НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

# ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

**МАТЕРИАЛЫ**
**XVIII Международной конференции**
**имени А. Ф. Терпугова**
**26–30 июня 2019 г.**

**Часть 2**

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

# RQ-система с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками [1]

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

В реальных системах связи со случайным доступом часто возникают ситуации, при которых пользователи, использующие один канал связи, могут быть заблокированы. При этом они не теряются, а повторяют попытку захватить прибор через некоторое время [1]. Математическими моделями таких систем являются RQ-системы, которые достаточно адекватно описывают функционирование инфо-телекоммуникационных систем, систем сотовой связи, работу call-центров [2, 3].

Наряду с тем, что в современных системах связи должны учитываться ситуации, при которых пользователи не теряются, время простоя сервера должно использоваться для повышения производительности и эффективности системы. Поэтому в систему не только поступают сообщения извне, но также могут выполняться исходящие запросы в режиме простоя системы [4]. Эти ситуации моделируются системами с двумя видами заявок, где сервер обслуживает входящие и вызываемые заявки. Такие системы широко изучаются в настоящее время [5–9].

В работе call-центов зачастую возникают ситуации, при которых работа системы существенно зависит от типа вызываемых заявок, что влияет на продолжительность времени их обслуживания и функционирования системы в целом. Поэтому целесообразно рассматривать математические модели реальных систем с разнотипными вызываемыми заявками [10].

Заявки, поступающие в систему из основного потока, могут приходить пачками или группами, при этом обслуживание заявок происходит по одной. В это время оставшиеся заявки ожидают начала своего обслуживания на орбите. Такие ситуации моделируются неординарными входящими потоками.

В предложенной работе рассматривается RQ-система $M^{[n]}/GI/GI/1/N$ с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заяв-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

ками. Для предложенной системы найдена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок основного потока в системе.

### Математическая модель и постановка задачи

Рассматривается RQ-система, на вход которой поступает неординарный пуассоновский поток однородных событий, который задан интенсивностью $\lambda$. В момент наступления события потока, в систему поступает пачка заявок объема $n$ с вероятностью $r_n$, $n \geq 0$. Заявки входящего потока будем называть поступившими в систему заявками.

Если в момент поступления пачки заявок в систему, прибор свободен, то любая заявка из пачки встает на прибор, а прибор начинает обслуживание этой заявки в течение произвольного времени обслуживания с функцией $B(x)$, при этом остальные заявки из пачки уходят на орбиту и осуществляют там случайные задержки в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром $\sigma$, после которых вновь обращаются к прибору, независимо друг от друга. Если же пачка заявок, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, то все заявки из пачки мгновенно уходят на орбиту и осуществляют там случайные задержки в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром $\sigma$, после которых стараются занять прибор.

Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. Рассматривается система с разными типами вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа $l$ с интенсивностью $\alpha_l$, $l = \overline{2, L}$. Вызываемая заявка типа $l$ встает на прибор и обслуживается в течение произвольного времени с функцией распределения $V_l(x)$, $l = \overline{2, L}$.

Обозначим процесс $i(t)$ – число заявок входящего потока в системе в момент времени $t$. Ставится задача нахождения стационарного распределения числа поступивших заявок в RQ-системе с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками.

### Распределение вероятностей числа поступивших заявок в системе

Обозначим: процесс $k(t)$ – состояние прибора в момент времени $t$. Этот процесс может принимать следующие значения: 0 – прибор свободен; 1 – прибор занят обслуживанием заявки входящего потока; $l$ – прибор занят обслуживанием вызываемой заявки $l$-го типа, $l = \overline{2, L}$; $y(t)$ – истекшее время обслуживания заявки в момент времени $t$;

$\mu(x)=\dfrac{B'(x)}{1-B(x)}$ и $v_l(x)=\dfrac{V_l'(x)}{1-V_l(x)}$ – условные интенсивности обслуживания поступившей и вызванной заявки соответственно при условии, что истекшее время обслуживания равно $x$.

Обозначим вероятности

$$P_0(i,t)=P\{k(t)=0,i(t)=i\},$$

$$P_k(i,y,t)=\frac{\partial P\{k(t)=0,i(t)=i,y(t)<y\}}{\partial y},\quad k=\overline{1,L}. \tag{1}$$

Так как случайный процесс $\{k(t),\,i(t)\}$, $k=0$ $\{k(t),\,i(t),\,y(t)\}$, $k=\overline{1,L}$, с переменным числом компонент марковский, то для распределения вероятностей (1) система уравнений Колмогорова в стационарном режиме имеет вид

$$-\left(\lambda+i\sigma+\sum_{l=2}^{L}\alpha_l\right)P_0(i)+\int_0^\infty P_1(i+1,y)\mu(y)dy+\sum_{l=2}^{L}\int_0^\infty P_l(i,y)v_l(y)dy=0,$$

$$\frac{\partial P_1(i,y)}{\partial y}=-\left(\lambda+\mu(y)\right)P_1(i,y)+\lambda\sum_{n=0}^{i}P_1(i-n,y)r_n,$$

$$P_1(i,0)=\lambda\sum_{n=0}^{i}P_0(i-n)r_n+i\sigma P_0(i),$$

$$\frac{\partial P_l(i,y)}{\partial y}=-\left(\lambda+v_l(y)\right)P_l(i,y)+\lambda\sum_{n=0}^{i}P_l(i-n,y)r_n,$$

$$P_l(i,0)=P_0(i)\alpha_l,\quad l=\overline{2,L}. \tag{2}$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j=\sqrt{-1}$:

$$H_0(u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_0(i),\ H_1(u,y)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_1(i,y),\ \text{где } P_1(0,y)\equiv 0,$$

$$H_l(u,y)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_l(i,y),\ r(u)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{jun}r_n,\ \text{где } r_0=0.$$

Систему (2) перепишем в виде

$$-\left(\lambda+\sum_{l=2}^{L}\alpha_l\right)H_0(u)+e^{-ju}\int_0^\infty H_1(u,y)\mu(y)dy+\sum_{l=2}^{L}\int_0^\infty H_l(u,y)v_l(y)dy+j\sigma H_0'(u)=0,$$

$$\frac{\partial H_1(u,y)}{\partial y}=\left(\left(r(u)-1\right)\lambda-\mu(y)\right)H_1(u,y),$$

$$H_1(u,0)=\lambda r(u)H_0(u)-j\sigma H_0'(u),$$

$$\frac{\partial H_l(u,y)}{\partial y}=\left(\left(r(u)-1\right)\lambda-v_l(y)\right)H_l(u,y),\quad H_l(u,0)=\alpha_l H_0(u), \tag{3}$$

где $l=\overline{2,L}$.

**Теорема.** *Характеристическая функция числа поступивших заявок в RQ-системе с неординарным пуассоновским входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками имеет вид*

$$H(u)=H_0(u)+H_1(u)+\sum_{l=2}^{L}H_l(u)=$$

$$=H_0(u)\left(1+\left(\lambda r(u)-j\sigma h(u)\right)\frac{1-B^*\left(\lambda-\lambda r(u)\right)}{\lambda-\lambda r(u)}+\sum_{l=2}^{L}\alpha_l\frac{1-V_l^*\left(\lambda-\lambda r(u)\right)}{\lambda-\lambda r(u)}\right).$$

*Здесь* $B^*(u)$ *и* $V_l^*(u)$ *– преобразования Лапласа – Стилтьеса функций* $B_1(x)$ *и* $V_l(x)$, $l=\overline{2,L}$, *соответственно. Функция* $H_0(u)$ *определяется равенствами*

$$H_0(u)=P_0\exp\left\{\int_0^u h(x)dx\right\},$$

$$h(u)=j\frac{\lambda\left(e^{-ju}r(u)B^*(\lambda-\lambda r(u))-1\right)+\sum_{l=2}^{L}\alpha_l\left(V_l^*(\lambda-\lambda r(u))-1\right)}{\sigma\left\{1-e^{-ju}B^*(\lambda-\lambda r(u))\right\}},$$

$$P_0=\frac{1-r\lambda b}{1+\sum_{l=2}^{L}\alpha_l v_l},$$

*где* $b$ *и* $v_l$ *– средние соответствующих распределений* $B(x)$ *и* $V_l(x)$, $l=\overline{2,L}$, *а величина* $r$ *– среднее число заявок в поступившей пачке.*

## Заключение

В работе была рассмотрена RQ-система $M^{[n]}/GI/GI/1/N$ с неординарным входящим потоком и разнотипными вызываемыми заявками. Для предложенной модели найдена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок входящего потока в системе.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Artalejo J.R.*, *Gomez-Corral A.* Retrial queueing systems: a computational approach. Springer, 2008. P. 315.
2. *Falin G.I.*, *Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997.
3. *Bhulai S.*, *Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. P. 1434–1438.
4. *Deslauriers A.*, *L'Ecuyer P.*, *Pichitlamken J.*, *Ingolfsson A.*, *Avramidis A.N.* Markov chain models of a telephone call center with call blending // Computers and Operations Research. 2007. V. 34. P. 1616–1645.
5. *Choi B.D.*, *Choi K.B.*, *LeeY.W.* M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity // Queueing Systems. 1995. V. 19. P. 215–229.
6. *Tran-Gia P.*, *Mandjes M.* Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks // IEEE J. Selected Areas in Communications. 1997. V. 15. P. 1406–1414.
7. *Artalejo J.R.*, *Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8. P. 781–806.
8. *Artalejo J.R.*, *Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
9. *Nazarov A.*, *Paul S.*, *Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
10. *Sakurai H.*, *Phung-Duc T.* Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // Top. 2015. V. 23. No. 2. P. 466–492.