

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VII Международной молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 23–25 мая 2019 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2019

ными, исследована зависимость бистатистических сечений рассеяния от значений относительной диэлектрической проницаемости диэлектрического цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитренко А.Г., Гольцварт Е.П.* Решение задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре методом вспомогательных источников // Радиотехника и электроника. – 2011. Т.56. – № 5. – С. 600–607.
2. *Дмитренко А.Г., Колчин В.А.* Численный метод исследования электромагнитного рассеяния структурами, содержащими тонкие проводники // Радиотехника и электроника. – 2003. Т. 48. – № 5. – С. 545–551.
3. *Дмитренко А.Г., Балашова О.М.* Численный метод решения задачи электромагнитного рассеяния на тонких параллельных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы VI Международной молодежной научной конференции. Томск, 24–26 мая 2018 г. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2018. – С. 55–61.
4. *Дмитренко А.Г., Полин Е.П.* Исследование особенностей применения метода вспомогательных источников к решению задачи электромагнитного рассеяния на тонком диэлектрическом цилиндре // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 4/2. – С. 15–21.
5. *Bowman J.J., Senior T.B.A., Uslenghi P.L.E.* Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes // Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1969. – P. 488.

ПРИМЕНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ВИДЕНИЯ ЧЕРЕЗ АТМОСФЕРУ

А.И. Давыдова, И.Ю. Гендрин

Томский государственный университет

Введение

При решении климатических задач встаёт необходимость определения тенденций изменения различных характеристик. Прежде чем проводить анализ реальных данных, необходимо научиться устанавливать некоторые закономерности на экспериментальных данных, например, выявлять периодичности и локальные особенности сигнала. Главным средством анализа реальных физических процессов служит гармонический анализ, в частности, анализ Фурье, а также его модификация, называемая вейвлет-анализом.

Под спектральным анализом будем понимать разложение сигнала на его частотные или спектральные составляющие, а также оценку или измерение их характеристик.

Будем рассматривать исходный сигнал как физический процесс, способный передавать информацию и описанный математически с помощью функций определенного типа или полученных в результате натуральных, лабораторных или численных экспериментов.

Разложение сложных периодических сигналов на элементарные гармонические составляющие называют анализом Фурье, а обратное конструирование сигналов по его гармоническим составляющим – синтезом Фурье. Математической же основой анализа реальных физических процессов служит преобразование Фурье. С его помощью произвольный процесс можно разложить на простые гармонические колебания с различными частотами.

Приблизительно два десятилетия назад в мире сформировалось и подверглось глубокому и тщательному изучению новое научное направление, называемое вейвлет-анализом, которое на сегодняшний день нашло широкое применение в обработке сигналов и изображений. Вейвлет-анализ вызвал большой интерес в теоретической и прикладной сферах математики, вследствие чего он нашёл применение в самых разных областях. В частности, он является хорошим инструментом для анализа климатических данных и их долгосрочного прогнозирования. Например, используя вейвлет-анализ, можно провести реконструкцию прошлого климата. С этой целью необходимо выявить характерные периоды, присутствующие в косвенных источниках изменения климата (природных архивах, включающих в свою структуру климатический сигнал). Таким

образом, выявляя периоды климатических колебаний, можно сделать прогноз о поведении климатических систем в будущем. В частности, вейвлет-анализ можно использовать для характеристики временной изменчивости облачности в широтных зонах [1,2].

1. Постановка задачи

Целью данной работы является применение гармонического анализа для обработки тестовых сигналов и, как следствие, получение алгоритмов для исследования характеристик систем видения через атмосферу. Под системой видения будем понимать системы, включающие поверхность Земли, её атмосферу и оптические устройства на верхней границе атмосферы. Для решения поставленной задачи был проведён анализ тестовых временных сигналов с использованием Фурье и вейвлет-анализа.

2. Методы решения

Анализ Фурье. Всякий исходный сигнал может быть представлен совокупностью гармонических составляющих (гармоник), т.е. рядом Фурье. Для того, чтобы сигнал был представлен более точно, необходимо, чтобы число гармоник было достаточно большим.

Исследуемые сигналы были представлены рядом Фурье с учётом их периодических особенностей:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt)), \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – частота повторения в герцах, k – номер гармоники.

Под спектром функции $s(t)$ понимается совокупность её гармоник, образующих ряд Фурье [3].

Для каждого тестового сигнала был проведён спектральный анализ, заключающийся в нахождении коэффициентов ряда Фурье a_k и b_k :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(\omega kt) dt, \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(\omega kt) dt. \quad (3)$$

Вейвлет-анализ. В узком смысле вейвлеты – это общее название для семейств математических функций, получающихся путём масштабирования и сдвига по оси времени одной материнской (базовой) функции. В широком смысле вейвлеты – это функции, которые локальны во времени и по частоте, среднее значение которых равно нулю [4,5].

Представление одномерного сигнала в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, построенных на основе материнского (исходного) вейвлета $\psi(t)$, называется вейвлет-преобразованием.

Материнский вейвлет имеет полезные свойства благодаря операциям изменения временного масштаба a и сдвига во времени b . Множитель $1/\sqrt{a}$ обеспечивает независимость нормы этих функций от масштабирующего числа a [6].

Для получения вейвлет-спектрограмм был реализован алгоритм прямого вейвлет-преобразования исследуемых сигналов $s(t)$ на основе МНАТ-вейвлета («мексиканская шляпа») $\text{МНАТ}(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}$.

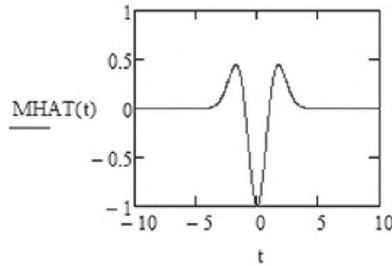


Рис. 1. МНАТ-вейвлет («мексиканская шляпа»)

В ходе реализации были определены вейвлет-коэффициенты путём интегрирования скалярного произведения сигнала на вейвлет-функцию:

$$W(a,b) = \int_{-N}^N \psi(a,b,t) s(t) dt, \text{ где вейвлет-функция } \psi(t) \text{ для заданных значений } a \text{ и } b$$

представляет собой выражение вида $\psi(a,b,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{МНАТ}\left(\frac{t-b}{a}\right)$.

Дискретные значения a и b заданы таким образом, чтобы представленные вейвлет-спектрограммы имели более детальное графическое представление [7].

3. Результаты моделирования

Пример. В качестве тестового сигнала была рассмотрена функция следующего вида: $s(t) = \sin(2t) + \sin(3t)$.

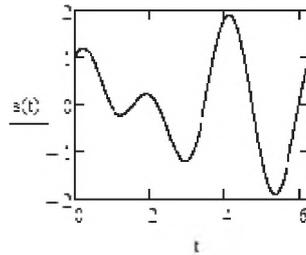


Рис. 2. Анализируемая функция

1. Рассмотрим случай, когда $T = 2\pi$ – период и $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – основная частота анализируемой функции. В ходе применения гармонического анализа, т.е. при разложении заданной на бесконечной прямой функции $s(t)$ в ряд Фурье, по формулам (2), (3) были получены следующие коэффициенты:

$a_k =$	$b_k =$
0	0
0	0
0	1
1	0

Далее был проведён гармонический синтез согласно (1) по $N = 3$ гармоникам, т.е. получены колебания сложной формы путем суммирования их гармонических составляющих (гармоник).

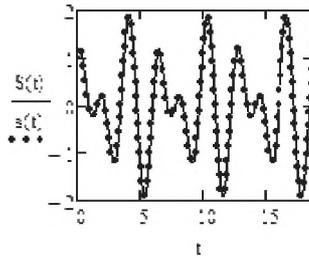


Рис. 3

Как видно из рис. 3 результаты синтеза полностью совпадают с графиком исходной функции. В этом случае, выявление истинного периода исходного сигнала не составит труда.

Наглядное представление о спектре дают спектральные диаграммы: амплитудная (рис. 4 а) и фазовая (рис. 4 б).

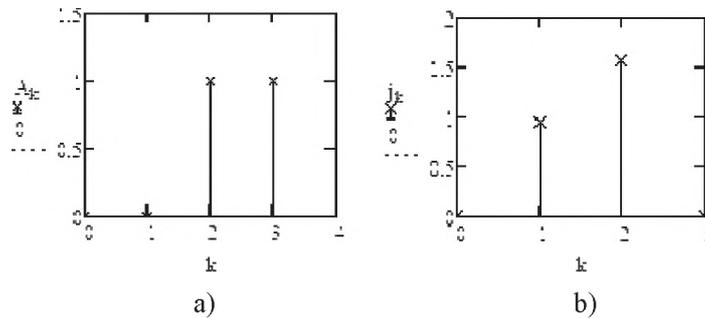


Рис. 4. Амплитудная а) и фазовая б) спектральные диаграммы

2. Зададим период исследуемой функции $T = \frac{\pi}{2}$ – меньше, чем истинный период $T = 2\pi$, рассматриваемый в случае 1. С помощью аналогичных расчётов были получены следующие результаты:

$a_k =$

0.849
0.121
-0.015
$8.081 \cdot 10^{-3}$

$b_k =$

0
0.728
0.185
0.113

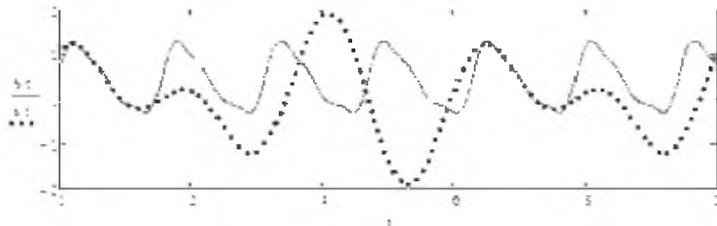


Рис. 5

Из рис. 5 видно, что результаты синтеза совпадают с графиком исходной функции только на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. В этом случае выявление истинного периода исходного сигнала невозможно.

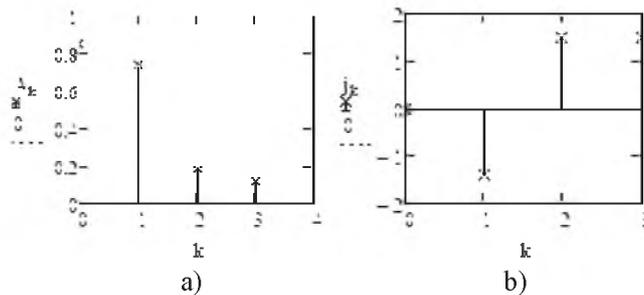


Рис. 6. Амплитудная а) и фазовая б) спектральные диаграммы

3. Пусть период исследуемой функции $T = \frac{5\pi}{2}$ – больше, чем истинный период $T = 2\pi$, рассматриваемый в случае 1. С помощью аналогичных расчётов по $N = 6$ гармоникам были получены следующие результаты:

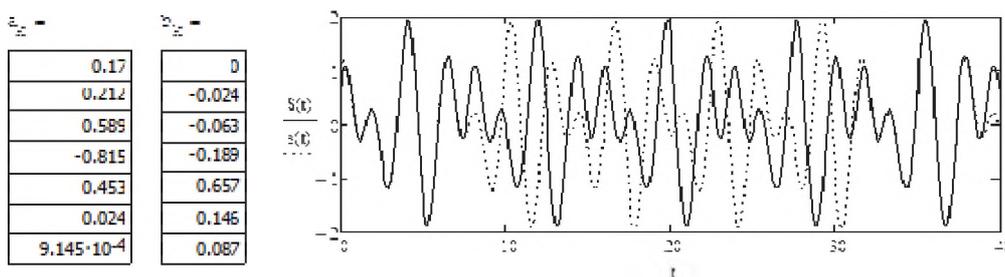


Рис. 7

Как видно из рис. 7, результаты синтеза совпадают с графиком исходной функции на промежутке $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$. В этом случае выявление истинного периода исходного сигнала возможно.

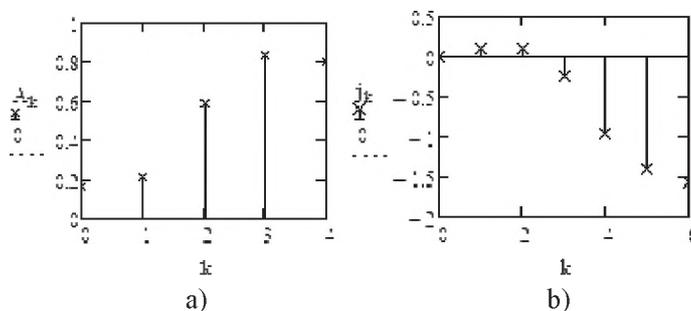


Рис. 8. Амплитудная а) и фазовая б) спектральные диаграммы

В ходе моделирования прямого вейвлет-преобразования были получены вейвлет-спектрограммы (диаграммы типа «уровень-время», а точнее – «уровень-индекс» для вейвлет-коэффициентов) и выведены в виде графика линий уровня, позволяющего проследить изменение интенсивности амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах a и во времени b . Вдоль вертикальной оси отмечены пространственные масштабы a , а вдоль горизонтальной оси – локализация соответствующих компонент в пространстве b .

Легко убедиться в том, что исследуемый сигнал содержит достаточное количество перегибов при переходе производной через нуль в точках экстремумов. Вейвлет-спектрограммы хорошо отражают подобные особенности сигналов.

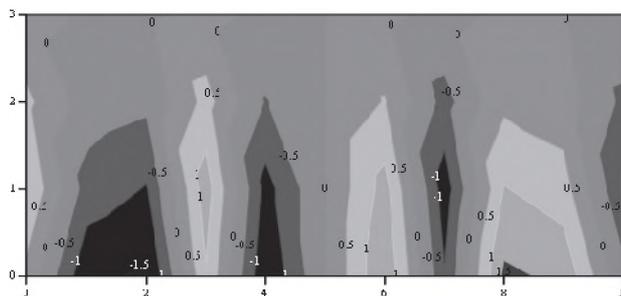


Рис. 9. Вейвлет-спектрограмма анализируемого сигнала

Середины тёмных областей на рис. 9 соответствуют локальным минимумам, а светлых – локальным максимумам исходной функции, т.е. чем резче выражена особенность сигнала, тем нагляднее она показана на спектрограмме и тем выше вейвлет-коэффициенты.

Проведя сравнение исходного сигнала и его вейвлет-спектрограммы, можно сделать вывод о том, что на спектрограмме хорошо отображена цикличность сигнала, а также его локальные и глобальные минимумы и максимумы.

Заключение

На основании проведенного исследования можно сделать вывод, что вейвлет-спектрограммы являются хорошим инструментом для обнаружения особенностей сигналов, поскольку они имеют более детальный вид по сравнению с Фурье-спектрограммами.

Большие уровни при вейвлет-анализе присущи только коэффициентам тех вейвлетов, которые находятся недалеко от различных локальных особенностей функции. Благодаря этому, вейвлет-спектрограммы способны легко обнаруживать локальные особенности функций с привязкой их ко времени или координатам пространства. В свою очередь, Фурье спектрограммы помогают обнаружить периодичность сигнала.

Уникальные математические свойства вейвлетов сделали их мощным и эффективным инструментом анализа и последующего синтеза различных сигналов, в том числе и сложных. Применения вейвлетов в различных областях, таких как медицина, астрофизика, криминалистика, телекоммуникации и т.п., многочисленны и приводят к важным практическим результатам.

Безусловно, преобразование Фурье является одним из самых известных инструментов для анализа сигналов, однако вейвлет-преобразование способно предоставить более гибкую технику их обработки. Существенным достоинством вейвлетов в сравнении с Фурье анализом является то, что они позволяют заметить хорошо локализованные изменения сигналов. Вследствие того, что вейвлет-преобразование хорошо анализирует нестационарные сигналы, оно превратилось в мощную альтернативу преобразованию Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагорнов О.В., Никитаев В.Г., Простокшиин В.М., Тюфлин С.А., Проничев А.Н., Бухарова Т.И., Чистов К.С., Кашафутдинов Р.З., Хоркин В.А. Вейвлет-анализ в примерах. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 120 с.
2. Чернокульский А.В. Анализ глобального поля облачности и связанных с его вариациями климатических эффектов: дис. ... канд. физ.-мат наук: 25.00.29. – М., 2010. – 179 с.
3. Латыпова Н.В., Тучинский Л.И. Ряды Фурье: учеб.-метод. пособие. – Ижевск: Изд-во “Удмуртский университет”, 2011. – 80 с.

4. *Воскобойников Ю.Е.* Вейвлет-фильтрации сигналов и изображений (с примерами в пакете MathCAD). Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2015. – 188 с.
5. *Приоров А.Л., Волохов В.А., Апальков И.В.* Обработка сигналов на основе вейвлет-преобразования: методические указания. – Ярослав. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 44 с.
6. *Яковлев А.Н.* Введение в вейвлет-преобразования: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.
7. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. 2-е изд. – М.: СОЛОН-Пресс, 2010. – 400 с.