

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ
VII Международной молодежной
научной конференции
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ,
ТЕХНИЧЕСКИХ
И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 23–25 мая 2019 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2019

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛУСИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С НЕПРОДЛЕВАЮЩИМСЯ СЛУЧАЙНЫМ МЁРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ

А.М. Горцев, А.В. Веткина

Томский государственный университет
anyavetkina@gmail.com

Введение

Широкое применение в исследовании реальных физических, технических, экономических и других объектов и систем получили математические модели систем и сетей массового обслуживания (СМО, СеМО). Основными элементами СМО и СеМО при этом являются случайные входящие потоки событий. В подавляющем большинстве работ по исследованию СМО и СеМО до 80-х годов прошлого века в качестве входящих потоков событий рассматривались пуассоновские потоки событий. Однако в связи с бурным развитием вычислительной техники, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам событий. Сама же теория построения математических моделей функционирования информационно-телекоммуникационных систем, существовавшая до середины 80-х годов прошлого века, во многом становится непригодной для анализа информационных процессов, протекающих в современных телекоммуникационных системах. Поэтому в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах – так называемых дважды стохастических потоков. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [1,2]; второй – потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Первые результаты исследований потоков второго класса были опубликованы практически в одно и то же время, в 1979 г., в работах [3,4]. В [3] указанные потоки получили название МС (Markov chain)-потоки; в [4] – MVP (Markov versatile processes)-потоки. В статьях [5,6] описанные выше потоки называют также МАР (Markovian Arrival Process)-потоками событий. Подчеркнем, что МС-потоки событий (МАР-потоки) являются наиболее характерной и подходящей моделью потоков в реальных телекоммуникационных сетях, в частности, в широкополосных сетях беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей [7–9]. Зарубежными и отечественными авторами работ при описании подобных входящих потоков событий в СМО и СеМО используются термины: дважды стохастические потоки событий, МАР-потоки, МС-потоки и др. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки (потоки, у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [10–12]; 2) асинхронные потоки (потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [13–15]; 3) полусинхронные потоки (потоки, у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока, другая часть состояний интенсивности меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [16–18].

В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков, когда события потоков доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечёт за собой ненаблюдаемость последующих событий. Причиной ненаблюдаемости, как правило, выступает мёртвое время реги-

стрирующих приборов [19], в течение которого зарегистрированное событие обрабатывается, другие же события, наступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мёртвым временем и продлевающимся [19]. Длительность мёртвого времени может быть как детерминированной величиной, так и случайной. Задачи по оценке параметров потока событий в условиях наличия непродлевающегося мёртвого времени фиксированной длительности рассматривались в работах [10,11,16,17].

Однако достаточно открытым остается вопрос изучения потоков событий, когда мёртвое время является случайной величиной с тем или иным законом распределения. В частности, в [20] решена задача оценки параметра распределения непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий; в [21] – в асинхронном потоке событий. В настоящей работе рассматривается дважды стохастический полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени, приводятся результаты статистических экспериментов, реализованных на имитационной модели изучаемого потока.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий (далее – поток), сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda_1$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$). Если имеет место первое состояние процесса S_1 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 . Если имеет место второе состояние процесса S_2 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 . Переход из состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 возможен только в момент наступления события (свойство синхронных потоков), при этом этот переход осуществляется с вероятностью p (с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1). Переход из состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_1 может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события (свойство асинхронных потоков). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, где α – интенсивность смены состояния S_2 на S_1 . Т.к. переход из второго состояния в первое возможен в произвольный момент времени, т.е. не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. Матрицы инфинитезимальных коэффициентов процесса $\lambda(t)$ при этом примут вид

$$D_0 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ \alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мёртвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мёртвого времени (периода ненаблюдаемости), недоступны наблюдению (теряются) и не вызывают его продления (непродлевающееся мёртвое время). Принимается, что случайная длительность мёртвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$, где T – значение длительности мёртвого времени, $0 \leq T \leq T^*$.

Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1 и S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, t)$ – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом (S_1) состоянии процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мёртвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; аналогично для временной оси $(0, t^{(2)})$; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, чёрными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды продолжительности мёртвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к временной оси $(0, t^{(1)})$.

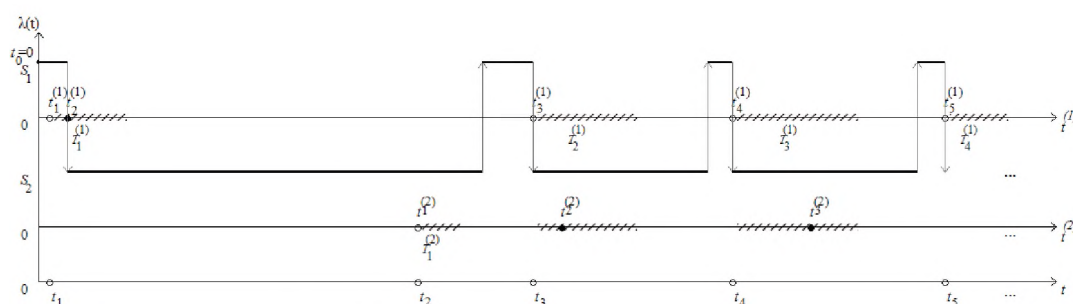


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Цель настоящей статьи: построение имитационной модели полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени, и постановка статистических экспериментов (испытаний) на этой имитационной модели для установления её работоспособности.

2. Имитационная модель полусинхронного потока событий при непродлевающемся случайном мёртвом времени

Метод имитационного моделирования широко используется на этапах исследования и проектирования различных систем. Основным средством реализации имитационного моделирования служит компьютер, позволяющий на основе математической модели исследуемой системы осуществить её цифровое моделирование.

Исследование математических моделей систем осуществляется либо аналитическими методами, либо имитационным моделированием. Основные преимущества имитационного моделирования по сравнению с аналитическими методами заключаются в следующем [22]: 1) большая адекватность между сущностью физического явления (объекта) и математической моделью физического явления (объекта); 2) более широкий охват физических процессов и систем по сравнению с аналитическими методами; 3) имитационное моделирование функционирования процессов и систем при разнообраз-

ных законах распределения случайных величин как в установившихся, так и в переходных режимах; 4) получение в результате имитационного моделирования самых разнообразных статистических характеристик исследуемых процессов и систем.

На рис. 2 представлена блок-схема, описывающая формирование полусинхронного дважды стохастического потока событий с непродлевающимся случайным мёртвым временем, где x – равномерно распределенная на $[0,1]$ случайная величина; p – вероятность перехода из первого состояния во второе; τ – интервал времени между двумя соседними событиями; Tm – время моделирования; i – счётчик событий, наступивших в первом состоянии; j – счётчик событий, наступивших во втором состоянии; k – счётчик наблюдаемых событий; T – значение длительности мёртвого времени; $t_i^{(1)}$ – момент наступления i -го события, зафиксированного в первом состоянии; $t_j^{(2)}$ – момент наступления j -го события, зафиксированного во втором состоянии; $t^{(1)}$ – текущее время для первого состояния; $t^{(2)}$ – текущее время для второго состояния; t_k – момент наступления k -го наблюдаемого события; $t_T^{(1)}$ – момент наступления ненаблюдаемого события в первом состоянии; $t_T^{(2)}$ – момент наступления ненаблюдаемого события во втором состоянии; $t_a^{(2)}$ – время, на протяжении которого события наступают во втором состоянии; $\tau_a, t_{\lambda 2}^{(2)}$ – вспомогательные величины.

Для получения численных результатов (в соответствии с приведенной на рис. 2 блок-схемой) разработана программа, реализованная на языке C# в среде Microsoft Visual Studio. Результатом работы первой части программы является последовательность значений длительности интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока и последовательность значений длительности периодов ненаблюдаемости событий исходного потока. Вторая часть программы – статистическая обработка полученных последовательностей данных.

3. Статистические эксперименты и численные результаты

С целью установления работоспособности имитационной модели полусинхронного потока событий поставлены следующие статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент состоит в построении оценки (выборочного среднего) длительности интервала τ между двумя соседними событиями в наблюдаемом потоке $\hat{M}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_k$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = \overline{1, N}$ – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока, и в определении зависимости этой оценки от времени моделирования Tm .

Эксперимент проводился при заданных параметрах потока: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha = 0.1$, $p = 0.5$; параметр T^* равномерного распределения принимает значения: $T^* = 1, 2, 3$; значение N зависит от заданных значений $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, p, T^*, Tm$ и конкретной реализации наблюдаемого потока.

В табл. 1 приведены результаты эксперимента. В первой строке табл. 1 указано время моделирования Tm (время наблюдения за потоком) ($Tm = 50, 100, \dots, 700$ ед. времени); во второй, третьей и четвертой строках указана оценка математического ожидания $\hat{M}(\tau)$ случайной величины τ – длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока для $T^* = 1, 2, 3$ соответственно.

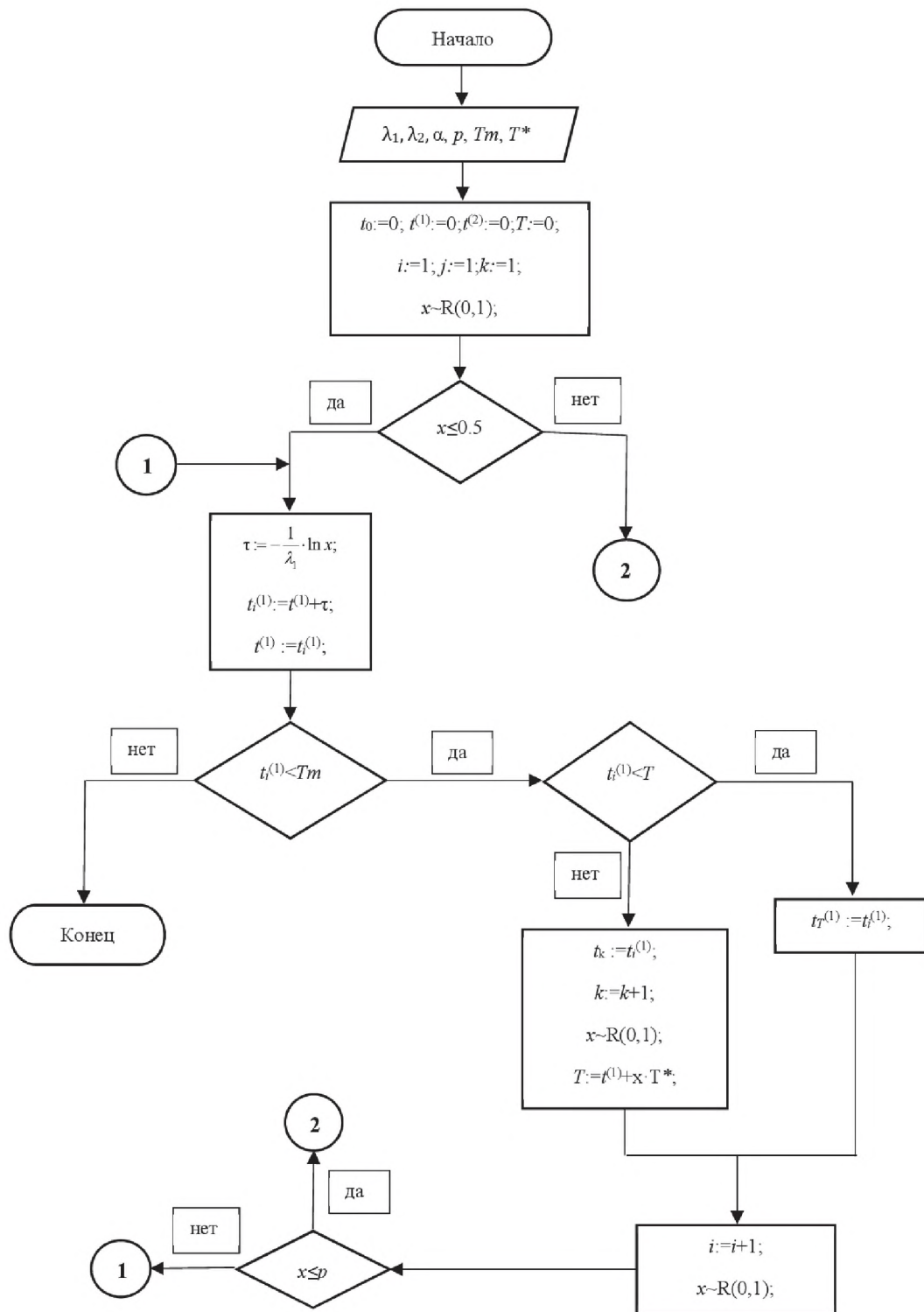


Рис. 2. Блок-схема алгоритма имитационного моделирования полусинхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени (часть 1)

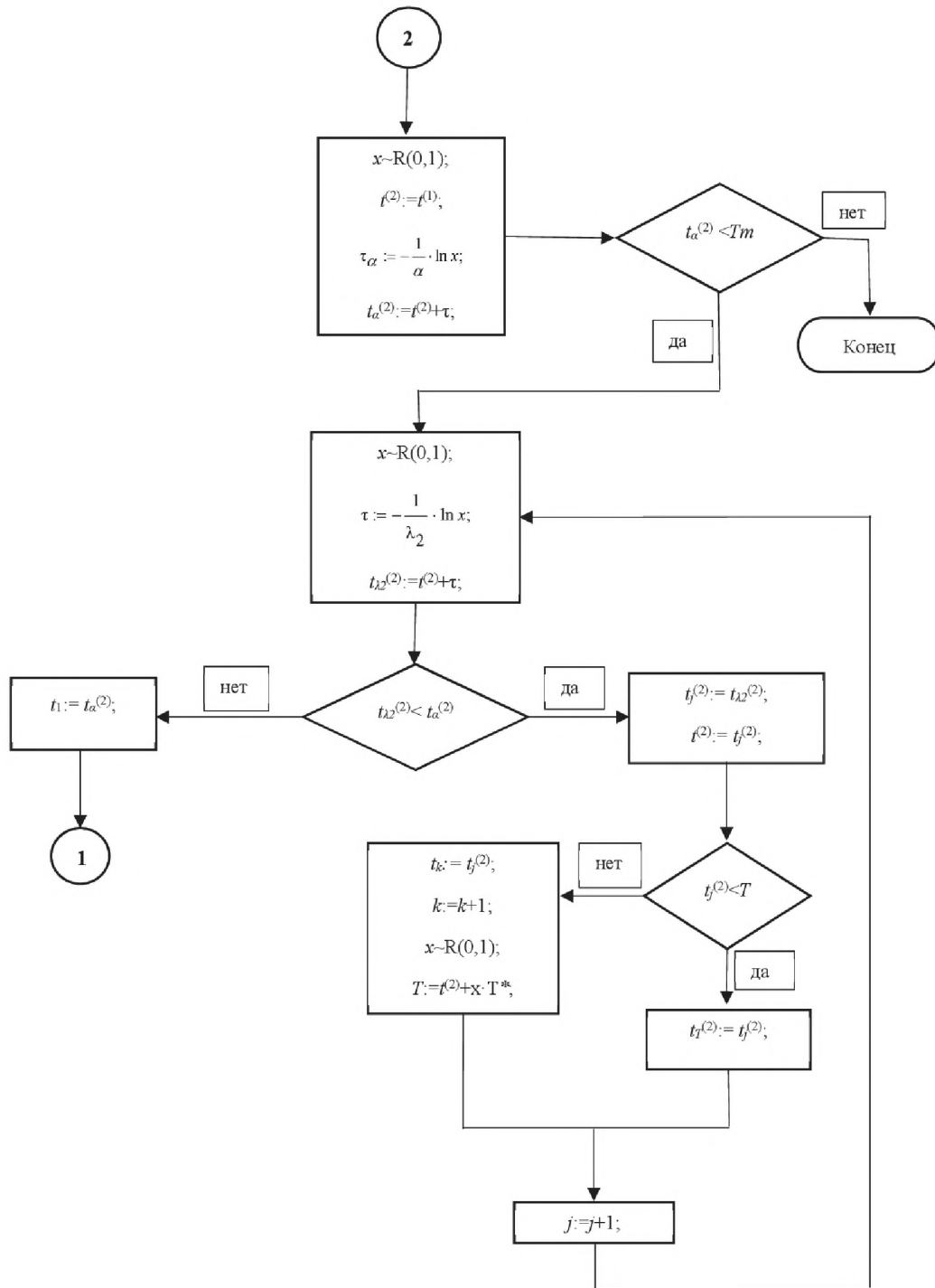


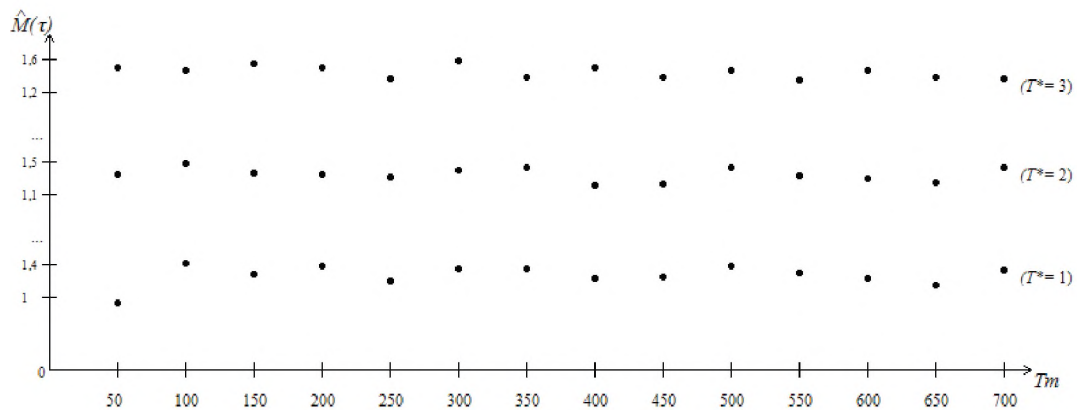
Рис. 2. Блок-схема алгоритма имитационного моделирования полусинхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени (часть 2)

Таблица 1

Численные результаты первого эксперимента

Tm		50	100	150	200	250	300	350
$\hat{M}(\tau)$	$T^* = 1$	1,50887	1,03514	1,16125	1,05862	1,24757	1,09302	1,09394
	$T^* = 2$	1,28875	1,15514	1,25984	1,28110	1,30888	1,24064	1,20108
	$T^* = 3$	1,31538	1,34170	1,27192	1,30861	1,45333	1,22709	1,43643
Tm		400	450	500	550	600	650	700
$\hat{M}(\tau)$	$T^* = 1$	1,21215	1,20782	1,06298	1,15509	1,20958	1,30751	1,11766
	$T^* = 2$	1,41243	1,39177	1,20390	1,29627	1,32519	1,39132	1,20439
	$T^* = 3$	1,32106	1,43355	1,35655	1,45906	1,35708	1,42697	1,44772

Для наглядности на рис. 3 приведены графики зависимости $\hat{M}(\tau)$ от времени моделирования Tm , построенные по данным табл. 1.

Рис. 3. Графики зависимости $\hat{M}(\tau)$ от значения Tm

Из анализа результатов табл. 1 и графиков зависимости $\hat{M}(\tau)$ от Tm следует, что стационарный режим функционирования наблюдаемого потока устанавливается при $Tm \geq 300$ ед. времени (оценка стремится к постоянному значению, т.е. при достаточно больших Tm оценка устанавливается в пределах своего стационарного значения). Кроме того, заметно увеличение значений оценки $\hat{M}(\tau)$ при увеличении T^* , что естественно, т.к. расширение отрезка $[0, T^*]$ – увеличении параметра распределения длительности мёртвого времени – влечет за собой увеличение значений длительности мёртвого времени, а, следовательно, большее количество событий теряется и длительности интервалов τ между соседними наблюдаемыми событиями увеличиваются.

Второй статистический эксперимент состоит в построении оценки (выборочного среднего) длительности мёртвого времени (случайной величины T) $\hat{M}(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$, где T_i – значение длительности i -го периода мёртвого времени, и установлении зависимости этой оценки от времени моделирования Tm .

Эксперимент проводился при заданных параметрах потока: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha = 0.1$, $p = 0.5$; параметр T^* равномерного распределения принимает значения: $T^* = 1, 2, 3$; значение N зависит от заданных значений $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, p, T^*, Tm$ и конкретной реализации наблюдаемого потока.

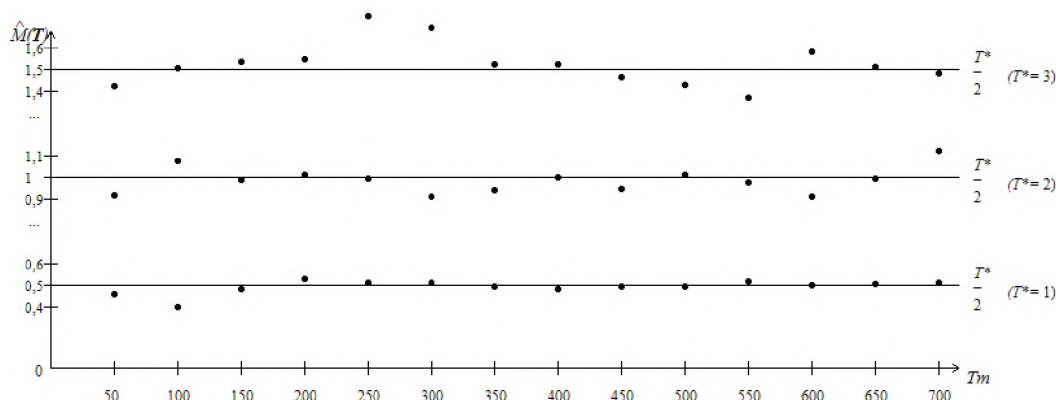
В табл. 2 приведены результаты эксперимента. Структура табл. 2 аналогична структуре табл. 1.

Таблица 2

Численные результаты второго эксперимента

Tm		50	100	150	200	250	300	350
$\hat{M}(T)$	$T^* = 1$	0,47327	0,46828	0,46579	0,50032	0,49063	0,46958	0,52671
	$T^* = 2$	0,93928	1,15202	0,88899	0,84028	0,90908	0,97145	1,19388
	$T^* = 3$	1,27924	1,24212	1,43369	1,46502	1,46485	1,53622	1,40277
Tm		400	450	500	550	600	650	700
$\hat{M}(T)$	$T^* = 1$	0,48698	0,50775	0,53038	0,48766	0,48897	0,52344	0,50721
	$T^* = 2$	0,98142	0,94660	0,96821	1,03925	1,00466	1,04405	0,99176
	$T^* = 3$	1,61113	1,47313	1,59487	1,54814	1,55912	1,54379	1,60621

Для наглядности на рис. 4 приведены графики зависимости $\hat{M}(T)$ от времени моделирования Tm , построенные по данным табл. 2.

Рис. 4. Графики зависимости $\hat{M}(T)$ от значения Tm

Из графиков, построенных по данным табл. 2, виден колебательный характер оценки $\hat{M}(T)$, которая с увеличением времени моделирования Tm стремится к постоянному значению, т.е. при достаточно большом Tm оценка $\hat{M}(T)$ устанавливается в пределах своего стационарного значения, соответствующего параметру T^* . Например, стационарный режим функционирования наблюдаемого потока устанавливается для $T^* = 1$ при $Tm \geq 250$ ед. времени ($\hat{M}(T)$ стремится к $M(T) = 1/2$, начиная с $Tm = 250$ ед. времени); для $T^* = 2$ – при $Tm \geq 400$ ед. времени ($\hat{M}(T)$ стремится к $M(T) = 1$, начиная с $Tm = 400$ ед. времени); для $T^* = 3$ – при $Tm \geq 600$ ед. времени ($\hat{M}(T)$ стремится к $M(T) = 3/2$, начиная с $Tm = 600$ ед. времени). Кроме того, также, как и в первом эксперименте, видно увеличение значения оценки длительности мёртвого времени $\hat{M}(T)$ при увеличении параметра T^* , что вполне естественно.

Заключение

В настоящей работе разработана и исследована имитационная модель полусинхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося случайного мёртвого времени. Приведенные результаты статистических экспериментов, а также другие многочисленные испытания имитационной модели подтверждают её работоспособность и соответствие результатов моделирования физическому представлению о протекающих процессах формирования наблюдаемого потока событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. – 1955. – 51(3). – P. 433–441.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. – 1964. – 60(4). – P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.1 // *Изв. АНССР. Техн. Кибернетика*. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
4. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // *Journal of Applied Probability*. 1979. – 16. – P. 764–779.
5. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // *Communication in Statistics Stochastic Models*. 1991. – 7. – P. 1–46.
6. Diamond J.E., Alfa A.S. The MAP/PH/1 retrial queue // *Communication in Statistics Stochastic Models*. – 1998. – 14. – P. 1151–1177.
7. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // *Automatic Control and Computer Science*. – 47(2). – P. 62–69.
8. Вишневский В.М., Ларионов А.А. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016): материалы XV Междунар. конф., Казань, 12–16 сентября 2016*. – Томск: Изд-во ТГУ, 2016. – Ч.1. – С. 36–50.
9. Дудин А.Н., Клименок В.И. Расчет необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях // *Информатизация образования*. – 2005. – № 4. – С. 56–68.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // *Вестник Томского государственного университета*. – 2003. – № 86. – С. 232–239.
11. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 1996. – 50(1). – P. 56–63.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. – 2002. – № S1-1. – С. 24–29.
13. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. – 2006. – № S18. – С. 267–273.
14. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2012. – № 2(19). – С. 88–101.
15. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2010. – № 2(11). – С. 44–65.
16. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мёртвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2015. – № 3(32). – С. 23–32.
17. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2015. – № 1(30). – С. 27–37.
18. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. – 2002. – № S1-1. – С. 18–23.
19. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.
20. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мёртвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2017. – № 40. – С. 32–40.
21. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мёртвого времени // *Вестник Томского государственного университета*. – 2002. – № S1-1. – С. 9–13.
22. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. – М.: Сов. Радио, 1978. – 248 с.