НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

Характеристическая функция числа заявок на орбите в RQ-системе M/M/1 с отрицательными заявками и буфером*

Е.А. Фёдорова[1], М.П. Фархадов[2]

[1] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*
[2] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), г. Москва, Россия*

RQ-системы являются математическими моделями ТМО, широко используемые для анализа и оптимизации различных телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и др. Наиболее подробное описание RQ-систем представлено в монографиях Дж. Арталехо и Г.И. Фалина [1, 2].

В последнее время широко исследуются СМО с отрицательными заявками, предложенные Э. Геленбе [3, 4], или так называемые G-системы и G-сети. Суть отрицательных заявок заключается в том, что они не требуют обслуживания, а оказывают влияние на работу системы: уничтожают заявки в очереди, ломают обслуживающие приборы, «обнуляют» всю систему и др. Такой эффект объясняется наличием вирусов, хакерских атак и т.д. в реальных сетях связи. В статье [5] представлен обзор основных работ по исследованию G-систем и G-сетей, в том числе RQ-систем.

Постановка задачи

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявки этого потока будем называть положительными. Такие заявки занимают прибор для обслуживания, если прибор свободен. Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_1. Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту (источник повторных вызовов), где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с парамет-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-703002.

ром σ. С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка поступает в прибор для обслуживания, в противном случае – заявка мгновенно возвращается на орбиту для реализации следующей задержки.

Кроме того, в систему поступает простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью γ. Отрицательная заявка «ломает» прибор на некоторое время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ_2. При этом, если на приборе обслуживалась положительная заявка, то она перемещается в буфер, где ожидает востановления работы прибора, после чего мгновенно начинает обслуживание.

Если в момент нахождения отрицательной заявки на приборе к прибору обращается положительная заявка (извне или с орбиты), то такая заявка отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку.

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите.

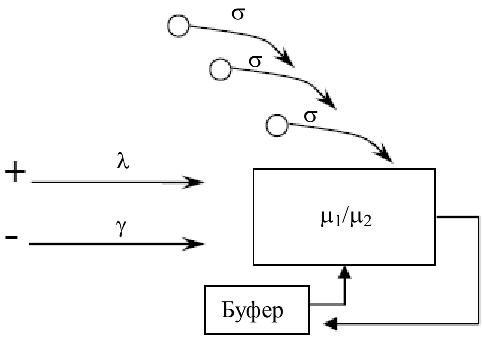

Рис. 1. RQ-система M|M|1
с отрицательными заявками и буфером

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $n(t)$ – число заявок в очереди, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{если прибор свободен,}\\ 1, \text{прибор занят положительной заявкой,}\\ 2, \text{прибор занят отрицательной заявкой и в буфере нет заявки,}\\ 3, \text{прибор занят отрицательной заявкой и в буфере есть заявка.}\end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t) = k,\ i(t) = i\} = P_k(i,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок. Очевидно, что процесс $\{k(t),\ i(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским.

Для распределения вероятностей $P_k(i,t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. В стационарном режиме эта система имеет вид

$$\begin{cases} -(\lambda+\gamma+i\sigma)P_0(i)+\mu_1 P_1(i)+\mu_2 P_2(i)=0, \quad i\geq 0, \\ -(\lambda+\mu_1+\gamma)P_1(i)+\lambda P_0(i)+(i+1)\sigma\cdot P_0(i+1)+\lambda P_1(i-1)+\mu_2 P_3(i)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)P_2(i)+\gamma P_0(i)+\lambda P_2(i-1)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)P_3(i)+\gamma P_1(i)+\lambda P_3(i-1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $P_k(i)=\lim\limits_{t\to\infty}P_k(i,t)$.

Перейдем к частичным характеристическим функциям

$$H_k(u)=\sum_i e^{jui}P_k(i),$$

где j – мнимая единица. Тогда система (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} -(\lambda+\gamma)H_0(u)+j\sigma H_0'(u)+\mu_1 H_1(u)+\mu_2 H_2(u)=0, \\ -(\lambda+\mu_1+\gamma)H_1(u)+\lambda H_0(u)-je^{-ju}\sigma\cdot H_0'(u)+\lambda e^{ju}H_1(u)+\mu_2 H_3(u)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)H_2(u)+\gamma H_0(u)+\lambda e^{ju}H_2(u)=0, \\ -(\lambda+\mu_2)H_3(u)+\gamma H_1(u)+\lambda e^{ju}H_3(u)=0. \end{cases} \tag{2}$$

Из третьего уравнения системы (2) имеем

$$H_2(u)=\frac{\gamma}{\lambda-\lambda e^{ju}+\mu_2}H_0(u). \tag{3}$$

А из четвертого уравнения системы (2) запишем

$$H_3(u)=\frac{\gamma}{\lambda-\lambda e^{ju}+\mu_2}H_1(u). \tag{4}$$

Подставив (4) во второе уравнение системы (2), нетрудно получить:

$$H_1(u)=\frac{\left(\lambda(1-e^{ju})+\mu_2\right)\left(\lambda H_0(u)-je^{-ju}\sigma\cdot H_0'(u)\right)}{(\lambda(1-e^{ju})+\mu_1)(\lambda(1-e^{ju})+\mu_2)+\gamma\lambda(1-e^{ju})}. \tag{5}$$

Подставим (3), (5) в первое уравнение системы (2):

$$j\sigma H_0'(u) = \frac{\lambda\left[1-\mu_1 A(u)\right] + \dfrac{\lambda(1-e^{ju})}{\lambda(1-e^{ju})+\mu_2}}{1-\mu_1 e^{-ju} A(u)}, \qquad (7)$$

где $$A(u) = \frac{\lambda(1-e^{ju})+\mu_2}{(\lambda(1-e^{ju})+\mu_1)(\lambda(1-e^{ju})+\mu_2)+\gamma\lambda(1-e^{ju})}.$$

Решение (7) имеет вид

$$H_0(u) = C\exp\left\{\frac{1}{j\sigma}\int \frac{\lambda(1-\mu_1 A(u))(\lambda(1-e^{ju})+\mu_2)+\lambda(1-e^{ju})}{(1-\mu_1 e^{-ju}A(u))(\lambda(1-e^{ju})+\mu_2)}du\right\}. \qquad (8)$$

С помощью формул (3) – (5) можно найти характеристическую функцию числа заявок в системе $H(u) = H_0(u)+H_1(u)+H_2(u)+H_3(u)$, где константа C определяется из условия нормировки: $H(0)=1$.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена RQ-система с отрицательными заявками и буфером, в котором ожидает продолжения обслуживания прерванная заявка. Получен вид характеристической функции числа заявок на орбите.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falin G.I.*, *Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
2. *Artalejo J.R.*, *Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 267 p.
3. *Gelenbe E.* Random neural networks with positive and negative signals and product form solution // Neural Computation. 1989. V. 1. No. 4. P. 502–511.
4. *Gelenbe E.* Queueing networks with negative and positive customers // J. Applied Probability. 1991. V. 28. P. 656–663.
5. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // Mathematical and Computer Modelling. 2011. V. 53. No. 1–2. P. 205–212.