НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Оценивание параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка

Л.А. Нежельская, Е.Ф. Сидорова

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Наиболее актуальные исследования, связанные с проектированием, последующим внедрением и обслуживанием информационно-вычислительных систем и сетей различной конфигурации, математическими моделями которых выступают системы и сети массового обслуживания, возникают в первую очередь в рамках рассмотрения случайных входящих потоков событий (сообщений, заявок) [1, 2].

Усложнение структуры цифровых систем интегрального обслуживания, разнообразие программного и аппаратного обеспечения, интеграция различных систем связи выявили необходимость построения новых математических моделей входящих потоков в виде дважды стохастических потоков событий, исследованию которых посвящены работы [3–7]. При их непосредственном изучении выделяют два основных класса задач – оценивание состояний потока [6, 8, 9] и оценивание его параметров [7, 10] по наблюдаемым моментам наступления событий.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование коррелированного обобщенного синхронного потока второго порядка [6] в рамках оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями потока согласно методу моментов [11].

Постановка задачи

Рассматривается функционирующий в стационарном режиме обобщенный синхронный поток второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2; здесь и далее S_i понимается как i-е состояние $\lambda(t)$ и имеет место при $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в i-м состоянии определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, где случайные величины $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ независимы и распределены по законам $F_i^{(1)}(t)=1-e^{-\lambda_i t}$ и $F_i^{(2)}(t)=1-e^{-\alpha_i t}$ соответственно. В момент наступления события потока в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина η_i, $i=1,2$, процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е, $i \neq j$, или остается в i-м состоянии, $i=j$, с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$ либо $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $i,j=1,2$; $P_1^{(1)}(\lambda_j \mid \lambda_i)+P_1^{(1)}(\lambda_i \mid \lambda_i)=1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j \mid \lambda_i)+P_1^{(2)}(\lambda_i \mid \lambda_i)=1$, $i,j=1,2$, $i \neq j$. Таким образом, длительность интервала между событиями потока в i-м состоянии скрытого марковского процесса $\lambda(t)$ является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $F_i(t)=1-e^{-(\lambda_i+\alpha_i)t}$, $i=1,2$.

Цель настоящего исследования в том, чтобы определить явный вид плотности вероятности длительности интервала между моментами наступления событий в коррелированном потоке и оценить ее параметры методом моментов при условии, что на интервале наблюдения (t_0, t) последовательность наблюдаемых моментов наступления событий $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ порождает вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$.

Вывод плотности вероятности

Определим плотность вероятности длительности k-го интервала $\tau_k = t_{k+1}-t_k$ между соседними событиями t_k и t_{k+1}, $k=1,2,...$, в исследуемом потоке как $p(\tau_k)$. Ввиду того, что рассматривается стационарный режим функционирования потока, для любого $k \geq 1$ справедливо равенство $p(\tau_k)=p(\tau)$, $\tau \geq 0$. Вследствие этого момент наступления события t_k без ограничения общности можно положить равным нулю или, что эквивалентно, момент наступления события есть $\tau=0$.

Рассмотрим $p_{ij}(\tau)$ – условную вероятность того, что в течение интервала $(0,\tau)$ произойдет несопряженный с наступлением события переход процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i,j=1,2$.

Лемма 1. Условные вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i,j=1,2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка имеют вид

$$p_{11}(\tau)=e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau}, p_{12}(\tau)=0,\ p_{21}(\tau)=0,\ p_{22}(\tau)=e^{-(\lambda_2+\alpha_2)\tau}, \tau \geq 0.$$

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1,2$, того, что без наступления событий на $(0, \tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет на этом интервале из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1,2$, в коррелированном потоке событий определяются формулами

$$\tilde{p}_{11}(\tau) = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau},$$
$$\tilde{p}_{12}(\tau) = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau},$$
$$\tilde{p}_{21}(\tau) = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))e^{-(\lambda_2+\alpha_2)\tau},$$
$$\tilde{p}_{22}(\tau) = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))e^{-(\lambda_2+\alpha_2)\tau}.$$

Лемма 3. Вероятности перехода $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в состояние S_j, $i, j = 1,2,$ за время, которое пройдет от $\tau = 0$ до момента наступления очередного события потока, определяются формулами

$$p_{11} = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))(\lambda_1 + \alpha_1)^{-1},$$
$$p_{12} = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))(\lambda_1 + \alpha_1)^{-1},$$
$$p_{21} = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))(\lambda_2 + \alpha_2)^{-1},$$
$$p_{22} = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))(\lambda_2 + \alpha_2)^{-1}.$$

Рассмотрим $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что $\lambda(\tau)$ в момент $\tau = 0$ пребывает в i-м состоянии при условии, что $\tau = 0$ есть момент наступления события, $i = 1,2$; $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$.

Лемма 4. Условные финальные вероятности $\pi_i(0)$, $i = 1,2$, в коррелированном потоке задаются выражениями

$$\pi_1(0) = \gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}, \ \pi_2(0) = \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}, \tag{1}$$

где $\gamma_i = (\lambda_i + \alpha_i)[\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_j)]$, $i, j = 1,2$, $i \neq j$.

Леммы 2 и 4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. В коррелированном потоке плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями принимает вид

$$p(\tau) = \gamma(\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1+\alpha_1)\tau} + (1-\gamma)(\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2+\alpha_2)\tau}, \tau \geq 0, \tag{2}$$

$\gamma = \pi_1(0)$, где $\pi_1(0)$ определяется в (1).

Отметим, что (2) есть плотность гиперэкспоненциального распределения; в дальнейшем принимается $(\lambda_1 + \alpha_1) \neq (\lambda_2 + \alpha_2)$.

Оценивание параметров плотности вероятности методом моментов

Оценить методом моментов двенадцать неизвестных параметров исисследуемого коррелированного потока (или восемь с учетом ограничений на задание вероятностей переходов), располагая лишь информацией о виде плотности $p(\tau)$, как будет видно ниже, не представляется возможным; будем оценивать неизвестные параметры плотности (2).

Замечание. Рассматриваемый поток событий является в общем случае коррелированным, т.е. длительности интервалов между моментами наступления событий в потоке являются зависимыми случайными величинами. В этой связи указанная зависимость не позволяет говорить о состоятельности получаемых методом моментов оценок и говорить об их качестве приходится лишь на основе результатов *имитационного моделирования* в смысле того или иного критерия качества оценивания.

Рассмотрим статистики $C_l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k^l$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1}. Пусть $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ – выборка из распределения $p(\tau\,|\,\gamma, z_1, z_2) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}$, зависящего от трех неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$, $\gamma = \pi_1(0)$; без ограничения общности доопределим $z_1 > z_2$. Теоретический начальный момент l-го порядка $M\tau^l = \int_0^\infty \tau^l p(\tau\,|\,\gamma, z_1, z_2)\,d\tau$ в силу близости теоретической и эмпирической функций распределения при достаточно большом n близок к соответствующему выборочному моменту – статистике C_l того же порядка. Таким образом, для оценки z_1, z_2, γ необходимо иметь три уравнения моментов $M\tau^l = C_l$, $l = \overline{1,3}$.

Теоретический начальный момент порядка l задается формулой

$$M\tau^l = \int_0^\infty \tau^l [\gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}]\,d\tau = l!\frac{\gamma}{z_1^{\,l}} + l!\frac{(1-\gamma)}{z_2^{\,l}},\ l = \overline{1,3},$$

на основании которой запишем систему трех уравнений моментов относительно оценок $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{\gamma}$ с учетом преобразований в виде

$$\begin{gathered} \gamma z_2 + (1-\gamma) z_1 - C_1 z_1 z_2 = 0,\ C_1(z_1 + z_2) - C_2 z_1 z_2 / 2 = 1, \\ C_2(z_1 + z_2) - C_3 z_1 z_2 / 3 = 2C_1. \end{gathered} \qquad (3)$$

Решая (3) с учетом условия $z_1 > z_2$, находим

$$\hat{z}_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2{}^2 - 2C_1C_3} + \sqrt{\left(\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2{}^2 - 2C_1C_3}\right)^2 - 4\frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2{}^2 - 2C_1C_3}}\right\},$$
$$\hat{z}_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2{}^2 - 2C_1C_3} - \sqrt{\left(\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2{}^2 - 2C_1C_3}\right)^2 - 4\frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2{}^2 - 2C_1C_3}}\right\}. \quad (4)$$

Оценка $\hat{\gamma}$ определяется однозначно из первого уравнения (3)

$$\hat{\gamma} = \hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)(\hat{z}_1 - \hat{z}_2)^{-1}. \quad (5)$$

Итак, система (3) имеет единственное решение $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{\gamma}$.

Рассмотрим далее представление γ как отношение $\gamma = \gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$, $1 - \gamma = \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$, где $\gamma_i = (\lambda_i + \alpha_i)[\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_i \mid \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_i \mid \lambda_j)]$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. В результате имеем $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ – выборку из распределения $p(\tau \mid \gamma, z_1, z_2) = \gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} z_1 e^{-z_1\tau} + \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} z_2 e^{-z_2\tau}$, зависящего от четырех неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$ ($z_1 > z_2$), γ_1, γ_2. В этом случае запишем четыре уравнения моментов

$$\begin{gathered}\gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1 - C_1(\gamma_2 + \gamma_1) z_1 z_2 = 0,\ C_1(z_1 + z_2) - C_2 z_1 z_2 / 2 = 1,\\ C_2(z_1 + z_2) - C_3 z_1 z_2 / 3 = 2C_1,\ C_3(z_1 + z_2) - C_4 z_1 z_2 / 4 = 3C_2.\end{gathered} \quad (6)$$

Теорема 2. Система (6) относительно неизвестных параметров z_1, z_2, γ_1, γ_2 плотности вероятности $p(\tau)$ несовместна.

Последнее определяет невозможность оценивания методом моментов более трех параметров плотности (2) в коррелированном потоке.

Заключение

В настоящей статье получен явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между событиями коррелированного дважды стохастического потока (2). Методом моментов найдены оценки параметров задаваемой (2) плотности: $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ в виде (4), $\hat{\gamma}$ в виде (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Basharin G. P.*, *Gaidamaka Yu. V.*, *Samouylov K. E.* Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. No. 2. P. 62–69.
2. *Vishnevsky V. M.*, *Semenova O. V.*, *Dudin A. N.*, *Klimenok V. I.* Approximate method to study M/G/1-type polling system // Quality Technology & Quantitative Management (QTQM). 2012. V. 9. No. 2. P. 211–228.
3. *Башарин Г.П.*, *Кокотушкин В.А.*, *Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // J. Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. *Lucantoni D. M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
6. *Нежельская Л.А.*, *Сидорова Е.Ф.* Оптимальная оценка состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 30–41.
7. *Gortsev A.M.*, *Nezhel'skaya L.A.* Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering. 1996. V. 50. No. 1. P. 56–63.
8. *Леонова М.А.*, *Нежельская Л.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
9. *Nezhelskaya L.* Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
10. *Okamura H.*, *Dohi T.*, *Trivedi K. S.* Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. V. 17. No. 4. P. 1326–1339.
11. *Малинковский Ю. В.* Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика). Гомель: УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. 146 с.