НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками[1]

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

RQ-системы характеризуются следующей отличительной особенностью: заявка, заставшая прибор занятым при поступлении в систему, уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, после чего повторяет попытку занять прибор. RQ-системы являются адекватными моделями телекоммуникационных систем, компьютерных сетей и реальных объектов. В монографиях [1, 2] приводятся обширные исследования таких моделей.

Модели RQ-систем с вызываемыми заявками имеют приложение в работе таких систем, как call-центры, где оператор в свободное время совершает звонки или занимается альтернативными видами деятельности. О приложениях RQ-систем в моделировании call-центров изложено в работах [3, 4].

RQ-системы с вызываемыми заявками активно изучаются в последнее время [5–7]. В работах, упомянутых выше, исследуются марковские RQ-системы с вызываемыми заявками. Модель RQ-системы с несколькими типами вызываемых заявок была рассмотрена Сакураи и Фунг-Дуком [8]. Для такой модели был получен численный алгоритм нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

В данной работе в качестве метода исследования рассматриваемых моделей применяется метод асимптотического анализа. В работах [9, 10] метод асимптотического анализа предложен для исследования RQ-систем M|M|1 и MMPP|M|1 с вызываемыми заявками, тогда как в данной работе рассматривается модель с разнотипными вызываемыми заявками.

Описание математической модели и постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, на вход которой поступает MMPP-поток, определяемый управляющим процессом $m(t)$ – цепью Маркова с конечным числом состояний $m=\overline{1,M}$, которая задана мат-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

рицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$ с элементами $q_{k_1 k_2}$; диагональной матрицей $\mathbf{\Lambda}$ условных интенсивностей λ_m, $m=\overline{1,M}$, наступления событий на интервалах постоянства.

Заявки, поступающие в систему, занимают прибор и обслуживаются экспоненциальное случайное время с параметром μ_1, если прибор свободен. Если поступившая заявка застает прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки экспоненциальная с параметром σ. Когда прибор свободен, он вызывает заявки извне. В системе N типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n. Вызванная заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n. Для удобства исследования пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до $N+1$.

Пусть процесс $i(t)$ – число заявок входящего потока в системе в момент времени t. Этот случайный процесс $i(t)$ не является марковским, поэтому введем дополнительный процесс $k(t)$, характеризующий состояние прибора в момент времени t. Он принимает следующие значения: 0, если прибор свободен, 1, если обслуживается поступившая заявка, n, если обслуживается вызванная заявка типа n, $n = 2, 3, \ldots, N+1$.

Трехмерный процесс $\{i(t), k(t), m(t)\}$ образует цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим $P\{i(t)=i,\ k(t)=k,\ m(t)=m\} = P_k(i, m, t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, в системе находится i заявок и управляющая MMPP-потоком цепь Маркова $m(t)$ принимает значение m.

Для распределения вероятностей $P_k(i, m, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова. Запишем полученную систему уравнений в стационарном режиме:

$$-\left(\lambda_m+i\sigma+\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)P_0(i,m)+\mu_1 P_1(i+1,m)+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n P_n(i,m)+\sum_{\nu=1}^{M}P_0(i,\nu)q_{\nu m}=0,$$

$$-(\lambda_m+\mu_1)P_1(i,m)+\lambda_m P_1(i-1,m)+\lambda_m P_0(i-1,m)+i\sigma P_0(i,m)+\sum_{\nu=1}^{M}P_1(i,\nu)q_{\nu m}=0,$$

$$-(\lambda_m+\mu_n)P_n(i,m)+\lambda_m P_n(i-1,m)+\alpha_n P_0(i,m)+\sum_{\nu=1}^{M}P_n(i,\nu)q_{\nu m}=0,$$

$$n=\overline{2,N+1}. \tag{1}$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u,m)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_k(i,m),\ \ k=\overline{0,N+1},$$

где $j=\sqrt{-1}$. Запишем систему уравнений в матричном виде, используя следующие обозначения:

$$\mathbf{H}_n(u)=\{H_n(u,1),\ H_n(u,2),\ \ldots,\ H_n(u,M)\},$$

$$\mathbf{H}'_n(u)=\left\{\frac{\partial H_n(u,1)}{\partial u},\ \frac{\partial H_n(u,2)}{\partial u},\ \ldots,\ \frac{\partial H_n(u,M)}{\partial u}\right\},$$

$$\mathbf{\Lambda}=diag\left[\lambda_m\right],\ \mathbf{I}\ \text{– единичная матрица.}$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{H}_0(u)\left(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-\sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\mathbf{I}\right)+j\sigma\mathbf{H}'_0(u)+\mu_1e^{-ju}\mathbf{H}_1(u)+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{H}_n(u)=0,$$

$$\mathbf{H}_1(u)\left(\mathbf{Q}+(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I}\right)+e^{ju}\mathbf{H}_0(u)\mathbf{\Lambda}-j\sigma\mathbf{H}'_0(u)=0,$$

$$\mathbf{H}_n(u)\left(\mathbf{Q}+(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}-\mu_n\mathbf{I}\right)+\alpha_nH_0(u)=0,\ n=\overline{2,N+1}. \tag{2}$$

Будем решать полученную систему уравнений методами асимптотического анализа в двух различных предельных условиях: высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок.

Метод асимптотического анализа в условии высокой интенсивности вызывания заявок

Для удобства исследования представим параметры RQ-системы в виде $\alpha_n=\alpha\gamma_n$, где $n=2,3,\ldots,N+1$. В предложенных обозначениях предельное условие высокой интенсивности вызывания заявок имеет вид $\alpha\to\infty$.

Теорема 1 *Пусть $i(t)$ – число поступивших заявок в RQ-системе $MMPP|M|1$ с N типами вызываемых заявок, тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\alpha\to\infty}M\exp\left\{jw\frac{i(t)}{\alpha}\right\}=\exp\{jw\kappa_1\},$$

где κ_1 – *положительный корень уравнения*

$$\mathbf{R}\left\{\sigma\kappa_1\left(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\left(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I}\right)^{-1}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\sigma\kappa_1\left(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I}\right)+\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\left(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}\right\}\mathbf{e}=0,$$

вектор-строка $\mathbf{R}$ – *стационарное распределение вероятностей состояний процесса* $m(t)$, *определяемый системой уравнений*: $\mathbf{RQ}=0$, $\mathbf{Re}=1$, $\mathbf{e}$ **–** *единичный вектор-столбец.*

Теорема 1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1 числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Для более детального исследования случайного процесса, перейдем к асимптотике второго порядка.

Теорема 2 *Пусть* $i(t)$ – *число поступивших заявок в RQ-системе MMPP*|*M*|1 *с N типами вызываемых заявок*, *тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\alpha\to\infty} M\exp\left\{jw\frac{i(t)-\alpha\kappa_1}{\sqrt{\alpha}}\right\}=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

где
$$\kappa_2=\frac{\mathbf{y}_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda})\mathbf{e}-\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{y}_n\mathbf{\Lambda e}-\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}}{\sigma\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{g}_n\mathbf{\Lambda e}\right]}.$$

Векторы $\mathbf{y}_k$ *и* $\mathbf{g}_k$ *определяются следующими равенствами:*

$$\mathbf{g}_1=\left(\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0+\mathbf{R}_0\right)\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\ \mathbf{g}_n=\gamma_n\mathbf{g}_0\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\ n=\overline{2,N+1},$$

$$\mathbf{g}_0\left(-\left(\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n+\sigma\kappa_1\right)\mathbf{I}+\mu_1\sigma\kappa_1\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\gamma_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\mathbf{R}_0-\mu_1\mathbf{R}_0\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\ \sum_{k=0}^{N+1}\mathbf{g}_k\mathbf{e}=0.$$

$$\mathbf{y}_1=\left(\sigma\kappa_1\mathbf{y}_0+\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}\right)\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},$$

$$\mathbf{y}_n=\left(\gamma_n\mathbf{y}_0+\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}\right)\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\ n=\overline{2,N+1},$$

$$\mathbf{y}_0\left(-\left(\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n+\sigma\kappa_1\right)\mathbf{I}+\mu_1\sigma\kappa_1\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\gamma_n\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\mu_1\mathbf{R}_1-\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}\left(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1}-\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}\left(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right)^{-1},\ \sum_{k=0}^{N+1}\mathbf{y}_k\mathbf{e}=0.$$

Векторы $\mathbf{R}_k$ *определены аналогично в процессе доказательства теоремы* 1.

Теорема 2 показывает, что в предельном условии асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием $\kappa_1\alpha$ и дисперсией $\kappa_2\alpha$.

Метод асимптотического анализа в условии длительного обслуживания вызываемых заявок

Представим параметры системы (2) в виде $\mu_n=\mu\gamma_n$. В предложенных обозначениях предельное условие длительного обслуживания вызываемых заявок имеет вид $\mu\to 0$.

Теорема 3 *Пусть* $i(t)$ *– число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|*1 *с N типами вызываемых заявок*, *тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\mu\to 0}M\exp\{jw\mu i(t)\}=\frac{1}{\nu_1}\left(\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\gamma_n-jw\rho\mu_1}\right)\prod_{n=2}^{N+1}\left(1-jw\frac{\rho\mu_1}{\gamma_n}\right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}},$$

где
$$\nu_1=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\gamma_n},\ \rho=\frac{\mathbf{R\Lambda e}}{\mu_1}.$$

Теорема 3 позволяет однозначно определить вид асимптотической характеристической функции числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок. В отличие от исследования системы в предельном условии высокой интенсивности вызывания, здесь не требуется дополнительного исследования с использованием разложений более высокого порядка, так как характеристическая функция достаточно полно описывает случайный процесс.

Заключение

В данной работе исследована RQ-система MMPP|M|1 с несколькими типами вызываемых заявок в предельных условиях высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок. Для каждого предельного условия найдена предельная характеристическая функция числа поступивших заявок в системе.

В дальнейшем планируется исследование RQ-систем GI|M|1 и M|GI|1 с N типами вызываемых заявок в различных предельных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.*, *Gómez-Corral A.* Retrial queueing systems // Mathematical and Computer Modelling. 1999. V. 30. No. 3-4.
2. *Falin G.*, *Templeton J.G.C.* Retrial queues. CRC Press, 1997. V. 75.
3. *Bhulai S.*, *Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. No. 8. P. 1434–1438.
4. *Aguir S.*, *Karaesmen F.*, *Akşin O.Z.*, *& Chauvet F.* The impact of retrials on call center performance // OR Spectrum. 2004. V. 26. No. 3. P. 353–376.
5. *Artalejo J.R.*, *Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8. No. 4. P. 781–806.
6. *Artalejo J.R.*, *Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two-way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
7. *Phung-Duc T.*, *Rogiest W.* Two-way communication retrial queues with balanced call blending // International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. P. 16–31.
8. *Sakurai H.*, *Phung-Duc T.* Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // Top. 2015. V. 23. No. 2. P. 466–492.
9. *Nazarov A.*, *Paul S.*, *Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
10. *Nazarov A.*, *Phung-Duc T.*, *Paul S.* Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication // International Conference on Information Technologies and Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017. P. 28–41.