НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR^{(s)}|M_s|\infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова

Е.П. Полин, С.П. Моисеева

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Теория массового обслуживания – раздел теории вероятностей, позволяющий смоделировать и проанализировать поведение той или иной системы массового обслуживания. В настоящее время область применения теории массового обслуживания включает в себя множество различных сфер человеческой деятельности, в том числе промышленное производство, телекоммуникационные и информационные сети, медицину, страховые компании и пенсионные фонды [1–3].

Основоположником теории массового обслуживания является датский ученый А.К. Эрланг [4]. Предметом его исследования были телефонные системы, характеризующиеся случайным потоком вызовов абонентов, требующих случайного времени занятости телефонной линии. Расширение класса задач впоследствии привело к появлению различных модификаций систем массового обслуживания. Современные информационные и телекоммуникационные системы включают в себя разнотипные потоки данных, которые передают текстовые данные, голосовую информацию и информацию из видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве них используют математические модели марковских модулированных потоков (BMAP, MAP), полумарковских (SM) или их частных случаев (марковский модулированный пуассоновский поток MMPP, поток марковского восстановления MR и рекуррентный поток GI).

Различные единицы информации требуют различного времени обслуживания в зависимости от своего формата. В связи с этим, в качестве моделей процессов в современных информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками [5–7], в которых обслуживание заявок каждого типа занимает различное время.

Данная статья посвящена исследованию числа занятых приборов в системе с входящим потоком марковского восстановления (MR). Дис-

циплина обслуживания в рассматриваемой СМО определяется состояниями вложенной по моментам восстановления цепи Маркова, в отличие от работы [8], где параметры обслуживания μ_k определяются вероятностями p_k. В работе [9] рассматривается СМО с расщеплением (копированием) заявок, которые обслуживаются в разных блоках с разными параметрами параллельно. В данной работе с помощью метода начальных моментов найдены аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления, заданный набором функций распределения длин интервалов $A_1(x), A_2(x), ...A_K(x)$ и матрицей $\mathbf{P} = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, K$, – вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова с конечным числом состояний $k(t) = 1, 2, \ldots, K$.

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если вложенная цепь Маркова находится в состоянии $k(t) = s$, то поступающая заявка будет обслуживаться случайное время, распределенное по экспоненциальному закону $F_s(x) = 1 - e^{-\mu_s x}$. Ставится задача исследования многомерного случайного процесса $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), ..., i_K(t)]$ – числа занятых приборов разного типа в системе. Определим многомерный марковский случайный процесс $\{k(t), z(t), i_1(t), i_2(t), ..., i_K(t)\}$, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в потоке марковского восстановления, $k(t)$ – вложенная по моментам восстановления цепь Маркова.

Для стационарного распределения вероятностей $\Pi(k, z, i_1, i_2 ... i_K)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial \Pi(k, z, \mathbf{i})}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(k, 0, \mathbf{i})}{\partial z} - \sum_{s=1}^{K} i_s \mu_s \Pi(k, z, \mathbf{i}) + \tag{1}$$

$$+ \sum_{s=1}^{K} (i_s + 1) \mu_s \Pi(k, z, \mathbf{i}_s) + \sum_{s=1}^{K} P_{sk} A_k(z) \frac{\partial \Pi(s, 0, \mathbf{i}_k)}{\partial z} = 0,$$

где $\mathbf{i}_s = [i_1, i_2, ..., i_s + 1, \ldots i_K]$, $\mathbf{i}_k = [i_1, i_2, ..., i_k - 1, \ldots i_K]$.

Для характеристических функций вида

$$H(k,z,u_1,u_2,...,u_K)=\sum_{i_1=0}^{\infty}e^{ju_1i_1}\sum_{i_2=0}^{\infty}e^{ju_2i_2}...\sum_{i_K=0}^{\infty}e^{ju_Ki_K}\Pi(k,z,i_1,i_2...i_K)$$

имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H(k,z,\mathbf{u})}{\partial z}-\frac{\partial H(k,0,\mathbf{u})}{\partial z}+\sum_{i=1}^{K}j\mu_i(1-e^{-ju_i})\frac{\partial H(k,z,\mathbf{u})}{\partial u_i}+ \qquad (2)$$

$$+\sum_{i=1}^{K}e^{ju_k}P_{ik}A_k(z)\frac{\partial H(i,0,\mathbf{u})}{\partial z}=0\,.$$

Систему (2) запишем в виде матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\mathbf{H}(z,\mathbf{u})}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{H}(0,\mathbf{u})}{\partial z}\left[\mathbf{P}\mathbf{A}(z)\mathbf{B}(\mathbf{u})-\mathbf{I}\right]+\ j\mathbf{c}(\mathbf{u})\frac{\partial\mathbf{H}(z,\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}=0\,, \qquad (3)$$

где $\mathbf{H}(z,\mathbf{u})=\left[H(1,z,\mathbf{u}),H(2,z,\mathbf{u}),...,H(K,z,\mathbf{u})\right]$,

$$\mathbf{c}(\mathbf{u})=\left[\mu_1(1-e^{-ju_1}),\mu_2(1-e^{-ju_2}),...,\mu_K(1-e^{-ju_K})\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}(z,\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H(1,z,\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial H(K,z,\mathbf{u})}{\partial u_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial H(1,z,\mathbf{u})}{\partial u_K} & \cdots & \dfrac{\partial H(K,z,\mathbf{u})}{\partial u_K}\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}(z,\mathbf{u})}{\partial z}=\left[\frac{\partial H(1,z,\mathbf{u})}{\partial z},\frac{\partial H(2,z,\mathbf{u})}{\partial z},...,\frac{\partial H(K,z,\mathbf{u})}{\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}(0,\mathbf{u})}{\partial z}=\left.\frac{\partial\mathbf{H}(z,\mathbf{u})}{\partial z}\right|_{z=0},$$

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix}A_1(z) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & A_K(z)\end{bmatrix},\ \mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{K\times K},\ \mathbf{B}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}e^{ju_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{ju_K}\end{bmatrix}.$$

Уравнение (3) является основным для дальнейших исследований.

Основные числовые вероятностные характеристики

Дифференцируя (2) по $u_1, u_2, \ldots u_K$ и полагая их равными нулю, получаем основные вероятностные характеристики. Моменты первого порядка числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяются равенствами

$$m_1^{(k)}(\infty) = \frac{\lambda}{\mu_k},$$

где λ – интенсивность потока марковского восстановления, которая определяется выражением

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - \mathbf{rA}(u)\mathbf{e})\, du}.$$

Здесь $\mathbf{r} = [r(1), r(2), ..., r(K)]$ – вектор стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова.

Моменты второго порядка числа занятых приборов каждого типа в системе имеют вид

$$m_2^{(k)}(\infty) = \frac{1}{\mu_k}\lambda \mathbf{rPA}^*(\mu_k)\mathbf{E}_k \left[\mathbf{I} - \mathbf{PA}^*(\mu_k)\right]^{-1} \mathbf{PA}^*(0)\mathbf{E}_k\mathbf{e} +$$

$$+\lambda \mathbf{rPA}^*(0)\mathbf{E}_k\mathbf{e} + \lambda \mathbf{rE}_k\mathbf{e}.$$

Здесь $$\mathbf{A}^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z),$$

$\mathbf{E}_k$ – квадратная матрица, все элементы которой равны 0, кроме $e_{kk} = 1$.

Заключение

В данной работе построена и исследована математическая модель обслуживания заявок в бесконечнолинейной гетерогенной системе массового обслуживания $MR^{(s)}|M_s|\infty$ с входящим потоком марковского восстановления. Определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов каждого типа в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарайшина И.Р.*, *Назаров А.А.* Исследование математической модели процесса изменения страхового капитала пенсионного фонда // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 109–111.
2. *Назаров А.А.*, *Даммер Д.Д.* Исследование числа требований на выплату страховых сумм // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 50–55.
3. *Ахмедова Д.Д.*, *Терпугов А.Ф.* Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1. С. 25–29.
4. *Erlang A.K.* The theory of probability and telephone conversations // Nyt Tidsskrift Mat. 1911. B. 20. P. 33–39.
5. *Панкратова Е.В.* Исследование системы массового обслуживания GI/GI/∞ с двумя типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): материалы XIV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. 2015. Ч. 1. С. 152–157.
6. *Панкратова Е.В.* Исследование системы массового обслуживания MAP|M|∞ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: Управление, вычисление, связь. 2015. С. 585–592.
7. *Pankratova E.*, *Moiseeva S.* Queueing system GI/GI/∞ with *n* types of customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland: Springer, 2015. V. 564. P. 216–225.
8. *Моисеева С.П.*, *Панкратова Е.В.*, *Убонова Е.Г.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 46–53.
9. *Синякова И.А.*, *Моисеева С.П.* Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // Известия ТПУ. 2012. № 5. С. 24–28.