НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Исследование выходящего потока в RQ-системе M/GI/1[1]

И.Л. Лапатин, А.А. Назаров

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Одной из основных характеристик, которая определяет качество функционирования системы связи, является число обслуженных заявок системой за единицу времени. Информация о характеристиках выходящего потока представляет большой практический интерес, так как часто выходящий поток одной системы является входящим для другой.

Результаты исследования выходящих потоков сетей массового обслуживания широко применяются при моделировании вычислительных систем, при проектировании сетей передачи данных и при анализе сложных многоэтапных производственных процессов.

Большинство работ в современной литературе посвящены исследованию числа заявок в системе [1–3]. Изучению выходящих потоков уделяется недостаточно внимания, так как на сегодняшний день не существует общих подходов к их исследованию. Основные результаты по аналитическому исследованию выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны в середине XX в. [4–6]. Подробный обзор можно найти в работе [7].

Качественное изменение сетей связи влечет за собой разработку все новых математических моделей, способных адекватно описывать функционирование реальных систем. Наряду с этим должны быть разработаны современные методы исследования выходящих потоков предложенных моделей. Поэтому проблема модификации имеющихся и разработка новых методов исследования выходящих потоков является актуальной и современной.

В данной работе основным методом исследования является метод асимптотического анализа, который позволяет в RQ-системе M/GI/1 найти вид предельного распределения числа событий в выходящем потоке, наступивших за время t в асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277.

Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ.

Обозначим: $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t; $k(t)$ – состояние прибора: 0 – прибор свободен, 1 – прибор занят обслуживанием заявки входящего потока; $z(t)$ – остаточное время обслуживания заявки на приборе, то есть продолжительность интервала от момента времени t до окончания времени обслуживания заявки; данная компонента имеет смысл только для $k(t) = 1$; $m(t)$ – число событий в выходящем потоке, наступивших за время t.

Рассмотрим марковский процесс

$$\{k(t) = 0,\, i(t),\, m(t)\},\ \{k(t) = 1,\, i(t),\, z(t),\, m(t)\}$$

с переменным числом компонент. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = 0,\, i(t) = i,\, m(t) = m\} = P_0(i, m, t),$$

$$P\{k(t) = 1,\, i(t) = i,\, z(t),\, m(t) = m\} = P_1(i, m, \mathrm{z}, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,m,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P_0(i,m,t) + \frac{\partial P_1(i+1,0,m-1,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P_1(i,z,m,t)}{\partial t} = -\lambda P_1(i,z,m,t) + \frac{\partial P_1(i,z,m,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i,0,m,t)}{\partial z} +$$
$$+\lambda P_0(i-1,m,t) + i\sigma P_0(i,m,t)B(z) + \lambda P_1(i-1,z,m,t). \qquad (1)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$,

$$H_0(u_1,u,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_1 i} e^{jum} P_0(i,m,t),$$

$$H_1(u_1,z,u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}e^{ju_1 i}e^{jum}P_1(i,z,m,t).$$

Тогда систему (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial H_0(u_1,u,t)}{\partial t}=-\lambda H_0(u_1,u,t)+\ j\sigma\frac{\partial H_0(u_1,u,t)}{\partial u_1}+e^{-ju_1}e^{ju}\ \frac{\partial H_1(u_1,0,u,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H_1(u_1,z,u,t)}{\partial t}=\lambda e^{ju_1}H_0(u_1,u,t)B(z)-j\sigma\frac{\partial H_0(u_1,u,t)}{\partial u_1}B(z)+$$

$$+\frac{\partial H_1(u_1,z,u,t)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u_1,0,u,t)}{\partial z}+\lambda\left(e^{ju_1}-1\right)H_1(u_1,z,u,t). \qquad (2)$$

Асимптотический анализ

Систему дифференциальных уравнений в частных производных (2) будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$).

Теорема 1. *Пусть $m(t)$ – число событий в выходящем потоке, наступивших за время t в RQ-системе $M/GI/1$. Тогда в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$) асимптотическое распределение вероятностей процесса $m(t)$ совпадает с распределением вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке, длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda+\kappa$, где λ – интенсивность входящего потока, κ – нормированное среднее число заявок в системе, и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.*

Доказательство. Обозначим

$\varepsilon=\sigma$, $u_1=\varepsilon w$, $F_0(w,u,t,\varepsilon)=H(u_1,u,t)$, $F_1(w,z,u,t,\varepsilon)=H(u_1,z,u,t)$,

тогда система (2) запишется в виде

$$\frac{\partial F_0(w,u,t,\varepsilon)}{\partial t}=-\lambda F_0(w,u,t,\varepsilon)+\ j\frac{\partial F_0(w,u,t,\varepsilon)}{\partial w}+e^{-j\varepsilon w}e^{ju}\ \frac{\partial F_1(w,0,u,t,\varepsilon)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1(w,z,u,t,\varepsilon)}{\partial t}=\lambda e^{j\varepsilon w}F_0(w,u,t,\varepsilon)B(z)-j\frac{\partial F_0(w,z,u,t)}{\partial w}B(z)+$$

$$+\frac{\partial F_1(w,z,u,t,\varepsilon)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(w,0,u,t,\varepsilon)}{\partial z}+\lambda\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)F_1(w,z,u,t,\varepsilon). \qquad (3)$$

Делая предельный переход в полученной системе (3), имеем систему уравнений

$$\frac{\partial F_0(w,u,t)}{\partial t} = -\lambda F_0(w,u,t) + j\frac{\partial F_0(w,u,t)}{\partial w} + e^{ju}\frac{\partial F_1(w,0,u,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1(w,z,u,t)}{\partial t} = \lambda F_0(w,u,t)B(z) - j\frac{\partial F_0(w,z,u,t)}{\partial w}B(z) +$$
$$+\frac{\partial F_1(w,z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,u,t)}{\partial z}. \qquad (4)$$

Решение системы (4) будем искать в виде

$$F_0(w,u,t) = \Phi(w)F_0(u,t),\ F_1(w,z,u,t) = \Phi(w)F_1(z,u,t). \qquad (5)$$

Здесь функция $\Phi(w)$ имеет смысл асимптотического приближения характеристической функции числа заявок в системе в условии большой задержки на орбите. Подставляя (5) в систему (4) и разделив обе части уравнений на $\Phi(w)$, получим

$$\frac{\partial F_0(u,t)}{\partial t} = -\lambda F_0(u,t) + j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}F_0(u,t) + e^{ju}\frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial t} = \lambda F_0(u,t)B(z) - j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}F_0(u,t)B(z) +$$
$$+\frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z}. \qquad (6)$$

Нетрудно показать, что $\Phi(w) = \exp(j\kappa w)$. Здесь κ имеет смысл нормированного среднего числа заявок в системе. В этом случае из системы (6) получаем систему

$$\frac{\partial F_0(u,t)}{\partial t} = -(\lambda+\kappa)F_0(u,t)) + e^{ju}\frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial t} = (\lambda+\kappa)F_0(u,t)B(z) + \frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z}, \qquad (7)$$

которая совпадает с системой уравнений для распределения вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке [8], длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda+\kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Заключение

Исследование выходящего потока рассматриваемой RQ-системы проводится методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите. В результате проведенных исследований было получено, что выходящий поток рассматриваемой системы является рекуррентным, длины его интервалов представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda+\kappa$ (λ – интенсивность входящего потока, κ – нормированное среднее число заявок в системе), и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.*, *Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2008. 318 p.
2. *Falin G.I.*, *Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997.
1. *Nazarov A.*, *Paul S.*, *Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
4. *Burke P.J.* The output of queueing systems // Operations Research. 1956. V. 4. P. 699–704.
5. *Reich E.* Waiting times when queues are in tandem // Ann. Math. Statist. 1957. V. 28. No. 3. P. 768.
6. *Finch P.D.* The output process of the queueing system M|G|1 // J. Roy. Statist. Soc. 1959. V. 21. No. 2. P. 375–380.
7. *Лапатин И.Л.* Исследование выходящих потоков моделей массового обслуживания с неограниченным числом приборов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Томский государственный университет. Томск, 2012. 138 с.
8. *Лопухова С.В.* Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Томский государственный университет. Томск, 2008. 15 с.