

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Механико-математический факультет

**Всероссийская молодежная научная конференция  
студентов, аспирантов и молодых ученых  
«Все грани математики и механики»**

(23–27 апреля 2019 г.)

**Сборник статей**

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск  
Издательский Дом Томского государственного университета  
2019

# **Математическое моделирование течения закрученного потока жидкости Балкли-Гершеля в цилиндрическом канале**

**О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, А. Е. Асеева**

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: alena.aseeva.93@mail.ru

**Аннотация.** Представлены результаты исследования течения потока жидкости с пределом текучести Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале. Течение дилатантной жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой и пристеночной зонах течения. Течение псевдопластической жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой зоне течения. По мере стабилизации течения и уменьшения скоростей сдвиговых деформаций эффективная вязкость жидкости с пределом текучести в пристеночной зоне уменьшается, а в приосевой – увеличивается, что приводит к формированию зоны квазитвердого течения.

**Ключевые слова:** реология, дилатантные среды псевдопластические среды, вязкопластическая жидкость, жидкость Балкли – Гершеля, закрученные течения, вычислительная гидродинамика.

**Введение.** Течение растворов и расплавов полимеров в большинстве случаев описывается сложной функциональной зависимостью эффективной вязкости, как от приложенного напряжения сдвига, так и от градиента скорости. На практике часто встречаются системы, обладающие пространственной структурой, которые ведут себя подобно твердым телам вплоть до высоких скоростей сдвига [1, 2]. Реологическое поведение таких сред можно описать моделью Балкли – Гершеля, объединяющей в себе свойства модели степенной жидкости Оствальда – де Вейля и вязкопластической среды Шведова – Бингама [3, 4].

Исследованию течения в каналах сред со сложным реологическим поведением в настоящее время уделяется значительное внимание [5].

В статье [5] представлены результаты численного моделирования стационарных течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра. Установлено, что при больших значениях эксцентриситета в канале формируется возвратное течение, размеры и положения которого определяют интегральные характеристики течения.

Исследование нестационарных течений дилатантной и псевдопластической жидкостей Оствальда – де Вейля, а также жидкости, описываемой моделью Уильямсона, вблизи твердого тела выполнено в работе [6].

Исследование течения вязкопластической жидкости Шведова – Бингама в канале с внезапным расширением [7]

показало, что в случае стационарного течения в области уступа реализуется режим с образованием зоны квазитвердого течения.

В работе [8 -10] проведено моделирование течения жидкости Балкли-Гершеля со свободной поверхностью, реализующегося при заполнении плоских каналов в поле силы тяжести.

Математическое моделирование течений реологически сложных сред существенно усложняется при наличии закрутки потока на входе в канал. Настоящая работа является продолжением исследований закрученных течений неньютоновских сред [11 – 17]. Целью настоящей работы является исследование структуры течения закрученного потока дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли - Гершеля в цилиндрическом канале.

**Математическая модель.** Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения [1]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\rho w^2}{r}, \quad (3)$$

Для построения модели среды необходимо установить связь между девиаторами тензора напряжений и тензора скоростей деформации. Для среды Балкли - Гершеля

реологические соотношения в случае осесимметричного течения имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2 \left( kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xr} = \left( kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{rr} &= 2 \left( kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \frac{\partial v}{\partial r}, \tau_{x\varphi} = \left( kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \tau_{r\varphi} &= \left( kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \right), \tau_{\varphi\varphi} = 2 \left( kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \frac{v}{r}, \\ U &= 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2. \quad (4) \end{aligned}$$

Среда определяется тремя параметрами – предельным напряжением сдвига  $\sigma$ , показателем (индексом) консистенции жидкости  $k$ , характеризующим ее текучесть, а также параметром нелинейности  $n$ . При  $k=0$  получаем идеально пластическую среду, при  $\sigma=0$  – жидкость Оствальда – де Вейля. Параметр  $n$  характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее  $n$  отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется нелинейность кривой течения. При  $n=1$  модель Балкли – Гершеля переходит в модель Шведова – Бингама. Ньютоновская жидкость характеризуется параметрами  $n=1$ . Значениям  $n > 1$  отвечают дилатантные жидкости, у которых эффективная вязкость растет с увеличением скоростей сдвига, значениям  $0 < n < 1$  отвечают псевдопластичные жидкости, эффективная вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига.

Реологические соотношения (5) справедливы в области течения

$$T^2 = \frac{\tau_{xx}^2 + \tau_{rr}^2 + \tau_{\varphi\varphi}^2}{2} + \tau_{x\varphi}^2 + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{xr}^2 > \sigma^2. \quad (6)$$

В случае  $T^2 \leq \sigma^2$  среда движется как абсолютно твердое тело: компоненты тензора скоростей деформации равны нулю.

Эллиптический вид используемых уравнений требует задания условий на границах расчетной области. На входе в канал ( $x = 0$ ) задается распределение скорости потока:

$$u = u_{\text{in}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad v = 0,$$

Граничные условия в выходном сечении канала ( $x = L$ ) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0.$$

На оси канала ( $r = 0$ ) задаются условия симметрии:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0.$$

На стенках канала ( $r = R$ ) выполняется условие прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0.$$

**Анализ полученных результатов.** Рассмотрим основные результаты исследования течения вязкопластической жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале. При моделировании поля течения диапазон изменения параметров был выбран следующим: консистенция жидкости изменялась в

пределах  $k = 0.05 \div 10 \text{ Н} \cdot \text{с}^n / \text{м}^2$ , показатель нелинейности –  $n = 0.1 \div 3$ , предельное напряжение сдвига  $\sigma = 0 \div 10 \text{ Па}$ , среднерасходная скорость –  $u_{\text{ин}} = 1 \div 10 \text{ м/с}$ , число Россби –  $Ro = 0 \div 10$ . Радиус канала составлял  $R = 0.1 \text{ м}$ , длина канала –  $L = 2 \div 5 \text{ м}$ .

При стабилизированном течении жидкости Балкли – Гершеля в центре канала  $r < r_Y$  образуется жесткая зона. Положение границы жесткой зоны определяется перепадом

давления и предельным напряжением сдвига:  $r_Y = 2\sigma \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}$ .

Величина  $r_Y$  определяет условие, при котором возможно течение в канале. Течение в канале реализуется при выполнении условия  $r_Y < R$ . Если  $R < r_Y$ , то происходит запираание канала и течение становится невозможным.

В жесткой зоне среда движется как твердое тело с плоским профилем осевой скорости:

$r \leq r_Y$ :

$$u = u_Y = \frac{n}{n+1} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \left( \frac{\sigma}{k} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left( \frac{R}{r_Y} - 1 \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (7)$$

Во внешней области формируется зона сдвигового течения, и радиальное распределение скорости имеет вид:

$$r_Y < r: \quad u = u_Y \left[ 1 - \left( \frac{r - r_Y}{R - r_Y} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (8)$$

При анализе течения предполагалось, что распределение скоростей на входе в канал подчиняется закону Пуазейля. В случае ньютоновской жидкости перестройки профиля скорости не происходит, так как пуазейлевский профиль соответствует установившемуся течению жидкости. Однако для неньютоновской среды параболический профиль скорости не соответствует стабилизированному потоку, поэтому вблизи от входа в канал профиль осевой скорости претерпевает изменения.

На рис. 1 представлено радиальное распределение осевой скорости дилатантной жидкости с пределом текучести в различных сечениях трубы. Величина осевой скорости в центральной части трубы вниз по потоку уменьшается, а в пристеночной – увеличивается, что приводит к уменьшению толщины пограничного слоя. На значительном удалении от входа в среде с пределом текучести радиальное распределение осевой скорости характеризуется жесткой зоной в центре канала и зоной сдвигового течения вблизи стенки. С увеличением величины предельного напряжения сдвига  $\sigma$  толщина жесткой зоны увеличивается, а толщина зоны сдвигового течения уменьшается. С увеличением значений показателя нелинейности распределение осевой скорости в зоне течения приближается к линейному, что свидетельствует о проявлении дилатантных свойств.

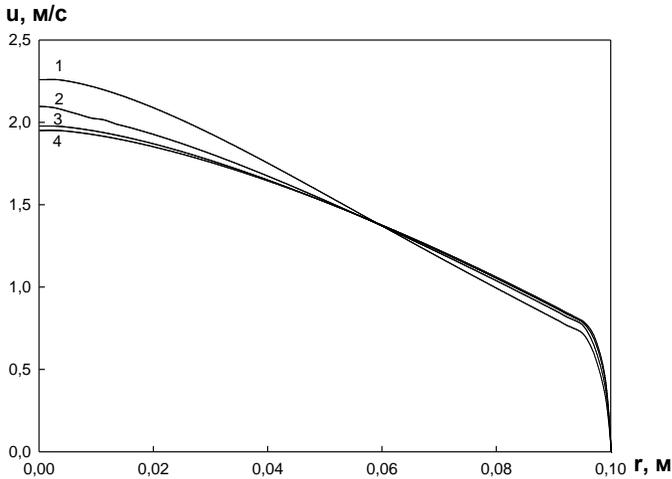


Рис. 1 Радиальное распределение осевой скорости:  $u_{in} = 2.5$  м/с.; а –  $n = 2$ ,  $k = 1 \text{ Па}\cdot\text{с}^2$ ,  $\sigma = 5 \text{ Па}$ : 1  $x = 0.1 \text{ м}$ , 2 – 0.2, 3 – 0.6, 4 – 1.5

Влияние показателя нелинейности  $n$  на радиальное распределение эффективной вязкости в различных сечениях трубы свойства жидкости Балкли – Гершеля иллюстрируют рис. 2, – 2в.

Характерной особенностью течения дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли-Гершеля является неоднозначное влияние интенсивности скоростей сдвиговых деформаций на поле эффективной вязкости. Так составляющая эффективной вязкости, обусловленная дилатантными свойствами среды, увеличивается с ростом интенсивности скоростей сдвиговых деформаций, а вязкопластическая составляющая эффективной вязкости – уменьшается.

По аналогии с ньютоновской жидкостью удобно ввести в рассмотрение эффективную вязкость  $\mu_{\text{eff}}$ , которая может быть рассчитана как

$$\mu_{\text{eff}} = kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}. \quad (9)$$

Первое слагаемое в (9)  $\mu_{\text{pl}} = kU^{n-1}$  характеризует, так называемую, пластическую вязкость, второе –  $\mu_{\text{str}} = \frac{\sigma}{U}$  структурную вязкость, связанную с необходимостью приложения напряжений, превосходящих предел текучести для разрушения структуры среды.

Простейший анализ показывает, что при больших и малых скоростях сдвига в дилатантных средах эффективная вязкость принимает большие значения. При  $U \rightarrow 0$  и  $U \rightarrow \infty$  эффективная вязкость  $\mu_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ . Минимальное значение эффективной вязкости реализуется при умеренных значениях

скоростей сдвига: 
$$U_{\text{min}} = \left[ \frac{\sigma}{(n-1)k} \right]^{1/n}.$$

В псевдопластических средах эффективная вязкость стремится к бесконечности при  $U \rightarrow 0$ , что объясняется их структурированием и формированием квазитвердых зон. При  $U \rightarrow \infty$  эффективная вязкость становится равной нулю.

На рис. 2 представлены радиальные распределения эффективной вязкости  $\mu_{\text{eff}}$  в различных сечениях канала для  $n = 2$ . Из рисунка видно, что в потоке выделяются три

характерные зоны. В окрестности оси градиенты скорости имеют невысокие значения. Это приводит к увеличению эффективной вязкости в приосевой зоне течения, в которой преобладают вязкопластические свойства потока. В центральной части потока влияние вязкопластических и дилатантных свойств среды на величину эффективной вязкости является соизмеримым. Радиальное распределение эффективной вязкости на этом участке течения является немонотонным и зависит от соотношения вязкопластических и дилатантных свойств. В окрестности стенки, в области значительных градиентов скорости преобладают дилатантные свойства среды, приводящие к росту значений эффективной вязкости и загущению среды. По мере гидродинамической стабилизации течения и уменьшения значений интенсивности скоростей сдвиговых деформаций  $U$  наблюдается рост значений эффективной вязкости в приосевой зоне течения и уменьшение  $\mu_{\text{eff}}$  в центральной области.

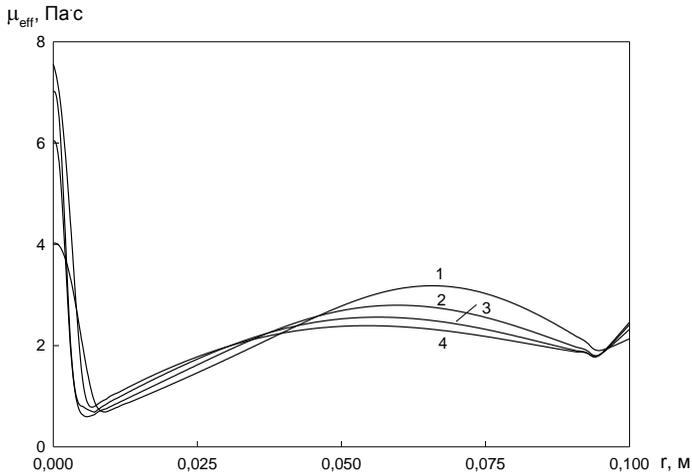


Рис. 2 Радиальное распределение эффективной вязкости в потоке;  $u_{in} = 2.5$  м/с, 1 -  $x = 0.2$  м, 2 - 0.6, 3 - 1, 4 - 1.5  $n = 2$

$$k = 0.1 \text{ Па} \cdot \text{с}^2, \sigma = 1 \text{ Па}$$

Перейдем теперь к рассмотрению течения псевдопластической жидкости Балкли – Гершеля. Из рисунка видно, что с уменьшением показателя нелинейности наблюдается рост значений эффективной вязкости в приосевой зоне течения. Изменение эффективной вязкости в периферийной и пристеночной части течения крайне незначительно. Причины вызывающие такое изменение эффективной вязкости те же, что и при течении псевдопластической жидкости Оствальда – де Вейля. Уменьшение скоростей сдвиговых деформаций в приосевой зоне течения по мере гидродинамической стабилизации течения при одном и том же давлении напора соответствует росту значений эффективной вязкости. С увеличением значений

предельного напряжения сдвига также наблюдается увеличение значений эффективной вязкости в приосевой зоне. Приосевая область высоковязкого течения на значительном удалении от входа в канал трансформируется в зону квазитвердого течения. Толщина этой зоны пропорциональна предельному напряжению сдвига. С ростом значений консистенции эффективная вязкость увеличивается во всей области течения, однако наибольший прирост значений эффективной вязкости осуществляется вблизи оси течения.

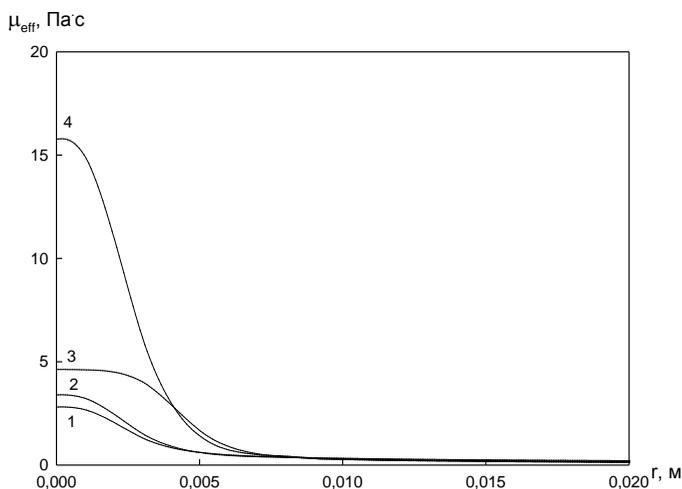


Рис. 3. Радиальное распределение эффективной вязкости в потоке:  $u_{in} = 2.5$  м/с,  $Ro = 0$  м:  $x = 1.5$  м,  $\sigma = 1$  Па,  $k = 0.5 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.5}$ ,  $1 - n = 0.875$ ,  $2 - 0.75$ ;  $3 - 0.625$ ;  $4 - 0.5$ ;

**Заключение.** В результате анализа влияния реологических свойств среды можно сделать следующие выводы:

- течение дилатантной жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой и пристеночной зонах течения;
- повышение значений эффективной при течении дилатантной жидкости с пределом текучести в приосевой зоне объясняется вязкопластическим поведением среды, в пристеночной – дилатантным;
- течение псевдопластической жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости в приосевой зоне течения;
- повышение значений эффективной при течении псевдопластической жидкости с пределом текучести в приосевой зоне объясняется вязкопластическим поведением среды;
- по мере стабилизации течения и уменьшения скоростей сдвиговых деформаций эффективная вязкость жидкости с пределом текучести в пристеночной зоне уменьшается, а в приосевой – увеличивается, что приводит к формированию зоны квазитвердого течения;
- увеличение значений реологических параметров  $k$ ,  $n$ ,  $\sigma$  приводит к увеличению эффективной вязкости потока.

## Список литературы

1. Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость и перемешивание. Москва: Наука. - 2005.

2. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. Томск: Изд-во ТГАСУ. - 2015.
3. Кутепов А. М., Полянин Л. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика: справочное пособие. Москва: Бюро Квантум. - 1996.
4. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб: Наука. - 2000.
5. Малкин А.Я., Исаев А.И; *Реология: концепции, методы, приложения.* – СПб: Профессия, 2007. – С.560.
6. Подрябинкин Е.В. Рудяк В.Я. Моделирование течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом // Доклады Академии наук Высшей школы Российской Федерации. - 2012.- № 2. С.112—122.
7. Перминов А.В. Нестационарное движение обобщенной ньютоновской жидкости около твердого тела // Инженерно-физический журнал. - 2014. – Т.87. № 1. - С.139—147.
8. Алексева К.Г., Борзенко Е.И. Структура течения жидкости Шведова – Бингама в канале со скачком сечения // Известия высших учебных заведений. Физика. - 2012. - №7-2. - С.15—19.
9. Борзенко Е.И. Рыльцов И.А., Шрагер Г.Р. Кинематика течения жидкости Балкли – Гершеля со свободной поверхностью при заполнении канала // Известия

- Российской академии наук. Механика жидкости и газа. - 2017. – № 5. - С.53. - т- 64.
10. Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р., Якутенко В. А. Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью при заполнении круглой трубы // Прикладная механика и техническая физика. - 2012. – Т. 53, № 2. - С.53—60.
  11. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-Физический журнал. - 2011. - Т. 84, № 3. - С.544—547.
  12. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-Физический журнал. - 2014. - Т. 87, № 1. - С.192—199.
  13. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. - 2014. - Т. 87. № 5. - С.1129—1137.
  14. Матвиенко О.В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале // Известия высших учебных заведений. Физика. - 2014. - Т. 57. № 8-2. - С.183—189.
  15. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока

- псевдопластической жидкости Балкли – Гершеля в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. - 2019. - Т. 92, № 1. - С.215—226.
16. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. Numerical investigation of Herschel - Bulkley fluids mixing. В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering. Сер. "International Scientific Conference of Young Scientists: Advanced Materials in Construction and Engineering, TSUAB 2014" 2015. - С.012—034.
17. Матвиенко О. В., Агафонцева М. В., Базуев В. П. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости // Вестн. Томского гос. архит.-строит. ун-та. - 2012. - №. 4. - С.144—156.
18. Матвиенко О.В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью сиско, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2018. - № 55. - С.99—112.