотность будет иметь вид: $p_\eta(y)=\left[p_\xi\left(\sqrt{y}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{y}\right)\right]\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Если бы нам было известно, что случайные величины независимы, то двумерная плотность

$$p_{\xi\eta}(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)=p_\xi(x)\cdot\left[p_\xi\left(\sqrt{y}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{y}\right)\right]\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

и двумерная функция распределения

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}p_\xi(u_1)\cdot\left[p_\xi\left(\sqrt{u_2}\right)+p_\xi\left(-\sqrt{u_2}\right)\right]\frac{1}{2\sqrt{u_2}}du_1du_2.$$

У нас компоненты случайного вектора связаны функциональной зависимостью, поэтому будем искать функцию распределения по определению:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\mathrm{P}\left\{\xi<x,\ \eta<y\right\}=\mathrm{P}\left\{\xi<x,\ \xi^2<y\right\}.$$

Значение случайной величины $\eta=\xi^2$ полностью определяется значением ξ. Случайная точка (ξ,η) может лежать только на кривой $y=x^2$. Вероятность $\mathrm{P}\left\{\xi<x,\ \eta<y\right\}$ – это вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в «полубесконечный» квадрат с вершиной (x,y). Эта вероятность равна вероятности попадания случайной точки ξ на проекцию на ось *OX* участка кривой $y=x^2$, попадающей в квадрат. Пользуясь этой интерпретацией имеем:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & y\le 0 \text{ или } y>0 \text{ и } x<-\sqrt{y},\\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p_\xi(x)\,dx, & y>0 \text{ и } x>\sqrt{y},\\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{x} p_\xi(x)\,dx, & y>0 \text{ и } -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}.\end{cases}$$

Задачи по теме 14

14.1. ***<u>Найти</u>*** распределение суммы независимых случайных величин ξ и η, если:

а) обе случайные величины равномерно распределены на отрезке [0, 2];

б) обе случайные величины распределены по закону гиперболического секанса с плотностью вероятности $p_\xi(x)=p_\eta(x)=\dfrac{2}{\pi\left(e^x+e^{-x}\right)}$, $x\in(-\infty,\infty)$;

в) случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p_\xi(x)$, а случайная величина η имеет ряд распределения $\mathrm{P}\{\eta=y_k\}=p_k$, $k=1,2,\ldots$;

г) случайная величина ξ принимает значения -2, 0, 2 с вероятностями соответственно 0,25, 0,5, 0,25, а случайная величина η принимает значения -1, 1 с вероятностью 0,5;

д) обе случайные величины одинаково распределены с плотностью вероятности $p_\xi(x)=p_\eta(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$;

е) случайная величина ξ равномерно распределена на [*a, b*], случайная величина η равномерно распределена на [*c, d*], *b*-*a* < *d*-*c*;

ж) случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, случайная величина η равномерно распределена на отрезке [*a, b*].

14.2. ***<u>Найти</u>*** плотности вероятности случайных величин $\xi\cdot\eta$ и $\dfrac{\xi}{\eta}$, если случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены в интервале (0, *b*).

14.3. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти распределение случайной величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$. Зависимы ли случайные величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ и $\xi+\eta$?

14.4. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. ***Найти*** распределение случайной величины $\varsigma=\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$.

14.5. Пусть случайные величины ξ, η, ς независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. ***Найти*** распределение случайной величины $\frac{\xi+\eta}{\varsigma}$.

14.6. Пусть случайные величины $\xi_i, i=1,...,n$ независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. ***Найти*** плотность вероятности случайной величины

$$\frac{\xi_1}{\xi_1+...+\xi_n}$$

14.7. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [-1, 2]. ***Найти*** плотность вероятности случайной величины $\eta=\xi^2$.

14.8. ***Найти*** плотность вероятности суммы случайных величин $\eta=\xi_1+\xi_2$, если известна совместная плотность вероятности $p_\xi(x_1,x_2)$ двумерной случайной величины $\xi=(\xi_1,\xi_2)$.

14.9. ***Найти*** плотность вероятности суммы независимых случайных величин, имеющих одинаковое экспоненциальное распределение с параметром λ.

14.10. Определить плотность вероятности случайной величины $\eta=|\xi|$, если ξ – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной E^2.

14.11. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0,1]$ и связана с η функциональной зависимостью $\operatorname{tg}\frac{\pi\eta}{2}=e^{\xi}$. ***Найти*** плотность вероятности случайной величины η.

14.12. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0,1]$. Определить распределение случайной величины η, если

$$\xi = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\eta - a}{b}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right].$$

14.13. Определить плотность распределения модуля радиус-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если распределение двумерной случайной величины (X, Y) задается плотностью:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi a^2}, & x^2 + y^2 \le a^2 \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

14.14. Определить плотность распределения случайной величины $Z = \dfrac{X}{Y}$, если X и Y – независимые случайные величины, плотности вероятности которых равны:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x \in [0,\infty), \\ 0, \textit{ в противном случае}, \end{cases} \qquad p(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{a^2} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y \in [0,\infty), \\ 0, \textit{ в противном случае}. \end{cases}$$

14.15. Случайные величины ξ и η связаны функциональной зависимостью $\eta = F(\xi)$. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[a,b]$, а функция $F(x)$ – её функция распределения. ***Найти*** плотность вероятности случайной величины η.

14.16. Случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0,1]$. Задана функция $f(t) \ge 0$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Случайные величины ξ и η связаны функциональной зависимостью: $\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f(t)dt$. Доказать, что функция $f(t)$ есть плотность вероятности случайной величины η.

14.17. В условиях задачи ***11.2*** найти распределение случайной величины $\xi + \eta + \zeta$.

Литература

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Академия, 2004. 448 с.

Галажинская О.Н., Марголис Н.Ю., Моисеева С.П., Цой С.А. Задачник по теории вероятностей : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2009. 79 с.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 448 с.

Даммер Д.Д. Теория вероятностей. (Часть 2. Случайные величины) : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2005. 30 с.

Донской Е.Н. Курс теории вероятностей с элементами случайных процессов и математической статистики. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 288 с.

Емельянов Г.Е., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1967. 334 с.

Китаева А.В. Теория вероятностей (часть 1, случайные события) : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2000. 23 с.

Крупин В.Г, Павлов А.Л., Попов Л.Г. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы : учеб. пособие. М. : Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.

Крупкина Т.В., Пыжев А.И. Теория вероятностей, случайные процессы : учеб. пособие. Красноярск : Изд-во Сибирского федер. ун-та, 2007. 182 с.

Максимов Ю.Д. Математика. Теория вероятностей и случайных процессов. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2008. 384 с.

Маталыцкий М.А, Романюк Т.В. Теория вероятностей в примерах и задачах : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2002.248 с.

Назаров А.А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. 3-е изд. М. : Айрис-пресс, 2008. 290 с.

Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Наука, 1986. 328 с.

Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. СПб. : Лань, 2007. 448 с.

Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика: промежуточный уровень : учеб. пособие. М. : Изд. дом. Высшей школы экономики, 2016. 280 с.

Приложения

Приложение 1

Таблица значений функции Пуассона: $P_\lambda(m) \approx (\lambda)^m e^{-\lambda} / m!$

m \ *λ*	*0,1*	*02*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1*
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m	*λ=2*	*λ=3*	*λ=4*	*λ=5*	*λ=6*	*λ=7*	*λ=8*	*λ=9*	*λ=10*
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

Таблица значений функции Гаусса: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14758	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08330	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07207	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05960	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04492
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03548	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02899
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02240	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
2,5	01753	01710	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00910	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00443	00327	00238	00172	00123	00084	00061	00043	00029	00020

Приложение 3

Таблица значений функции Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	07776	05117	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07920	08317	08700	09095	09483	09871	10257	10642	11062	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	36371	17003	17365	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	16640	20540	20884	21226	21566	21904	22241
0,6	22575	22907	23237	20194	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	23565	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	26731	29955	302234	30511	30785	31057	31328
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40148
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42634	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43447	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45819	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47671
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48839	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	48202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49491	49506	49520
2,6	49535	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49865	49819	49825	49830	49836	49841	49846	49851	49897	49861
3,0	00443	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	00348	49899
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Основные понятия и определения 3

Тема 8. Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин 17

Тема 9. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность вероятностей непрерывных случайных величин 43

Тема 10. Математическое ожидание, медиана, мода, квантили, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, моменты случайных величин 74

Тема 11. Законы распределения многомерных случайных величин. Зависимость случайных величин 115

Тема 12. Числовые характеристики многомерных случайных величин 139

Тема 13. Характеристическая и производящая функции 155

Тема 14. Функциональные преобразования случайных величин 177

Литература 195

Приложения

Приложение 1. Таблица значений функции Пуассона: $P_\lambda(m) \approx (\lambda)^m e^{-\lambda} / m!$ 196

Приложение 2. Таблица значений функции Гаусса: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 197

Приложение 3. Таблица значений функции Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$ 198

Учебное издание

ГАЛАЖИНСКАЯ Оксана Николаевна,
ДАММЕР Диана Дамировна

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть II. Случайные величины

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 06.02.2020 г. Формат $60\times84^{1}/_{8}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Печ. л. 9,7. Усл. печ. л. 9,1.
Тираж 150 экз. Заказ № 4231.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-883-2

